س. ای. نووسلو

مثلثات

مستقیم الخط و کروی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مثلثات

مستقیم‌الخط و کروی

نوشتهٔ سرگی ایوسیفویچ نووسلو

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر
تهران، ۱۳۶۹

دورهٔ اختصاصی مثلثات (مستقیم الخط و کروی)

ترجمهٔ پرویز شهریاری

چاپ دوم: ۱۳۶۵

چاپ سوم: ۱۳۶۹

تعداد: ۵۵۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ سپهر، تهران

بسمه تعالی

مثلثات زائیدهٔ احتیاج مربوط به محاسبات عملی است . بخصوص **نیاز به وسیله ای برای محاسبهٔ اجزاء اشکال مختلف هندسی** ، وقتی که تعداد کافی از اجزاء آنها معلوم باشد، مثلثات را بوجود آورد. حتی در یونان باستان ، ضمن حل يك رشته مسائل محاسبه ای نجومی ، موفقیتهای جالبی نصیب مثلثات شد . ولی تنظیم مثلثات بعنوان يك علم مستقل را مدیون ریاضی دانان آسیای میانه در قرون ۹ تا ۱۳ میلادی هستیم . اگرچه مثلثات علم مستقلی شد و روشهـای مخصوص بخود پیدا کرد . هدفش به شناسائی ومحاسبهٔ اجزاء اشکال سادهٔ هندسی (مثلثهای مسطحه وفضائی) محدود ماند وتصورمی‌شدکه مطالعهٔ توابع مثلثاتی جز از طریق ساختمانهای هندسی میسر نیست . وقتی که بطریق هندسی بین توابع مثلثاتی روابط جبری برقرارشد ، این امکان بدست بدست آمدکه بااستفاده ازروشهای جبری، توابع مثلثاتی موردمطالعه قرارگیرد ، تبدیلات مختلف آنها بدست آید و روابط مختلفی بین اجزاء اشکال هندسی کشف شود .

پیشرفتهای بعدی علم نشان دادکه توابع مثلثاتی تنها ابزاری

برای حل‌مسائل محاسبه‌ای هندسه نیستند ، بلکه در فیزیك ومکانیك نیز ، وقتی‌که از فـرایندهای **متناوب** صحبت می‌شود ، اهمیت جدی دارند . باین ترتیب نظریهٔ **توابع مثلثاتی** دارای مفهوم **مستقل** شد و لازم بودکه اساس تحلیلی این نظریه ، بدون اتکاء به هندسه ، بنیان گذاشته شود .

ریـاضی دان بـزرك **لئونارد اولر** نخستین قدم را در زمینهٔ نظـریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی بـرداشت و ریاضی دان بزرك روس **نیکلای ایوانویچ لباچوسکی** ، بـرای تعریف توابع مثلثاتی بدون استفاده از هندسهٔ اقلیدسی ، نظریهٔ تحلیلی این توابع را بوجودآورد که بر اساس رشته‌های توانی تنظیم شده بود .

امروزه مثلثات رابعنوان علمی **مستقل نمی‌شناسد** ؛ زیرا طبیعی است‌که مسائل مربوط به محـاسبهٔ اجزاء اشکـال اشکال هندسی به **هندسه** مربوط است. ومثلثات‌درموردآنها تنها نقش«کمکی»دارد،ازطرف دیگر نظریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی مربوط‌به فصلی از **آنالیز ریاضی** است‌که درآنجا نظریهٔ‌عمومی توابع مقدماتی‌مورد مطالعه‌قرارمی‌گیرد ولی با وجود اینکه امروزه‌کسی مثلثات را بعنوان‌علمی مستقل قبول ندارد **در برنامه‌های درسی بعنوان مادهٔ مستقلی باقی مانده است** و در دورهٔ ریاضیات دبیرستانی بحق جای مهمی را اشغال‌کرده‌است .

در برنامه‌های فعلی دبیرستانی مثلثات ، دو جهت اصلی وجود دارد : **تابعی ومحاسبه‌ای** . درجهت اول توابع‌مثلثاتی بعنوان‌توابعی با آوند عددی مورد مطالعه قرار می‌گـیرند و اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند ، زیرا این توابع در آنالیز ریاضی معاصر ، فیزیك، مکانیك و تکنیك نقش اساسی دارند . درجهت دوم راههای محـاسبهٔ اجزاء اشکال هندسی بیان می‌شود واهمیت اساسی آنها درمورد استعمال‌عملی آنها در هندسه ، فیزیك، تکنیك ، نجوم ، مساحی وغیره است .

مقدّمه

مفاهیم اساسی

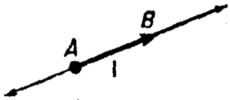
۱. مفاهیم اساسی نظریهٔ تصویر

پاره خطی را درنظرمی گیریم که به دو نقطهٔ A و B منتهی شده باشد. اگرروی این پاره خط جهتی (ومثلاازA به B) درنظربگیریم، نقطهٔ A را مبداء ونقطهٔ B را انتهای آن خواهیم نامید (شکل ۱) وبرای نوشتن هم ابتدا A وسپس B رامی نویسیم:

پاره خط جهت‌دار را بردار Vecteur مینامند.

AB را بردار مفروض فرض کنید. خط l کـه ازنقاط A و B عبور کرده‌است شامل تمام نقاط پاره‌خط AB خواهدبود. نقطهٔ A (مبداء بردار) خط l را به‌دونیم خط تقسیم می کند. یکی‌ازاین نیم‌خطها که شامل نقطهٔ B می‌باشد هم‌جهت با بردار AB ودیگری که شامل B نیست مختلف‌الجهت با بردار AB است (شکل ۲).

ش ۱



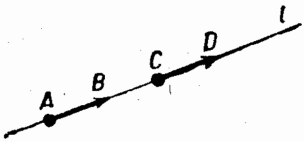
ش ۲

اگرنقاط A و B برهم منطبق باشند ، گویند AB برداری مساوی صفر است.

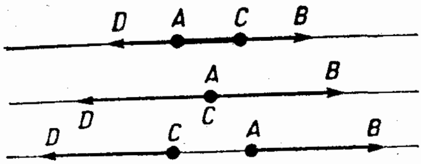
پاره خط l را مساوی واحد درنظرمی گیریم. طول پاره خط AB را

(برحسب‌واحد اندازه گیری‌مفروض) طول یا کالبد(مدول) بردار AB گویند. کالبد بردار را به‌شکل |AB| نشان می‌دهند.

دو بردار AB و CD را واقع بریك خط l می گیریم وفرض می کنیم که هردو بردار مخالف باصفر باشند. این دو بردار می‌توانند هم‌جهت و یا مختلف‌الجهت باشند. درحالت اول نیم‌خط l که هم جهت AB است‌با نیم‌خط هم‌جهت CD دارای‌قسمت مشترکی است که خودش نیم‌خطی از l است(شکل ۳) درحالت دوم قسمت مشترك این دونیم‌خط یا یك پاره‌خط است ، یا یك نقطه (مبداء مشترك آنها) ویاقسمت مشترکی ندارند(شکل ۴).



ش ۳



ش ۴

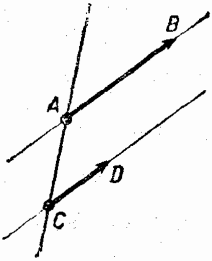
AB و CD را دو بردار مخالف صفر واقع برصفحه وروی دو خط موازی فرض می‌کنیم. این دوبردارنیز می‌توانند هم‌جهت ویا مختلف‌الجهت باشند. درحالت اول نقاط B و D دریك‌طرف خط AC (که ازوصل‌دونقطهٔ مبداء بدست‌آمده است) قراردارد (شکل ۵) ودرحالت دوم نقاط B وD در دوطرف این خط قرارخواهندداشت (شکل ۶).

دوبردارتنها وقتی‌مساوی هستند*که باهم موازی ویا روی یك خط واقع باشند وهم طول باشند . (شکل ۷)

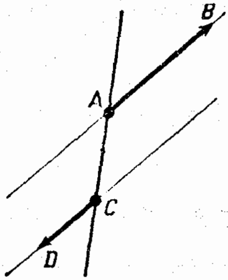
خط l رادرنظرمی گیریم که روی آن دونقطه مشخص شده باشد،اول نقطهٔ O و سپس E بطوریکه OE مساوی واحدباشد. این دونقطهٔ O و E **جهت‌مثبت** را روی خط l مشخص می‌کنند : همهٔ بردارهای مخالف صفر

---

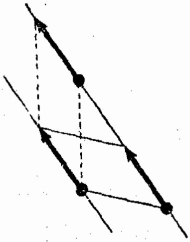
*) گاهی دوبردارمساوی را به دوبرداری‌گویندکه‌ابتدا وانتهای آنهابرهم منطبق‌باشند. و دوبردار موازی وهم‌جهت ومتساوی‌الطول راهمسنگ مینامند.



ش ۵

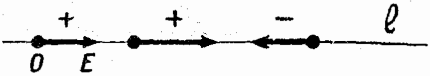


ش ۶



ش ۷

که روی l واقع باشند مثبت (منفی) هستند به‌شرطی‌که هم‌جهت با بردار واحد OE (ویا مختلف‌الجهت با آن) باشند (شکل ۸) . بردار صفردارای جهت مشخصی نیست.



ش ۸

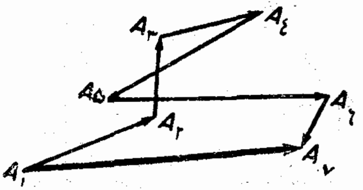
خطی‌که روی‌آن جهت مثبت و بردار واحد انتخاب شده باشد محور نام دارد .

اگر بردار AB بر محور l قرار گرفته باشد ، مقدار جبری بردار عبارتست از طول بردار باعلامت مثبت بشرطی درجهت مثبت محورقرار گرفته باشد ویا باعلامت منفی وقتی‌که درجهت منفی محورقرار گرفته باشد . مقدار جبری‌بردار صفرهم مساوی‌صفرخواهد بود. اندازهٔ‌جبری بردارAB رابشکل $\overline{AB}$ نشان می‌دهند.

حاصل جمع بردارها را بطریق زیر بدست می‌آورند:

برای اینکه حاصل جمع چند بردار‌را بدست آوریم ، **برداری هم سنگ بردار دوم چنان رسم می‌کنیم که ابتدای آن بر انتهای بردار اول منطبق باشد ، سپس هم‌سنگ بردار سوم را رسم میکنیم بطوریکه مبداء آن بر انتهای بردار دوم منطبق باشد و همین طور**

تاآخرین بردار . برداری‌که ابتدای آن مبداء اولین بردار و انتهای آن انتهای‌آخرین بردار باشد ، بردار مجموع خواهد بود .



ش ۹

اگر A_1, A_2, A_3 و ... و A_n ، A_{n+1} را نقاط مفروضی درنظر بگیریم. طبق قاعدهٔ ذکرشده خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$$

درحالتی‌که نقاط A_1 ، A_2 ، ... A_{n+1} بـریك محور واقـع باشند (شکل ۱۰ ، $n=4$)، اگرمقادیرجبری بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$ و ... $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ ... را با a_1 ، a_2 ... a_n نشان دهیم، دراینصورت **مقدارجبری بردار مجموع برابراست با مجموع مقادیرجبری بردارها:**

$$\overline{A_1A_{n+1}}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_nA_{n+1}}$$

یا:

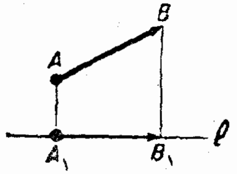
$$\overline{A_1A_{n+1}}=a_1+a_2+\cdots a_n$$

ش ۱۰

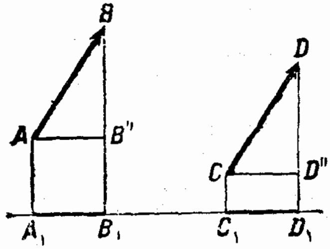
تعریف:

۱) تصویر نقطهٔ A برمحور l عبارتست از A_1 پای عمودی‌که ازنقطهٔ A برمحور l فرودآمده است . ۲) تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ بر محور l ، وقتی‌در همان صفحهٔ محور واقع باشد عبارتست از مقدار جبری بـردار $\overrightarrow{A_1B_1}$که از وصل تصاویر مبداء و منتهای بـردار$\overrightarrow{AB}$ بدست‌آمده است (شکل ۱۱) .

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \text{تصویر } \overrightarrow{AB}$$



ش۱۱



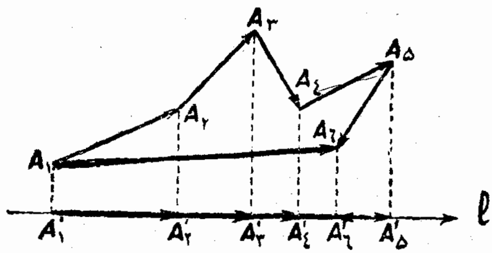
ش۱۲

گاهی بردار $\overrightarrow{A_1B_1}$ راهم مثل مقدارجبری $\overline{A_1B_1}$ تصویر $\overrightarrow{AB}$ مینامند **تصاویر دو بردار هم‌سنگ برروی یك محورباهم برابرخواهند بود** (شکل ۱۲) .

$A_1A_2\ldots A_{n+1}$ راخط شکسته‌ای واقع برصفحه درنظرمی گیریم، این خط شکسته رامیتوان بصورت بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$ ، $\overrightarrow{A_2A_3}$ و... $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ فرض کرد که جهت آنها باردیف رئوس آن مشخص شده باشد، بردارمجموع:

$$\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$$

را بردار مسدود کنندهٔ خط شکسته مفروض هم می‌نامند.



ش۱۳

دربارهٔ تصویر خط شکسته بایستی قضیهٔ اساسی زیر رادر نظر داشت(شکل ۱۳):

قضیه : تصویر بردار مجموع برابر است با مجموع تصاویر بردارها .

درحقیقت اگر A'_1 و A'_2 و ... و A'_n و A'_{n+1} راتصاویر رئوس‌خط شکسته برمحور l بدانیم، برای هرنوع استقرار A_i خواهیم داشت:

$$\overline{A'_1A'_{n+1}}=\overline{A'_1A'_2}+\overline{A'_2A'_3}+\cdots+\overline{A'_nA'_{n+1}}$$

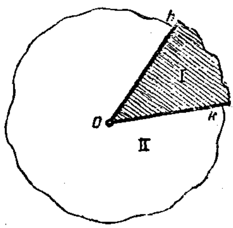
ویا بعبارت دیگر :

$$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}\,\text{تصویر}=\overrightarrow{A_1A_2}\,\text{تصویر}+\overrightarrow{A_2A_3}\,\text{تصویر}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\,\text{تصویر}$$

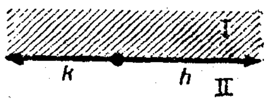
درحالت خاصی‌که A_1 و A_{n+1} برهم منطبق باشند (خط‌شکسته بسته باشد) مجموع بردارهامساوی‌صفر ودرنتیجه مجموع‌تصاویرآنها هم صفرخواهد بود.

۲. زوایا واندازه‌گیری آنها

دونیم‌خط h و k راکه‌ازیك نقطهٔ O رسم شده‌اند درنظرمی‌گیریم. این‌دو خط صفحه‌را بدوقسمت‌تقسیم‌می‌کنند. درحالت‌کلی یکی ازاین‌دو قسمت‌محدب ودیگری مقعرخواهدبود (شکل۱۴).*



ش۱۴



ش۱۵

*) قسمتی از صفحه را محدب‌گویندکه‌اگر هردونقطهٔ دلخواه‌آنها بهم وصل‌کنیم‌پاره‌خطی بدست‌آیدکه تمام نقاط آن درهمین قسمت صفحه واقع باشد.

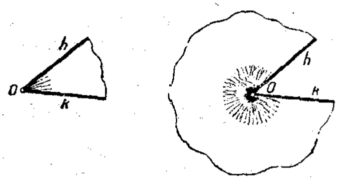
حالت خاص تنها درموردی است که نیم‌خطهای h و k روی یك خط واقع باشند که دراینصورت هردو قسمت صفحه (نیم‌صفحه) محدب خواهند بود(شکل ۱۵).

درهندسه، زاویه به‌مجموعهٔ دونیم‌خط متمایز h و k گفته میشود که از یك نقطهٔ O رسم شده‌اند، دراینصورت یکی ازدوقسمتی که بوسیلهٔ دونیم‌خط روی صفحه بوجودآمده‌اند قسمت داخلی نسبت به‌زاویه بحساب می‌آید.

این قسمت راداخل وقسمت دیگرراخارج زاویه ونیم خطهای h و k را اضلاع و O را رأس زاویه گویند.

گاهی زاویه را عبارت ازمقدار صفحه‌ای میدانند که شامل قسمت‌داخلی زاویه وخوددونیم‌خط باشد.

درمثلثات، زاویه راعبارت ازتعدادبیشماری‌نیم‌خط میدانند که همهٔ آنها ازنقطهٔ O شروع ودرقسمت داخلی زاویه قرارگرفته‌اند ، باضافهٔ اضلاع‌آن h و k (شکل۱۶). درحقیقت اگرفرض کنیم که یکی ازاین دونیم‌خطومثلا h



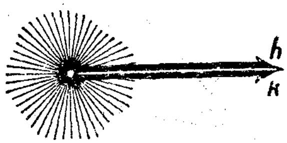
ش ۱۶

دور نقطهٔ O دوران کند تا بر k قرارگیرد ، آن قسمت از صفحه که بوسیلهٔ این نیم‌خط جاروب میشود قسمت داخلی زاویه خواهدبود.

دونیم خط متمایز h و k که ازنقطهٔ O رسم شده باشند دوزاویه بوجود می‌آورند که قسمت داخلی یکی قسمت خارجی دیگری خواهدبود وهریك‌را کامل‌کنندهٔ دیگری نامند.

اگرنیم‌خطهای h و k برهم منطبق باشند باهم دوزاویه خواهیم‌داشت، یکی ازاین دوزاویه مساوی صفراست وبرای آن قسمت داخلی وجود ندارد .

قسمت داخلی زاویهٔ دیگر تمام صفحه را باستثنای نیم‌خط $h=k$ در بر می گیرد، این زاویه را زاویهٔ کامل گویند (شکل ۱۷).

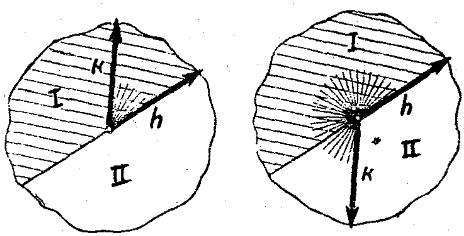


ش ۱۷

یکی از این دو نیم‌خط و مثلا h را که ضلع زاویه‌ای مخالف صفر ومخالف زاویهٔ کامل است در نظر می‌گیریم. اگر h را از طرف نقطهٔ O امتداددهیم، صفحه بدو نیم‌صفحه تقسیم خواهد شد. یکی از این دو نیم‌صفحه (I) یا شامل قسمت داخلی زاویهٔ مفروض است ویازاویهٔ مفروض شامل آن میشود و نیم صفحهٔ دیگر (II) یا شامل قسمت داخلی زاویهٔ کامل کننده است ویا زاویهٔ کامل کننده شامل آنست (شکل ۱۸).

گوئیم نیم صفحهٔ I درجهت داخلی زاویهٔ مفروض نسبت به ضلع h قرار گرفته است.

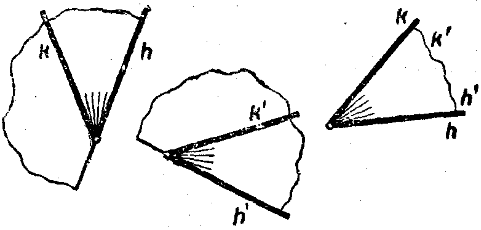
درمورد زاویهٔ صفر مفهوم نیم‌صفحه‌ای که درجهت داخلی زاویه قرار گرفته باشد معنا ندارد ودرمورد زاویهٔ کامل میتوان باختیار هریك ازدونیم‌صفحه را در جهت داخلی زاویه دانست.



ش ۱۸

O و ´O را رئوس دوزاویه به اضلاع h ، k و ´h ، ´k فرض میکنیم، دوضلع دلخواه این دوزاویه و مثلا h و ´h را برهم منطبق می کنیم بطوریکه صفحات آنها هم درجهت داخلی نسبت به این اضلاع قرار گرفته باشند. بعبارت دیگر دوزاویه را چنان برهم منطبق می‌کنیم که h بر ´h قرار گیرد ودو نیم‌صفحه‌ای

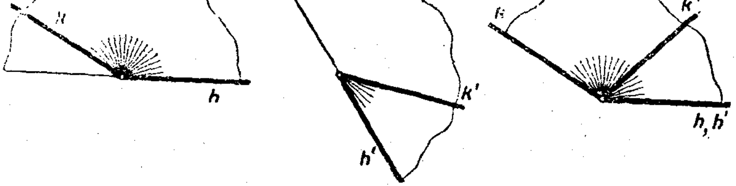
هم که نسبت باین اضلاع درجهت داخلی قرار گرفته اند برهم منطبق شوند. اگر دراین صورت اضلاع k و k' هم بریکدیگر منطبق شوند (شکل ۱۹) گویند دو



ش ۱۹

زاویهٔ $\widehat{(h,k)}$ و $\widehat{(h',k')}$ با هم برابرند ، واگر اضلاع k و k' برهم منطبق نشوند دو زاویه برابر نیستند . مثلا فرض کنید که ضلع k' در قسمت داخلی زاویهٔ $\widehat{(h,k)}$ قرار گرفته باشد (شکل ۲۰) در اینصورت $\widehat{(h,k)} > \widehat{(h',k')}$. دراینحالت زاویهٔ $\widehat{(h,k)}$ مجموع دوزاویهٔ $\widehat{(h',k')}$ و $\widehat{(k',k)}$ خواهد بود که درآن قسمت داخلی زاویهٔ $\widehat{(k',k)}$ قسمتی از صفحه‌ایست که درداخل زاویهٔ $\widehat{(h,k)}$ قرا گرفته است. بنابراین داریم:

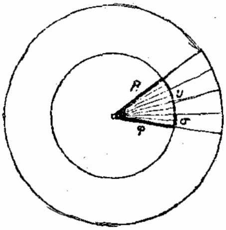
$$\widehat{(h,k)} = \widehat{(h,k')} + \widehat{(k',k)}$$



ش ۲۰

برای اندازه‌گیری زاویه بایستی زاویه‌ای را بعنوان واحد انتخاب کرد. بعلاوه همهٔ زوایائی راکه مخالف صفرند با اندازهٔ مثبت درنظرمی‌گیریم دراینصورت زوایای مساوی دارای اندازه‌های مساوی خواهند بود. اندازهٔ مجموع دوزاویه، مساوی مجموع اندازه‌های آنها خواهد بود. اندازهٔزاویه‌ای که بعنوان واحد انتخاب کرده‌ایم مساوی ۱ و اندازهٔ زاویهٔ صفر مساوی صفر خواهدبود.

دایرهٔ دلخواهی بشعاع R وبمرکز رأس زاویهٔ مفروض φ درنظرمیگیریم قسمت داخلی زاویهٔ φ ازمحیط دایره، قوس υ را جدا می‌کند (شکل ۲۱)، گویند زاویهٔ مفروض φ متکی براین قوس است (زاویهٔ مرکزی روبروی باین قوس است). σ را روی قوسی‌در نظرمیگیریم که روبروی زاویهٔ مرکزی‌بااندازهٔ واحدقرار گرفته‌باشد. نسبت $\frac{\upsilon}{\sigma}$ (طول قوس υ برطول قوس σ) به‌اندازهٔ R شعاع دایره بستگی



ش۲۱

ندارد، زیرا با تغییر R متشابه باخودش تغییر می‌کند ونسبت اجزاء متناظر آن ثابت میماند. اگر σ را واحداندازه گیری قوس دایرهٔ مفروض‌درنظر بگیریم، دراینصورت اندازهٔ زاویهٔ φ واندازهٔ قوس υ (باواحد σ) هردوبایك عدد بیان‌می‌شوند. بنابراین‌میتوان برای‌قوسهای‌دایره‌وزوایای‌مرکزی‌مقابل به آنها واحد مناسبی اختیارکرد، باین ترتیب که قوس مقابل به‌زاویه با اندازهٔ واحد را بعنوان واحد قوسها انتخاب نمود.

درمحاسبات‌عملی، معمولا $\frac{1}{360}$ زاویهٔ‌کامل را بعنوان واحدزاویه‌درنظر می‌گیرند وهمانطورکه میدانیم آنرا درجه‌می‌نامند. بسیاری مواقع‌هم‌درهندسهٔ مقدماتی‌اندازهٔزوایا را برحسب d بیان می‌کنند، که‌دراینصورت بمعنای‌آنست که زاویهٔ قائمه را بعنوان واحد انتخاب‌کرده‌اند. درآنالیز ریاضی وبسیاری

ازموارددیگر برای اندازه گیری زوایا (ویا قوسها) ازواحد رادیان استفاده می کنند.

مفهوم اساسی رادیان را درزیرشرح میدهیم:

ازشکل ۲۱ روشن است که درمورد یك زاویـهٔمرکـزی، نسبت قـوس روبروی‌آن به شعاع دایره ، تغییر نمی‌کند (زیرا در اشکال متشابه نسبتهای خطی ثابت‌اند).

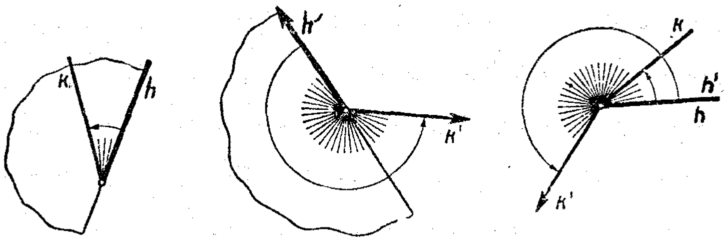
دراینصورت **اندازهٔ یك زاویه برحسب رادیان (ومتناظر باآن اندازهٔ یك قوس برحسب رادیان) عبارتست از نسبت طول قوس‌روبروی‌باین زاویه برحسب شعاع این قوس .**

دراندازه گیری برحسب رادیان، زاویه‌ای (مرکزی) را بعنوان واحد انتخاب می‌کنندکه طول‌کمان روبروی به‌آن مساوی با طول شعاع‌دایره‌باشد این زاویه را زاویهٔ یك رادیان وقوس‌روبروی بآن را قوس یك‌رادیان گویند. وقتی‌که زاویه یا قوسی برحسب رادیان باشد واحـدآنرا ذکر نمی‌کنند. در این‌کتاب همه جا ما واحد رادیان را بکارخواهیم برد.

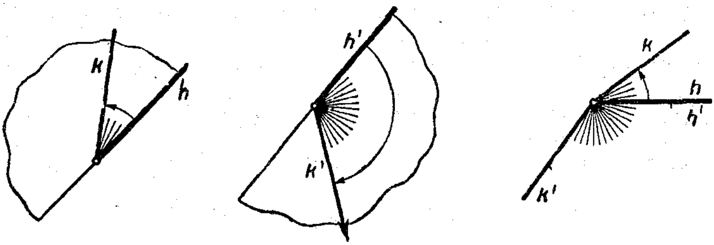
زوایا وقوسهارا می‌توان‌جهت داردرنظر گرفت (درموارد قبل، مازوایا وقوسهارا مثل‌مقادیر وبدون‌جهت‌درنظرمی گرفتیم). اگرزاویه‌ای‌مخالف صفر و باضلاع h و k درنظربگیریم ، برای اینکه جهت داشته باشد ، برای h و k ترتیبی قائل میشویم، ضلع اول (که اول هم نوشته میشود) **مبداء** و ضلع دوم (که بعدازضلع اول نوشته میشود) **انتهای** زاویهٔ مفروض نامیده میشود. زاویهٔ جهت‌دار را میتوان مثل «مسیری» فرض‌کردکه نیم‌خط توجیه شده‌ای دوریك نقطه(رأس زاویه) درجهت معینی‌طی کرده‌است.ضلع مبداء وضلع‌انتهای زاویه وضع‌این نیم‌خط درشروع وپایان حرکت است. برای اینکه جهت زاویه مشخص شود، قوس جهت‌داری (باعلامت سهم) از ضلع مبداء بضلع انتها رسم می کنند.

فرض‌کنید $(\widehat{h\,,\,k})$ و $(\widehat{h'\,,\,k'})$ دوزاویهٔ‌جهت داررو‌ی صفحه‌باشند،

بکمك حرکت نوع اول (بدون تاکردن صفحه) میتوان دوضلع مبداء آنهارا برهم‌قرارداد، دراینصورت ممکن‌است دونیم‌صفحه‌ای که بوسیلهٔ امتداد h و h´ بوجود میآیند و ضلعهای مبداء برای ساختن زاویه قبل از همه از آن عبور می‌کنند،منطبق برهم (شکل ۲۲–a) ویا جدازهم (شکل ۲۲–b) باشند. در حالـت اول دوزاویهٔ $\widehat{(h,k)}$ و $\widehat{(h',k')}$ را **هـم‌جهت** و در حالـت دوم **مختلف‌الجهت** گویند.[1]



ش ۲۲–a



ش ۲۲–b

اگر درصفحه یکی اززوایای جهت‌دار را مثبت فرض‌کنیم، گویندکـه

---

۱) بـاین‌ترتیب دوزاویهٔ هم‌جهت ومختلف‌الجهت از هـم تشخیص داده می‌شود وقتی‌کـه بدانیم باچه نوع حرکتی (نوع اول یانوع دوم) میتوان ضلعهای مبداء ونیم‌صفحه‌هائی راکـه‌نسبت باین خطها درداخل زوایاقراردارند برهم منطبق نمود. درهندسهٔ‌مقدمـاتی انطباق دوشکل‌همنهشت (Congruent) را واضح می‌شمارند، خواه بـاحرکت درصفحه وبدون برگرداندن آن (حـرکت نوع اول) وخواه علاوه برآن برای انطباق لازم باشد صفحه بطرف دیگر برگردانده شود. برعکس دراصول‌هندسی، زوایای هم‌جهت‌ومختلف‌الجهت بوسیلهٔ نوع اول‌ونوع دوم حرکت‌ازهم‌مشخص میشود.

جهت مثبت دوران درصفحه مشخص شده است، صفحه‌ای که جهت دوران مثبت آن معین شده باشد، صفحهٔ **توجیه شده** نام دارد . هر زاویه‌ای که در جهت دوران مثبت‌صفحه باشد، زاویهٔ‌مثبت وهرزاویه‌ای که درخلاف جهت‌دوران‌مثبت صفجه باشد، زاویهٔ منفی نامیده میشود وزاویهٔ صفرهم دارای جهت نیست.

برای اندازه گیری زوایا درصفحهٔ توجیه شده، زاویهٔ مثبتی را بعنوان واحد اندازه گیری قبول‌می‌کنند. اگرزاویهٔ‌مفروض باجهت مثبت باشد،مقدار آن‌با عددمثبتی که برابر اندازهٔ آنست بیان میشود واگرزاویهٔ مفروض باجهت منفی باشد، مقدار آن باعدد منفی که برابر قرینهٔ اندازهٔ آنست بیان میشود.

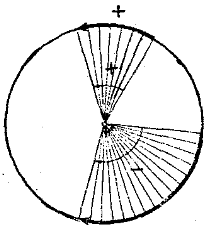
احتیاجات عملی فیزیك، مکانیك وفنون مختلف‌ایجاب می‌کند که‌مفهوم زاویه‌تعمیم‌داده شود: زاویه با مفهومی که‌تااینجا موردبحث ما بود، نمیتواند ازلحاظ قدر مطلق بزرگتراز زاویهٔ‌کامل باشد. از نظر حرکت ، زاویهٔ کامل (مثبت یا منفی) عبارتست از «مسیر» حرکت‌نیم‌خطی که روی صفحه، دورمبداء خود(درجهت مثبت‌یا منفی) یك دورکامل دوران‌کند تابروضع اولیهٔ خودقرار گیرد. پیچ، پروانهٔ هواپیما، چرخ ماشینها وغیره میتوانند درجهت مثبت و یا منفی‌بهراندازهٔ دلخواه‌دورمحور خود دوران‌کنند. باین ترتیب نتیجه میشود که هرعددحقیقی دلخواه(برحسب واحد انتخابی اندازه گیری زاویه)میتواند زاویه‌ای‌را معین‌کند. فرض‌کنیم φ عدد مثبت مفروضی باشد، اگر $\varphi \leqslant 2\pi$ باشد (واحد اندازه گیری رارادیان گرفته‌ایم)، دراینصورت عدد φ زاویه‌ای رامعین میکند واگر $\varphi > 2\pi$ باشدآنرا بصورت مجموع زیر می‌نویسم:

$$\varphi = 2k\pi + \alpha$$

که درآن $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ و k عدد مثبت‌صحیحی‌است (وروشن است که‌عدد φ راتنها بیك صورت بشکل بالا میتوان نوشت)، دراینصورت زاویه‌ای که باعدد φ معین شده عبارتست از k برابرزاویهٔ‌کامل مثبت وزاویهٔ α. بهمین ترتیب‌اگر φ عددی منفی و $|\varphi| > 2\pi$ باشد، باز می‌توان آنرا بصورت $\varphi = 2k\pi + \alpha$ نوشت که‌درآن $-2\pi < \alpha \leqslant 0$ و k عدد صحیح‌منفی است. دراینحالت زاویهٔ φ

برابراست با k برابرزاویهٔ‌کامل منفی و زاویهٔ α .

باین ترتیب میتوانیم مجموعهٔ اعداد حقیقی را با مجموعهٔ زوایای واقع برصفحه متناظرکنیم، بنحوی که هر عدد حقیقی دلخواهی متناظر با زاویه‌ای درصفحهٔ توجیه شده باشد و برعکس هرزاویه‌ای متناظر بایك‌عدد حقیقی باشد.



ش۲۳

قوسهای واقع برمحیط دایره‌را هم می‌توان بعنوان کمیتهای توجیه شده‌ای مورد مطالعه‌قرار داد: قوسی‌رامثبت(یامنفی) گوئیم‌وقتی‌زاویهٔ‌مرکزی متناظر به‌آن مثبت(یامنفی) باشد(شکل۲۳). قوسها را هم می‌توان بعنوان کمیتهای دلخواه تلقی کرد، مثلا اندازهٔ قوسی راکه با عدد $\alpha + \text{۲}k\pi$ بیان شده باشد (k عددیست صحیح و $\text{۰} \leqslant \alpha < \text{۲}\pi$) میتوان اینطورمجسم کردکه‌نخی (که‌البته بایدکش‌دارنباشد.) بطول $R(\text{۲}k\pi + \alpha)$ را دورمحیط دایره‌پیچیده باشیم واندازهٔ قوسی‌که باعدد $(\text{۲}k\pi + \alpha)$ — بیان شده است، نتیجهٔ‌پیچیدن همان نخ درجهت عکس روی محیط دایره است.

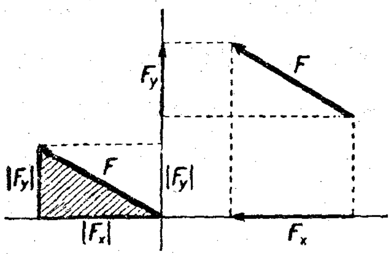
مفهوم‌کلی زاویه (یاقوس) امکان‌میدهدکه زوایا (یاقوسها) را باهم‌جمع کنیم، همیشه داریم:

$$\widehat{(h_\text{۱},h_\text{۲})} + \widehat{(h_\text{۲},h_\text{۳})} + \cdots + \widehat{(h_n,h_{n+\text{۱}})} = \widehat{(h_\text{۱},h_{n+\text{۱}})}$$

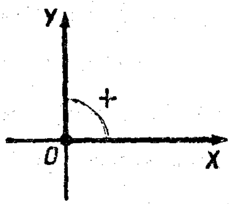
که درآن $(h_\text{۱},h_{n+\text{۱}})$ زاویه‌ای‌است بااضلاع $h_\text{۱},h_{n+\text{۱}}$ واندازه‌ای مساوی مجموع جبری مقادیر زوایائی که با هم جمع کرده‌ایم.

۳. صفحهٔ مختصات

صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که روی آن دستگاه مختصات قائم xoy (شکل ۲۴) داده شده باشد، چنین صفحه‌ای را صفحهٔ مختصات گویند. روشن است که هر دوعدد حقیقی $(a،b)$ متناظر با نقطه‌ای ازصفحهٔ مختصات است که a طول و b عرض آنست. صفحهٔ مختصات یك صفحهٔ توجیه شده است و در آن زاویهٔ قائمه xoy زاویه‌ای مثبت است که ضلع مبداء آن بر نیم محورمثبت طول و ضلع انتهای آن بر نیم محور مثبت عرض منطبق است.



ش ۲۵



ش ۲۴

F را برداری درصفحهٔ مختصات درنظرمی‌گیریم(شکل ۲۵)، F_x و F_y را تصاویر این بردار بر محورهای ox و oy فرض می‌کنیم، در اینصورت طول بردار مفروض را میتوان بکمك رابطهٔ زیرمحاسبه کرد:

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (۱)$$

درحقیقت‌میتوان بردار F را بنحوی انتقال‌داد که مبداء آن بر مبداء مختصات منطبق شود، دراینصورت $|F_x|$ و $|F_y|$ اضلاع مجاور بزاویهٔ قائمهٔ مثلثی میشوند که $|F|$ وتر آنست وازآنجا صحت رابطهٔ(۱) روشن میشود. درحالتهای خاص یعنی وقتی که بردار F پس ازانتقال بر محور طول (وقتی که $F_x = ۰$ باشد)

و یا محور عرض (وقتی که $F_y = ۰$ باشد) منطبق شود ، مثلث تبدیـل بیك پاره‌خط میشود وبازهم صحت رابطهٔ (۱) مسلم است.

اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ را دونقطهٔ دلخواه فرض کنیم و نقاط A_x ، B_x تصاویر این دو نقطه برمحور طول باشد ، داریم:

$$\text{تصویر AB برمحور طول} = OB_x - OA_x = x_۲ - x_۱$$

وشبیه آن:

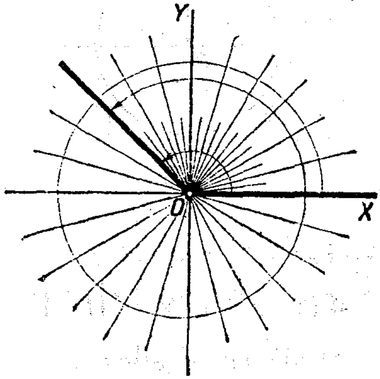
$$\text{تصویر AB برمحور عرض} = y_۲ - y_۱$$

فاصلهٔ d بین دونقطهٔ A و B همان بردار AB خواهدبود:

$$d = |AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

ونقاط A و B درهروضع دلخواهی ازصفحهٔ مختصات باشند، رابطـهٔ اخیرصحیح است.

نیم محور مثبت ox را مبداء زوایا درنظر میگیریم ، یعنی مجموعهٔ زوایای توجیه شده‌ای را درنظر می‌گیریم که نیم‌خط ox، ضلع مبداء همهٔ آنها باشد(شکل ۲۶). دراینصورت‌هرعدد حقیقی φ معرف‌ضلع‌انتهائی‌زاویه‌ای است که‌کاملا مشخص است و بـوسیلهٔ این عدد اندازه‌گرفته می‌شود.ولی این‌تناظر،متقابل نیست‌زیراهرزاویه رامیتوان باتقریب چندزاویـهٔ کامل یعنی $۲k\pi$ (k عددیست صحیح)معین کردودوزاویه‌ای که‌اختلافشان برابر



ش ۲۶

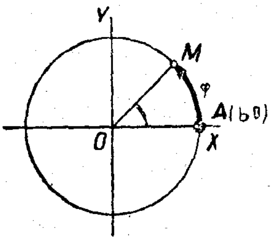
$۲k\pi$ باشد، دارای یك ضلع انتهائی هستند و برعکس دوزاویه‌ای کـه دارای ضلع انتهائی منطبق برهم باشند اختلافی باندازهٔ $۲k\pi$ خواهند داشت .

دایره‌ای درنظر میگیریم که مرکز آن مبداء مختصات و شعاع آن برابر واحد باشد . روی محیط این دایره نقطهٔ $A(۱،۰)$ را بعنوان مبداء قوسها

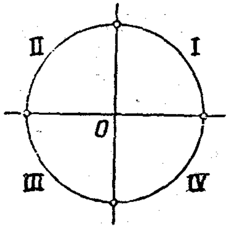
و جهت مثبت را متناظر با صفحهٔ توجیه شدهٔ مختصات انتخاب می کنیم . φ را عددحقیقی درنظر بگیرید، از نقطهٔ **A** (در جهت مثبت و یا در جهت منفی) قوسی جدا می‌کنیم که اندازهٔ آن مساوی φ باشد، طول این قوس مساوی φ خواهد بود. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر با این قوس هم (برحسب رادیان) همان عدد φ خواهد بود . نقطهٔ **M** ، انتهای این قوس ، معرف عدد φ روی دایرهٔ بشعاع واحد است (شکل ۲۷) . دایرهٔ توجیه شدهٔ بشعاع واحد را ، که معرف اعداد حقیقی است ، **دایرهٔ واحد یا دایرهٔ مثلثاتی** هم می گویند . دوعدد حقیقی‌متمایز φ_1 و φ_2 وقتی تنها یك نقطه از دایرهٔ مثلثاتی را مشخص می‌کنند که داشته باشیم :

$$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad \text{و یا} \quad \varphi_2=\varphi_1+2k\pi$$

که در آن k عددی است صحیح .



ش ۲۷



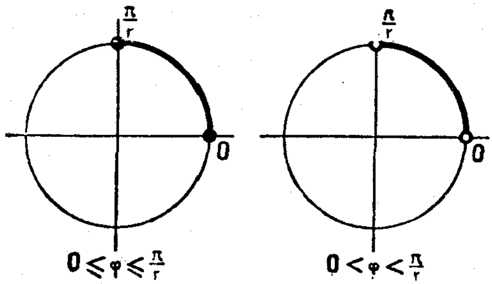
ش ۲۸

محورهای مختصات دایرهٔ مثلثاتی‌را به‌چهارقسمت تقسیم می‌کنند : I ، II ، III و IV (شکل ۲۸) که آنها را چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی گویند .

درحالتی که خود نقاط تلاقی محورهای مختصات را با دایرهٔ مثلثاتی متعلق باین چهارقسمت بدانیم ، ربعهای دایره را **بسته** و در حالت عکس ربعهای دایره را **باز** گوئیم . مثلا اگر ربع اول دایرهٔ مثلثاتی را در نظر بگیریم ، قطعه قوس $\frac{\pi}{2}\geqslant\varphi\geqslant 0$ واقع بردایرهٔ مثلثاتی حالت بستهٔ ربع اول و $\frac{\pi}{2}>\varphi>0$ حالت بازربع اول را معین می کند (شکل ۲۹) قطعه قوس

$\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$ حالت بستهٔ ربع دوم و $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ حالت بازاین ربع را مشخص

می‌کند وغیره . تمام فواصل عددی $2k\pi<\varphi<(2k+\frac{1}{2})\pi$ (k عددیاست



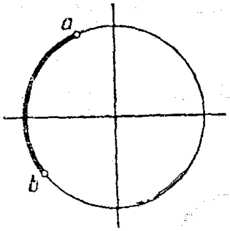
ش ۲۹

دلخواه و صحیح) روی دایـرهٔ مثلثاتی (دایرهٔ واحـد) معرف ربــع اول

(حالت باز) و فواصل $(2k+\frac{1}{2})\pi<\varphi<(2k+1)\pi$ معرف ربع دوم

وغیره هستند . ربعهای اول ودوم رویهمرفته یك نیم دایره میشوند که نیمدایرهٔ فوقانی نامیده میشود . فاصلهٔ عددی $0<\varphi<\pi$ (قطعهٔ $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) متناظر با نیمدایرهٔ فوقانی درحالت باز (درحالت بسته) است که دوانتهای قوس‌ضمن آن بحساب نیامده است (بحساب آمده است) . ربعهای سوم و چهارم رویهمرفته نیمدایرهٔ تحتانی‌را درست می‌کنند ، این نیمدایره ، درحالت باز متناظراست با $\pi<\varphi<2\pi$. بهمین‌ترتیب میتوان نیمدایره‌های راست و چپ را مشخص کرد : نیمدایرهٔ راست متناظر با فاصله $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ونیمدایرهٔ‌چپ‌متناظر

بـا فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ میباشد (بـرای نیمدایره‌هـای بستهٔ راست وچپ بایستی دوانتهای قوسهارا هم‌بحساب‌آورد). اگر a و b را دو عدد حقیقی فرض کنیم که درشرط $0\leqslant a<b\leqslant 2\pi$ صدق‌کنند، فاصلهٔ عددی که (باز یا بسته) باین دوعدد محدود باشد (حد پائین آن عدد a وحد بالای آن عدد b) روی دایرهٔ



ش ۳۰

مثلثاتی قوسی‌را مشخص خواهد کرد که دو انتهای آن نمایندهٔ اعداد a و b است (شکل ۳۰) . همین قوس را میتوان بوسیلهٔ اعدادی که محدود به $a+2k\pi$ و $b+2k\pi$ هستند (k عددی است صحیح ودلخواه) معین کرد. میتوان روش تعیین اعداد حقیقی‌را بوسیلهٔ نقاط واقع برمحیط دایره بانقاط واقع بریك خط راست باین ترتیب متناظر کرد : نخ نازکی که کش‌دار نباشد بعنوان محور اختیار می‌کنیم و سپس مبداء آنرا برنقطهٔ A(۰و۱) از دایرهٔ مثلثاتی قرار میدهیم و نخ را دور دایره می‌پیچم ، دراینصورت نقاط متناظر خط راست و دایره برهم منطبق خواهند شد .

۴. توابع یکنوا (Monotone)

ما در اینجا دربارهٔ مفهوم تابع بحث نخواهیم کرد و فرض را براین میگیریم که هم مفهوم تابع و هم مفاهیم اساسی مربوط بآن : فاصلهٔ معین بودن تابع ، محدود یا نامحدود بودن تابع ، اتصال و انفصال تابع و غیره ، برای خواننده روشن باشد . ولی از آنجا که توابع یکنوا در مثلثات نقش اساسی دارند بشرح آن میپردازیم :

میدانیم تابع $f(x)$ را درفاصلهٔ مفروض صعودی (یانزولی) گویند وقتی که اگر دومقدار دلخواه متغیر را دراین فاصله انتخاب کنیم ، مقدار بزرگتر متناظر با مقدار بزرگتر (یاکوچکتر) تابع باشد. یعنی برای تابع‌صعودی:

اگر $x_1>x_2$ باشد $f(x_1)>f(x_2)$ خواهد بود .

و برای تابع نزولی :

اگر $x_1<x_2$ باشد $f(x_1)>f(x_2)$ خواهد بود .

اگر یك تابع در فاصله‌ای صعودی یـا نزولی باشد ،گویند در این فاصله یکنوا است .

برای مطالعهٔ توابع حقیقی‌تنها به‌بررسی توابع یك ارزشی میپردازیم ، یعنی توابعی که درآنها هرمقدار متغیر تنها متناظر با یك مقدار تابع باشد .☆

گوئیم که‌تابع $f(x)$ در قطعهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ از m تا M صعودی (یانزولی) است اگر :

۱) تابع $f(x)$ در قطعهٔ $[a \text{ و } b]$ صعودی (یانزولی) باشد .

۲) در دو انتهای aوb مقداری مساوی (متناظر) با m و M داشته باشد :

$$f(a)=m \quad ; \quad f(b)=M.$$

۳) هرمقدار c واقع در فاصلهٔ m و M :

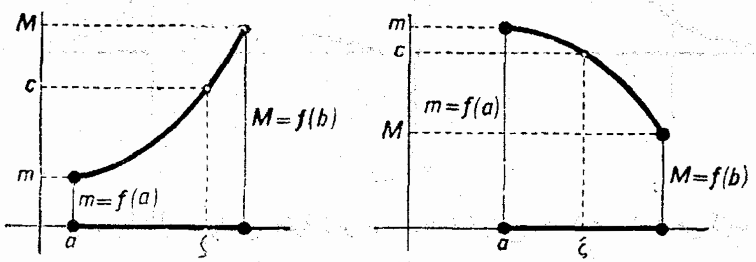
$$m<c<M \quad (\text{برای تابع صعودی})$$

و

$$m>c>M \quad (\text{برای تابع نزولی})$$

از تابـع $f(x)$ بـازاء مقـداری از متغیر $(x=\xi)$ در قطعهٔ $[a \text{ و } b]$ بدست آید :

$f(\xi)=c$ که درآن $a<\xi<b$ میباشد (شکل۳۱) .



ش ۳۱

که با توجه به یکنوا بودن تابع ، این مقدار (ξ) منحصر بفرد است .

در آنالیز ریاضی روشن میشود که اگر تابع $f(x)$ در قطعهٔ $[a \text{ و } b]$

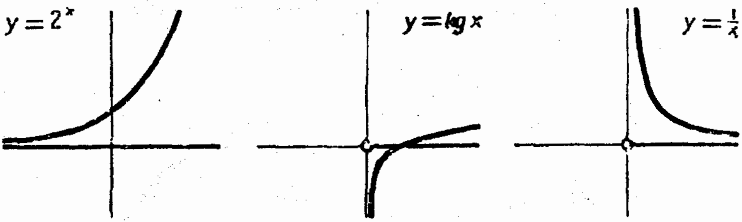
☆) مفهوم توابع چندارزشی را هم بعداً وقتی‌که صحبت از توابع مقدماتی با متغیرهای مختلط برود ، بررسی خواهیم‌کرد.

صعودی (یا نزولی) ومتصل باشد. دراین فاصله از $f(a)$ تا $f(b)$ ترقی (یا تنزل) خواهد کرد. برای توابع یکنوا عکس این مطلب هم صحیح است: اگر تابع $f(x)$ در قطعهٔ $[a$ و $b]$ از $f(a)$ تا $f(b)$ ترقی (یا تنزل) کند، در این قطعهٔ متصل هم خواهد بود.

بهمین ترتیب مفهوم تابع صعودی (یا نزولی) از m تا M درفاصلهٔ $(a$ و $b)$ نیز معین میشود؛ در این حالت شرط (۲) بصورت زیر در میآید:

$$(۲)' \qquad \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=m \quad \text{و} \quad \underset{x\to b}{\text{حد}}\, f(x)=M$$

باید توجه داشت که فاصلهٔ $(a$ و $b)$ میتواند محدود و یا نامحدود باشد، همچنین m و M میتوانند اعدادی حقیقی ویا مقادیر نامحدود $\pm\infty$ باشند. مثلا تابع ۲^x در فاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ از صفر تا $+\infty$ ترقی میکند، تابع $\log x$ درفاصلهٔ $(۰$ و $+\infty)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند وبالاخره تابع $\frac{۱}{x}$ در فاصلهٔ (۰ و ۱) از $+\infty$ تا ۱ تنزل میکند (شکل ۳۲).



ش ۳۲

در آنالیز ریاضی قضیهٔ زیر را دربارهٔ توابع معکوس ثابت می‌کنند:

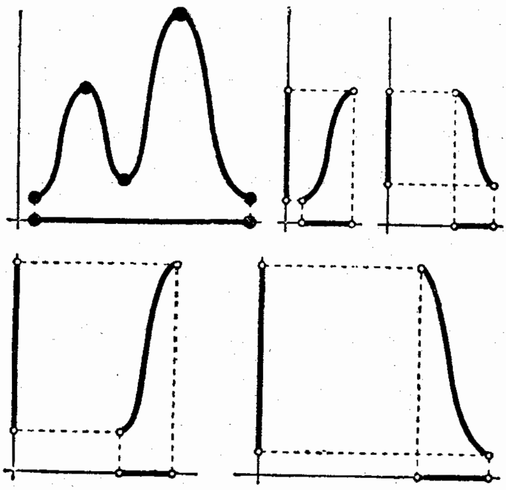
قضیه. یا هر تابع صعودی (یا نزولی) تابع معکوسی دارد وضمناً این تابع معکوس هم صعودی (یا نزولی) است.

اگر تابع $f(x)$ در قطعهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ از m تا M ترقی کند (یا تنزل کند)، تابع معکوس آن در قطعهٔ $m\leqslant y\leqslant M$ (یا در قطعهٔ $M\leqslant y\leqslant m$) از a تا b ترقی (یا تنزل) میکند.

تابع غیر یکنوا ممکن است تابع معکوس نداشته باشد، زیرا هرمقدار

تابع میتواند بازاء چند مقدار (همچنین میتواند بی‌نهایت مقدار) متغیر بدست آید ، بنابراین هرمقدار تابع y را نمیتوان متناظر با مقدار منحصر بفردی از مقدار x کردکه، بازاء آن $y=f(x)$ باشد .

فرض‌می‌کنیم بتوان‌تابع $y=f(x)$ را درحوزه‌ای که معین‌است به‌فواصل یکنوا تقسیم کرد، یعنی‌درهریك ازاین فواصل‌تابع یاترقی‌کند ویا تنزل‌نماید. دراین حالت خاص میتوان درهریك از این فواصل (که درآنجا تابع $f(x)$ یکنواست) تابع معکوس را بدست آورد (شکل ۳۳) .



ش ۳۳

مثلا برای تابع $y=x^2$ درفاصلهٔ $-\infty<x<+\infty$ نمیتوان به‌تابع معکوس رسید ، زیرا هرمقدار مثبت y بازاء دو مقدار متمایز $x=\pm\sqrt{y}$ بدست میآید . فاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$) را میتوان به دوفاصله تقسیم کـرد : $-\infty<x\leqslant 0$ و $0\leqslant x<+\infty$ ؛ در حالت اول تابع $y=x^2$ نزولی است و تابع معکوسی بصورت : $x=-\sqrt{y}$ ،

دارد و در حالت دوم تابع $y=x^2$ صعودی است وتابع معکوس آن بصورت زیر است : $x=\sqrt{y}$

۵. توابع متناوب

تعریف . تابع $f(x)$را متناوب گویند، وقتی که عدد مثبتی‌مثل l وجود داشته باشد ، بنحوی که بازاء هرمقدار x ، مقدار تابع $f(x)$ در نقاط x ، $x+l$ و $x-l$ مساوی باشد : $f(x)=f(x+l)=f(x-l)$

از این تعریف نتیجه میشود که اگر x در فاصله‌ای که تابع معین است واقع باشد ، نقاط $x \pm l$ هم در فواصل معینی از تابع واقع خواهند بود . بهمین ترتیب نقاط $x \pm 2l$ و $x \pm 3l$ و بطورکلی $x+kl$ (k عددی است صحیح و دلخواه) همراه با نقطهٔ x در فواصل معین تابع $f(x)$ قرارخواهند داشت و تساوی زیر را خواهیم داشت : $f(x+kl)=f(x)$

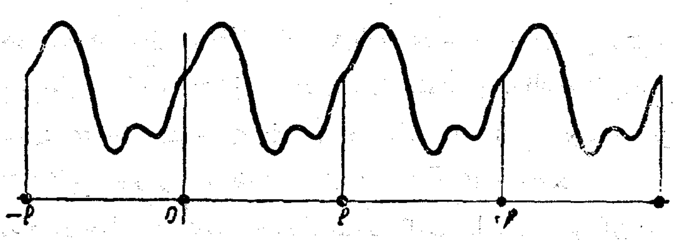
در حقیقت :

$$f(x)=f(x \pm l)=f((x \pm l) \pm l)=f(x \pm 2l)=\dots=f(x+kl)$$

فواصل زیر راکه از دو طرف توالی یکدیگر قرارگرفته‌اند در نظر میگیریم :

... و $[2l, 3l]$; $[l, 2l]$; $[0, l]$; $[-l, 0]$ ، ...

که هریك ازآنها را (بجز $[0, l]$) میتوان از انتقال فاصلهٔ $[0, l]$ درامتداد محور طول بدست آورد . منحنی تابع $y=f(x)$ در هریك از این فواصل



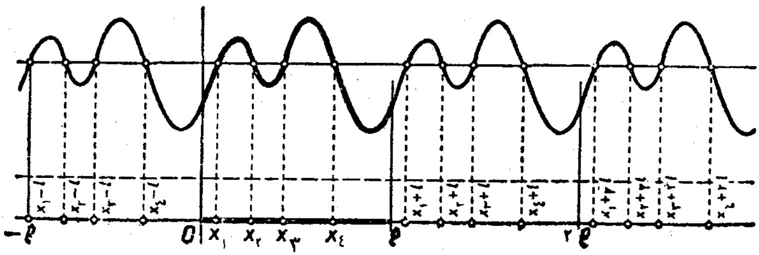
ش ۳۴

شبیه دیگری خواهد بود، باین مفهوم میتوان گفت که منحنی نمایش تابع متناوب، منحنی است که بی‌نهایت مرتبه «تکرار» میشود (شکل ۳۴).

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب l و m عددی حقیقی باشد، برای پیدا کردن مجموعهٔ مقادیر متغیر که بازاء آنها تابع مساوی m باشد و یا بعبارت دیگر برای حل معادلهٔ :

$$f(x)=m \quad (۱)$$

کافی است مجموعهٔ $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... از مجهول x را که در فاصلهٔ $۰\leqslant x<l$ واقع‌اند پیدا کنیم . دراینصورت مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) با اضافه کردن یك یا چند دورهٔ تناوب به‌جوابهای واقع درفاصله $۰\leqslant x<l$ بدست میآیند (شکل ۳۵) .



ش ۳۵

$$x_۱+k_۱l \ ; \ x_۲+k_۲l \ ; \ x_۳+k_۳l \ ; \ \dots$$

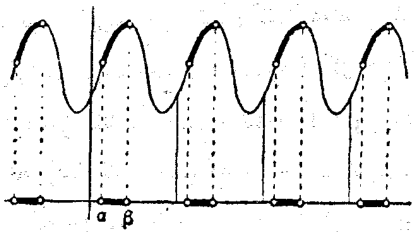
باین‌ترتیب یا معادلهٔ (۱) جواب ندارد و یا دارای بی‌نهایت جواب است.

اگر تابع متناوب با دورهٔ تناوب l درفاصله‌ای مثل $[\alpha و \beta]$ که در شرط $۰\leqslant\alpha<\beta\leqslant l$ صدق می‌کنند دارای خواصی باشد (و مثلا یکنوا ، متصل و محدود باشد) ، همین خواص را در هریك از فواصل زیر هم خواهد داشت (شکل ۳۶) :

$$\dots (\alpha-l \text{ و } \beta-l) \text{ و } (\alpha+l \text{ و } \beta+l) ، \dots ، (\alpha+kl ، \beta+kl) ، \dots$$

متذکر میشویم که برای مطالعهٔ خواص یك تابع متناوب میتوان بجای فاصلهٔ $[۰ و l]$ هرفاصلهٔ دلخواهی مثل $[a و a+l]$ را انتخاب کرد .

اگر عدد l دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ باشد ، هریك از اعداد $۲l$ ، $۳l$ ،



ش ۳۶

... و nl هم دورهٔ تناوب آن خواهند بود . معمولا کوچکترین عدد مثبت را بین اعداد دورهٔ تناوب بطور خلاصه دورهٔ تناوب تابع گویند .

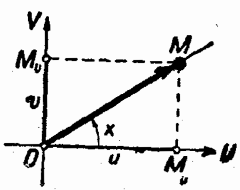
۱

نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی

٦. تابع مثلثاتی زاویه

دراین فصل نظریهٔ توابع مثلثاتی‌را براساس‌هندسهٔ اقلیدسی مورد مطالعه قرار میدهیم . باین ترتیب که خواص توابع مثلثاتی را براساس تعاریف و قضایای هندسهٔ اقلیدسی بنا می‌نهیم .

x را زاویه‌ای فرض می‌کنیم که در یك صفحهٔ توجیه شده واقع باشد . دستگاه محورهای‌مختصات uov راچنان‌انتخاب‌می‌کنیم که رأس‌زاویهٔ x بر‌مبداء مختصات‌وضلع‌مبداء x بر نیم‌محورمثبت طول (ou) قرار گرفته‌باشد. معمولادر موقع‌رسم، ضلع‌مبداء زاویهٔ x را افقی‌میگیرند (که البته الزامی‌نیست) وبهمین مناسبت‌آنرا محور افقی‌و محور عرض (ov) راکه عمودبرضلع مبداء میباشد، محور قائم مینامند (شکل ۳۷) .



ش ۳۷

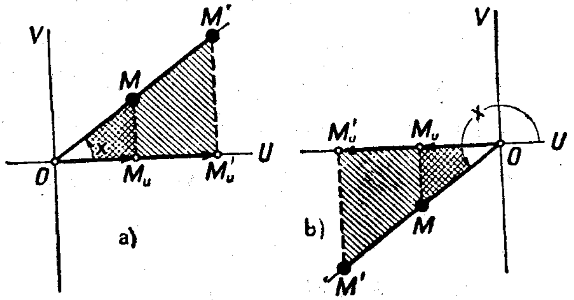
نقطهٔ دلخواه $M \neq O$ را بر ضلع انتهائی زاویهٔ x اختیار می‌کنیم . فرض کنید $u = OM_u$ و $v = OM_v$ تصاویر بردار OM برمحورهای‌طول وعرض‌باشد، آنها را بترتیب تصویر افقی و تصویر قائم مینامیم . اعداد u و v مختصات دکارتی نقطهٔ M در دستگاه محورهای مختصات هستند . طول بردار $|OM| = \rho$ و اندازهٔ زاویهٔ x عبارتند از مختصات قطبی نقطهٔ M در دستگاهی‌که قطب آن رأس و محور آن ضلع مبداء زاویهٔ x است .

قضیه. برای زاویهٔ مفروض x وقتی که $M \neq O$ نقطهٔ دلخواهی از ضلع انتهائی زاویه است ، هریك از نسبتهای :

$$\frac{u}{\rho} \;,\; \frac{v}{\rho} \;,\; \frac{v}{u} \;,\; \frac{u}{v} \qquad (۱)$$

یا مقدار ثابتی هستند و یا مقداری ندارند .

اثبات . حالت اول : ضلع انتهائی زاویهٔ x برمحور افقی و یا محور قائم واقع نباشد ، یعنی $x \neq k\frac{\pi}{2}$ باشد (k عددی است صحیح) . روی ضلع انتهائی زاویهٔ x دو نقطهٔ دلخواه $M(u و v)$ و $M'(u' و v')$ را متمایز از نقطهٔ O انتخاب می‌کنیم (شکل ۳۸ ، a و b) . اگر از نقاط M و M′



ش ۳۸

عمودهائی برمحور افقی فرود آوریم، مثلثهای قائم الزاویه ومتشابه OMM_u و $OM'M'_u$ بدست می‌آید. اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث OM_uM مقادیر مطلق مختصات M یعنی $|u|$ و $|v|$ ، و وتر این مثلث مساوی طول ρ بردار OM است ، همچنین اضلاع مجاور بزاویهٔ قائمهٔ مثلث $OM'M'_u$ برابر $|u'|$ و $|v'|$ خواهند بود . تساوی :

$$\frac{|u'|}{\rho'} = \frac{|u|}{\rho}$$

معرف تساوی نسبتهای اضلاع مجاور بزاویهٔ قائمه ، به وترها است . بردارهای OM_u و OM'_u روی محور ou هم جهت‌اند ، زیرا نیم‌خطهائی که نقطهٔ O را به‌نقاط M_u و M'_u وصل کرده است برتصویر ضلع انتهائی زاویهٔ x، روی ضلع مبداء آن، منطبق‌اند. مقادیر u و u′ هم‌علامت‌اند و اندازهٔ

جبری دو بردار OM_u و OM'_u را برمحور طول مشخص‌می‌کنند ، بنابراین نسبتهای $\frac{u}{\rho}$ و $\frac{u'}{\rho'}$ نه تنها از لحاظ قدر مطلق ، بلکه از لحاظ علامت هم معادل‌اند :

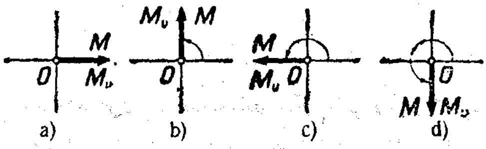
$$\frac{u'}{\rho'}=\frac{u}{\rho}$$

و باین‌ترتیب نسبت $\frac{u}{\rho}$ برابر با مقدارثابتی میشود . با روش مشابهی میتوان قضیه را در مورد سه‌نسبت دیگر هم ثابت‌کرد .

حالت دوم : ضلع انتهائی زاویهٔ x برمحور افقی و یا محور قائم قرار گرفته است ، یعنی $x=k\frac{\pi}{۲}$. در اینحالت مثلثهای OMM_u و $OM'M'_u$ تبدیل بیك پاره خط میشوند و بایستی درحالتهای خاص بطور جداگانه آنها را مورد مطالعه قرار دهیم :

a) اگر k مضربی از ۴ یعنی $k=۴n$ و $x=۲n\pi$ باشد ، برای هر نقطهٔ M (متمایز از O) خواهیم داشت (شکل ۳۹-a) :

$$M_u=M\ ;\ \ u=OM_u=OM=\rho\ ;\ \ v=۰$$



ش ۳۹

و بنابراین : $\frac{u}{\rho}=۱$ ، $\frac{v}{\rho}=۰$ ، $\frac{v}{u}=۰$ و $\frac{u}{v}$ وجود ندارد .

b) اگر $k=۴n+۱$ و $x=۲n\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد (شکل ۳۹-b)

خواهیم داشت : $M_u=O\ ;\ \ u=۰\ ;\ \ v=\rho$

وبنابراین: $\frac{u}{\rho}=۰$ ، $\frac{v}{\rho}=۱$ ، $\frac{u}{v}=۰$ و $\frac{v}{u}$ وجود ندارد .

c) اگر $k=4n+2$ و $x=(2n+1)\pi$ باشد (شکل c—۳۹)

خواهیم داشت : $u=OM_u=-\rho \; ; \; v=0$

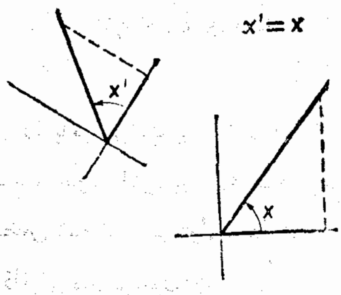
و بنابراین : $\frac{u}{\rho}=-1$ ، $\frac{v}{\rho}=0$ ، $\frac{v}{u}=0$ و $\frac{u}{v}$ وجود ندارد .

d) اگر $k=4n+3$ و $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ باشد (شکل d-۳۹)

خواهیم داشت : $M_u=O \; ; \; u=OM=0 \; ; \; v=-\rho$

و بنابراین : $\frac{u}{\rho}=0$ ، $\frac{v}{\rho}=-1$ ، $\frac{u}{v}=0$ و $\frac{v}{u}$ وجود ندارد .

باین ترتیب در تمام حالتهای زاویهٔ x ،هریك از نسبتهای (۱) یا مقدار ثابتی دارند و یا وجود ندارند، بدون اینکه بهموضع نقطهٔ M مربوط باشند.



ش ۴۰

روابط (۱) بهوضع زاویهٔ x در صفحههم مربوط نیستند. اگر $x=x'$ باشد (شکل ۴۰) ، در حالت اول مثلثهائی کهنسبتهای (۱) را میدهند، باهم متشابه میشوندو بنا براین نسبتها تغییر نمیکنند و درحالت دوم هم اثبات روشن است .

برایدوزاویهٔ مختلف ، نسبتهای (۱) درحالت کلی مقادیر مختلفیبدست خواهند داد .

تعریف . ۱) نسبت $\frac{u}{\rho}$ یعنی نسبت تصویر بردار OM (واقع برضلع انتهائی زاویهٔ x) برضلع مبداء آن بهطول بردار OM راکسینوس زاویهٔ x گویند و با علامت $\cos x$ نشان میدهند : $\cos x=\frac{u}{\rho}$

۲) نسبت $\frac{v}{\rho}$، تصویر بردار OM برمحوری که باضلع مبداء زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ میسازدبهطول بردار OM را سینوس زاویهٔ x گویند و با علامت $\sin x$ نشان

میدهند :
$$\sin x = \frac{v}{\rho}$$

۳) نسبت $\frac{v}{u}$، تصویر OM برمحور عمود برضلع مبداء به‌تصویر OM برضلع مبداء را تانژانت زاویهٔ x گویند و با علامت $tg\,x$ نشان میدهند :

$$tg\,x = \frac{v}{u}$$

۴) و بالاخره نسبت $\frac{u}{v}$ راکتانژانت زاویهٔ x نامیده و با علامت $cotg\,x$ نشان میدهند :
$$cotg\,x = \frac{u}{v}$$

مقدارعددی هریك ازنسبتهای: $sin\,x$ و $cos\,x$ و $tg\,x$ و $cotg\,x$ بامعلوم‌بودن زاویهٔ x معین میشوند و بنابراین توابعی از زاویهٔ x هستند . این توابع را **توابع مثلثاتی زوایا** گویند .

بطورخلاصه میتوان توابع مثلثاتی را باین ترتیب بیان کرد :

کسینوس یك زاویه عبارتست از نسبت تصویر افقی برداری که بوسیلهٔ نقطهٔ دلخواهی از ضلع انتهائی زاویه مشخص شده است برطول بردار .

سینوس عبارتست از نسبت تصویر قائم بردار برطول‌آن .

تانژانت عبارتست از نسبت تصویر قائم بردار برتصویر افقی‌آن .

وبالاخره کتانژانت عبارتست‌ازنسبت تصویرافقی‌بردار برتصویرقائم‌آن.

همچنین بجای تعاریف (۳) و (۴) میتوان تعاریف زیرراکه معادل آنها هستند بکار برد :

۳´) تانژانت زاویهٔ x عبارتست از نسبت سینوس زاویهٔ x برکسینوس آن :
$$tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$$

۴´) کتانژانت زاویهٔ x عبارتست از نسبت‌کسینوس زاویهٔ x برسینوس آن :
$$cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$$

در حقیقت داریم :

$$tg\,x = \frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{\rho}}{\frac{u}{\rho}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

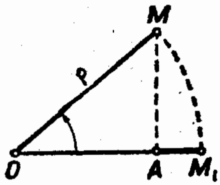
و شبیه آن :

$$cotg\,x = \frac{u}{v} = \frac{\frac{u}{\rho}}{\frac{v}{\rho}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

علاوه برنسبتهای توابع مثلثاتی که ذکر کردیم ، اغلب برای مقادیر عکس کسینوس و سینوس هم اسامی خاصی بکار میبرند : اولی را سکانت $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و دومی را کسکانت $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ مینامند .

با توجه به‌خواص توابع اصلی مثلثاتی میتوان بسادگی خواص سکانت وکسکانت را هم پیدا کرد و بنابراین احتیاجی بمطالعهٔ خاص این توابع‌وجود ندارد ، و میتوان آنها را بعنوان علائمی که برای نمایش ساده‌تر $\frac{1}{\cos x}$ و $\frac{1}{\sin x}$ بکار میروند ، درنظر گرفت .

درکتابهای درسی سابق سکانت‌وکسکانت را هم جزو توابع اصلی‌مثلثاتی بحساب میآوردند وآنهارا هم درردیف سایر توابع مورد مطالعه قرارمیدادند. علاوه براین شش تابع مثلثاتی، در بسیاری ازکتابهای قدیمی تابع هفتمی‌هم ذکر شده است : «سینوس ورنوس» که مقدارآن چنین است :



ش ۴۱

$$\sin vers\,x \frac{OM_1 - OA}{|OM|} = \frac{\rho - u}{\rho}$$

سینوس‌ورنوس برحسب کسینوس چنین‌میشود:

$$\sin vers\,x = 1 - \cos x$$

ولی بکاربردن تابع $\sin vers\,x$ متضمن هیچگونهٔ فایدهٔ خاصی نیست وحتی باشکالات‌کار هم میافزاید .

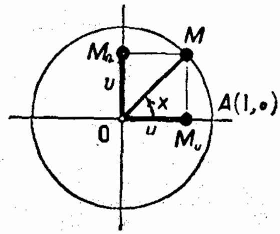
موارد استعمال همه‌جانبهٔ عملی و نظری مثلثات، ما را قانع میکند که بعنوان توابع اصلی کافی است چهار تابع ۱ تا ۴ را که دراین بند تعریف کردیم انتخاب کنیم .

مقادیر توابع مثلثاتی در جدولهائی منظم شده است که با تقریب معینی توابع مثلثاتی زوایا (که با نظم تصاعد حسابی بدنبال هم آمده‌اند) ذکر شده است .

۷. تعبیرهای مختلف توابع مثلثاتی

از اینجهت که مثلثات بطور وسیعی درآنالیز ریاضی ، هندسه ، فیزیك، مکانیك و فنون مورد استعمال دارد، لازم است که تعبیرهای مختلفی از توابع مثلثاتی داده شود . در اینجا تعبیرهای مختلف توابع مثلثاتی داده شده است:

۱. تعبیر بکمك دایرهٔ مثلثاتی : از آنجا کـه مقادیر توابع مثلثاتی مستقل از طول برداری که روی ضلع انتهائی زاویه انتخاب شده است و هم مستقل ازموضع خود زاویه برصفحه هستند، میتوان دایرهٔ مثلثاتی را مبنای کار قرارداد و بخصوص هرزاویهٔ دلخواه را میتوان مثل زاویه‌ای بین دوشعاع دایرهٔواحد است درنظر گرفت ، ضمناً نیم محور مثبت‌طول برامتداد ضلع مبداءزاویه قرار گرفته است. بعبارت دیگرضلع مبداء را شعاعی درنظرمیگیریم که نقطهٔ $O(۰و۰)$ را به نقطهٔ $A(۱و۰)$ وصل می کند. فرض کنید OM، شعاع دایرهٔ مثلثاتی، باشعاع مبداء زاویهٔ x را بسازد (شکل ۴۲) . از آنجا که $\rho = |OM| = ۱$ است ،

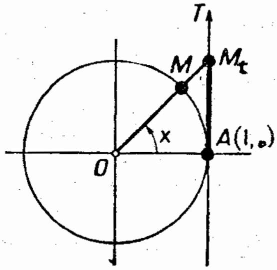


ش ۴۲

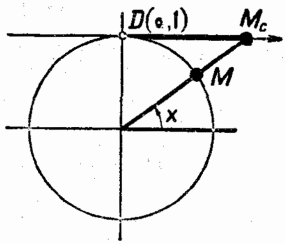
داریم : $\cos x = \frac{OM_u}{|OM|} = OM_u \quad ; \quad \sin x = OM_v = M_u M$

حالا محور AT راکه درنقطهٔ (۱و۰)A بردایرهٔ واحد مماس است درنظر می‌گیریم ، روی این محور جهت مثبت را طرفی میگیریم‌که . با محور طول زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ بسازد و نقطهٔ A را هم مبداءآن انتخاب می‌کنیم . محور AT ، محور تانژانت نامیده میشود . محور تانژانت موازی محور عرض و با آن هم جهت است (شکل ۴۳) . M_t را محل تلاقی ضلع انتهائی (یعنی امتداد بردار OM) با محور تانژانت میگیریم ، بعبارت دیگر M_t تصویر مرکزی نقطهٔ M از مبداء مختصات بر محور تانژانت است . طبق تعریف تانژانت داریم :

$$tg\, x = \frac{AM_t}{|OA|} = AM_t$$



ش ۴۳



ش ۴۴

تساوی $tg\, x = AM_t$ برای همهٔ زوایا صحیح است بجز زوایای $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (k عددی است صحیح و دلخواه) که در آنها ضلع انتهائی برضلع مبداء عمود است . برای زوایای $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ نه تانژانت و نه نقطهٔ M_t وجود ندارد .

همچنین‌کتانژانت را میتوان بعنوان پاره خط واقع بر محورکتانژانت که در نقطهٔ (۱و۰)D بردایرهٔ واحد مماس است دانست (شکل ۴۴) .

باین ترتیب داریم :

$$cos\,x = OM_u \;;\; sin\,x = M_uM \;;\; tg\,x = AM_t \;;\; cotg\,x = DM_c$$

پاره خطهای جهت‌دار OM_u ، M_uM ، AM_t و DM_c را گاهی خطوط کسینوس ، سینوس ، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ مفروض هم میگویند .

باین‌ترتیب مقادیر توابع مثلثاتی زاویه برابرمیشوند با مقادیر خطوط مثلثاتی‌متناظربا آنها. در کتابهای درسی اغلب تعبیرتوابع مثلثاتی بکمك‌دایرهٔ واحدرا بعنوان تعریف قبول می‌کنند . تعبیربوسیلهٔ خطوط دایرهٔ واحد ، درك خواص توابع مثلثاتی‌را ساده میکند ، زیرا همهٔ بحثها منجر به‌استدلال روی خواص هندسی آنها میشود .

گاهی بجای دایرهٔ واحد ، از دایرهٔ بشعاع دلخواه R که مرکزش بر مبداء مختصات منطبق باشد استفاده می‌کنند . در چنین موردی توابع مثلثاتی زاویه برابر میشوند با نسبت خطوط مثلثاتی آن به R .

همچنین در بسیاری ازکتابهای درسی ، دایرهٔ مثلثاتی را به‌محورهای مختصات وابسته نمیکـردند ، در اینحالت شعاعی از دایره را بعنوان مبداء و جهتی‌را بعنوان جهت مثبت زوایا انتخاب میکردند وضمناً قراردادی را قبول میکردندکه طبق آن خطوط مثلثاتی را علامتگذاری‌کنند ، ولـی در حقیقت همین قرارداد بمعنی قبول مقدمات دستگاه مختصات (منتهی بصورت مخفـی آن) بود .

۴. تعبیر بوسیلهٔ مختصات : این تعبیر درحقیقت بیان دیگری از تعبیر سابق‌است . اگر دایرهٔ واحد را درنظر بگیریم ، مقادیـر کسینوس و سینوس، مختصات نقاط واقع برمحیط این دایره خواهند بود :

$$u = OM_u \;;\; v = M_uM$$

و داریم :

$$cos\,x = u \;;\; sin\,x = v \;;\; tg\,x = \frac{v}{u} \;;\; cotg\,x = \frac{u}{v}$$

باین ترتیب کسینوس و سینوس زاویهٔ x بترتیب عبارتند از طول و عرض M ، انتهای شعاعی از دایرهٔ واحد که با محورطول زاویهٔ x را ساخته است .

تانژانت عبارتست از نسبت عرض به طول و کتانژانت نسبت طول به عرض نقطهٔ M . این تعبیر توابع مثلثاتی هم میتواند بعنوان اساس تعریف این توابع باشد .

نقطهٔ M_t ، که برمحور تانژانت قرار گرفته است، طولی مساوی واحد وعرضی مساوی $v = AM_t = tg\,x$ دارد. بنابراین تانژانت زاویهٔ x عبارتست از عرض نقطهٔ تلاقی امتداد شعاع OM (که با محورطول زاویهٔ x را ساخته است) با محور تانژانت .

بهمین ترتیب کتانژانت زاویهٔ x عبارتست از طول نقطهٔ تلاقی امتدادشعاع OM با محور کتانژانت .

فرض کنید $P(u, v)$ نقطهٔ دلخواهی از صفحه ، غیر از نقطهٔ O ، باشد $(P \neq O)$. همانطور که میدانیم، طول ρ بردار OP و زاویهٔ x که OP با محور طول ساخته‌است، مختصات قطبی نقطهٔ P را تشکیل میدهند . داریم :

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

و

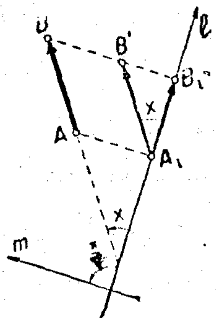
$$\cos x = \frac{u}{\rho} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \; ; \; \sin x = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

ازآنجا روابطی بدست میآیدکه مختصات دکارتی را برحسب مختصات قطبی بیان میکند :

$$u = \rho \cos x \quad ; \quad v = \rho \sin x$$

۳. تعبیر برداری : بردار AB راکه با محور l زاویهٔ x میسازد در نظر می‌گیریم ، بردار AB را برمحور l تصویرمی‌کنیم (بطوری عمودی) ، بردار A_1B_1 روی محور l بدست میآید (اگر AB عمود بر l باشد ، A_1B_1 بیك نقطه تبدیل میشود و درتصویر بردار صفربدست میآید) . میدانیم که اگر برداری بموازات خود جابجا شودتصویر آن برمحور مفروض تغییر نمی‌کند ،

بنابراین بدون اینکه A_1B_1 (تصویر AB) تغییر کند، میتوان بردار AB را بوضع A_1B' درآورد (شکل ۴۵) بطوریکه بعد از انتقال ابتدای بردار بر محور l قرار گیرد.



ش ۴۵

بنابر تعریف کسینوس داریم:

$$\cos x = \frac{A_1B_1}{|A_1B'|} \; ;$$

و چون $|A_1B'| = |AB|$ است،

بنابراین:

$$\cos x = \frac{\text{تصویر } AB \text{ بر } l}{|AB|} \qquad (۱)$$

بنابراین کسینوس زاویهٔ x برابر است با نسبت تصویر بردار، برمحور l که با آن زاویهٔ x ساخته است، به طول بردار.

سینوس زاویهٔ x برابر است با نسبت تصویر بردار، برمحور m عمود برمحور مفروض l، بهطول بردار. تانژانت و کتانژانت هم نسبت تصاویر هستند:

$$tg\,x = \frac{\text{تصویر } AB \text{ بر } m}{\text{تصویر } AB \text{ بر } l} \; ; \; cotg\,x = \frac{\text{تصویر } AB \text{ بر } l}{\text{تصویر } AB \text{ بر } m}$$

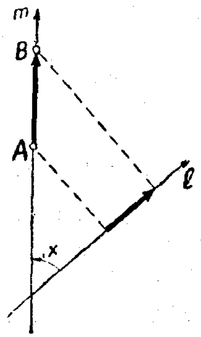
و این تعبیر توابع مثلثاتی هم میتوانند بعنوان تعریف آنها قبول شود.

ازرابطهٔ (۱) قضیهٔ اصلی مربوط بهنظریهٔ تصاویر نتیجه میشود: تصویر یك بردار بریك محور (از لحاظ مقدار) برابراست با طول بردار ضرب درکسینوس زاویهٔ بین محور وبردار مفروض:

$$\text{تصویر } AB \text{ بر } l = |AB| \cdot \cos(AB \text{و} l)$$

دو محور l و m را که با هم زاویهای مساوی x ساختهاند در نظر میگیریم

$$x = (\widehat{l \text{و} m}) \; : \; (\text{شکل ۴۶})$$



ش ۴۶

قضیه : تصویر بردار AB واقع برمحوری مانند m برمحور مفروض l ، برابر است با حاصلضرب مقدار این بردار درکسینوس زاویه‌ای که محور m با محور l ساخته است .

اثبات : اگر جهت بردار AB برجهت محور m قرار گرفته باشد ، مقدارآن برابر است با عددمثبتی مساوی طول آن . $AB=\rho$ و بردار AB با محور l زاویهٔ x را ساخته است و بنابراین :

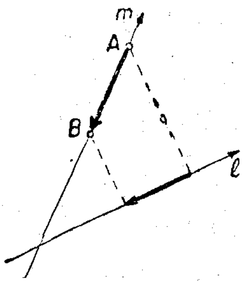
$$\text{تصویر } AB \text{ بر } l = \rho \cdot \cos x = |AB| \cdot \cos x = AB \cdot \cos x$$

اگر جهت بردار AB برخلاف جهت محور m باشد ، در اینصورت مقدار AB مساوی عدد منفی میشود : $AB = -|AB| = -\rho$

دراینحالت جهت‌بردار BA برجهت‌محور m منطبق‌است (شکل۴۷) . تصاویر بردارهای AB و BA برمحور l از لحاظ قدر مطلق برابر وازلحاظ علامت مختلف‌اند ؛ داریم :

$$\text{تصویر } AB \text{ بر } l = -(\text{تصویر } BA \text{ بر } l) = -\rho\cos x = AB \cdot \cos x$$

باین ترتیب ، قضیه برای هر وضع دلخواه استقرار AوB برمحورm صحیح است .



ش ۴۷

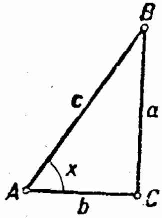
بردارABرا که‌با یکی‌ازمحورهای مختصات و مثلا محور طول زاویهٔ φ ساخته است، درنظرمیگیریم . x_1وx_2را مختصات مبداء و منتهای این بردار برهمین محور میگیریم . در این حالت تصویر برادر برمحور مفروض برابر $x_2 - x_1$ خواهد شد ، ولی از طرف دیگر همین تصویر برابر $\rho\cos\varphi$ بود و بنابراین داریم :

$$x_2 - x_1 = \rho \cdot \cos\varphi \Longrightarrow x_2 = x_1 + \rho \cdot \cos\varphi$$

و همانطورکه میدانیم در هندسهٔ تحلیلی اغلب از این رابطه استفاده می کنند .

تعبیر برداری توابع مثلثاتی بطور وسیعی در مکانیك : فیزیك و فنون مختلف و برای مطالعهٔ مقادیر مختلف برداری : سرعت ، نیرو ، شتاب وغیره مورد استفاده قرار میگیرد .

۴. تعبیر توابع زاویهٔ حاده : دربسیاری ازمسائل هندسی وغیرآن تنها توابع مثلثاتی زوایای حاده بکار میرود ، زیرا اغلب اجزاء اشکال هندسی را میتوان همچون اجزاء یك مثلث قائم‌الزاویه مورد مطالعه قرارداد .



ش ۴۸

فرض کنیم مثلث $\mathbf{ABC}$ قائم‌الزاویه‌و یکی از زوایای‌حادهٔ آن(ومثلا زاویهٔ $\mathbf{A}$) مساوی‌زاویهٔ مفروض $\mathbf{x}$ باشد (شکل ۴۸) . توابع مثلثاتی یك زاویهٔ حاده مثبت‌اند و دراین مورد داریم :

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}=\cos\mathbf{x}\ ;\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}=\sin\mathbf{x}\ ;\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=tg\,\mathbf{x}\ ;\ \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=cotg\,\mathbf{x}$$

باین‌ترتیب تعریف توابع‌مثلثاتی یك‌زاویهٔ حاده را میتوان بصورت‌زیر خلاصه‌کرد :

کسینوس زاویهٔ حاده‌عبارتست ازنسبت‌ضلع مجاور باین زاویه، بروتر .

سینوس زاویهٔ حاده‌عبارتست‌ازنسبت ضلع روبروی باین زاویه، بروتر.

تانژانت زاویهٔ حاده‌عبارتست ازنسبت ضلع روبروی باین‌زاویه، برضلع مجاور بآن .

و بالاخره کتانژانت زاویهٔ حاده عبارتست از نسبت ضلع مجاور باین زاویه، برضلع روبروی بآن.

وقتی زاویهٔ دیگرحاده را درمثلث قائم‌الزاویه $(\frac{\pi}{۲}-\mathbf{x})$درنظر بگیریم، بسادگی به‌روابط زیر میرسیم :

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\mathbf{x})=\sin\mathbf{x}\ ;\ \sin(\frac{\pi}{۲}-\mathbf{x})=\cos\mathbf{x}\ ;$$

$$tg(\frac{\pi}{۲}-\mathbf{x})=cotg\,\mathbf{x}\ ;\ cotg(\frac{\pi}{۲}-\mathbf{x})=tg\,\mathbf{x}\ .$$

در این کتاب بسته باحتیاجی که خواهد بود ، از تعبیرهای مختلف توابع مثلثاتی استفاده خواهیم کرد . وجود تعبیرهای مختلف برای توابع مثلثاتی دلیل برموارد استعمال فوق‌العادهٔ آنها در ریاضیات و شئون نزدیك به آنستو برای اینکه درفراگرفتن مثلثات ودرك موارد استعمال آن توفیق حاصل کنیم بایستی بتوانیم از همهٔ تعبیرهای آن استفاده نمائیم .*

۸. آوند (Argument) در توابع مثلثاتی

روابطی که بین زوایا و مقادیر توابع مثلثاتی وجـود دارد این امکان را بوجودمیاورد که توابع مثلثاتی را بعنوان توابعی درنظر بگیریم که مقدار آوندآن برحسب **زاویه** و مقدارتابع برحسب **عدد** بیان میشود .

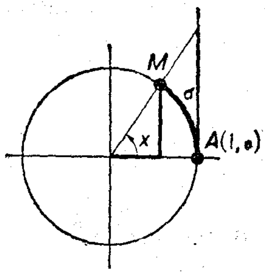
میدانیم که اندازهٔ یك‌زاویهٔ مرکزی دردایره متناسب با قوس روبرویش تغییر می‌کند وبنابراین میتوان اندازهٔ هردو را با یك عدد بیان کرد که یکی برحسب واحد زاویه و دیگری برحسب واحد قوس است .

قوسهای واقع برمحیط دایرهٔ واحدرا با انتخاب جهت درنظر میگیریم و مبداءکلی همهٔ آنها را نقطهٔ (۰،۱)A اختیار می‌کنیم . هرقوس مفروض α (برحسب واحد قوس) همان عدد زاویهٔ مرکزی α (برحسب واحد زاویه) را بیان میکند . این قوس متناظر با مقداری از تابع مثلثاتی مفروض است . (اگرزاویهٔ مرکزی را مقدارآوند این تابع‌مثلثاتی درنظربگیریم). بنابراین

*) بهمین مناسبت بنظر میرسد کـه اصولا طرح این سئوال نادرست باشدکه : کدامیك از تعبیرهای توابع مثلثاتی بردیگران ترجیح دارد . همچنین تامل در این سئوال را هـم لازم نمیدانیم‌که : « برای آشنائی مقدماتی به مثلثات ، صلاح بـا انتخاب‌کدام تعبیر است‌که بعنوان تعریف اساسی توابع مثلثاتی قبول شود» . این مطلب بایستی درجای دیگری مطالعه شود و نقطه نظرهای مختلف درزمینهٔ روشهای مثلثات مورد بحث قرارگیرد .

هرقوس σ میتواند متناظر با مقدار تابع مثلثاتی مفروضی از زاویهٔ α (زاویهٔ مرکزی روبروی به σ) باشد و باین ترتیب توابع مثلثاتی را میتوان بعنوان توابعی از قوسها درنظر گرفت .

رابطهٔ بین‌قوسها ومقادیر توابع مثلثاتی را مستقیماً و بدون واسطهٔ زوایا هم میتوان برقرارکرد ؛ برای این منظور کافی است‌قوس‌مفروض‌را به‌مبداء (۱و۰) A بردایرهٔ مثلثاتی قراردهیم‌و خطوط‌مثلثاتی نقطهٔ M (انتهای قوس مفروض) را بسازیم ومقادیر آنها را معین کنیم (شکل۴۹) .



ش ۴۹

فرض کنیم x عدد حقیقی دلخواهی باشد، عددمفروض متناظربا زاویه (یاقوس)φ است که (درسلسلهٔ انتخابی اندازه گیری زوایا و قوسها) اندازه‌ای مساوی x دارد. این‌زاویه (یاقوس) متناظر باتوابع مثلثاتی‌آنست و باین ترتیب هرعدد حقیقی x متناظر با توابع مثلثاتی زاویه‌ای خواهد بودکه اندازه‌اش مساوی این عدد است .

برای مطالعهٔ تانژانت وکتانژانت، زاویهٔ φ را (که اندازهٔ‌آن‌مساوی x است) مقدار آوند متناظر برای تابع مفروض درنظر میگیریم .

بنابراین میتوان توابع مثلثاتی را بعنوان توابعی از آوندهای عددی درنظر گرفت . منتهی این توابع مرکب‌اند و آوند واسطه برای آنها زاویه (یاقوس) است :

$$\underset{\text{عدد}}{x} \longrightarrow \underset{\text{زاویه}}{\varphi} \longrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ tg\,\varphi \\ cotg\,\varphi \end{cases}$$

اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ واحد ومعرف عدد x باشد ، کسینوس‌وسینوس عبارتند از طول وعرض نقطهٔ M و تانژانت وکتانژانت نسبت این مختصات ،

اندازهٔ قوس AM هم با تقریب 2π برابر است با $|x|$.

باین ترتیب رابطهٔ متقابلی بین اعداد بدست میآید : **هر عدد حقیقی مفروضی مثل x متناظراست با مقدار یك تابع مثلثاتی.**

برای اینکه توابع مثلثاتی مثل توابعی از آوندهای عددی مطالعه شوند ، واحد اندازه‌گیری زوایا و قوسها را رادیان درنظر میگیرند . باین ترتیب وقتی‌که میگوئیم $sin\ 2$ یعنی سینوس زاویه (یا قوسی) که اندازهٔ آن برحسب رادیان برابر ۲ است و یا $cos\ 20$ یعنی کسینوس قوسی‌که اندازهٔ آن برحسب رادیان برابر ۲۰ است و غیره .

انتخاب واحد اندازه‌گیری قوسها و زوایا مسئلهٔ اساسی نیست و **انتخاب رادیان بعنوان واحد اندازه‌گیری نمیتواند الزامی باشد** . بلکه بنظر میرسدکه رادیان راحت‌ترین واحدها باشد ، زیرا در اندازه‌گیری برحسب رادیان ، روابط آنالیز ریاضی منجر به توابع مثلثاتی میشوند و بساده‌ترین صورت ممکنه درمیآیند .

ازآنچه گفته شدنتیجه میشودکه: **آوند توابع مثلثاتی میتواند زاویه یا قوس و یا عددی‌که اندازهٔ این زاویه (یاقوس) است ، باشد** . در مسائل مختلف مثلثات و در قضایای مربوط‌بآن همهٔ این تعبیرها مورد استعمال دارد. مثلا درروابط مربوط به‌حل‌مثلث معمولا آوند توابع‌مثلثاتی‌را زاویه میگیرند ، درحالیکه دررابطهٔ حرکت نوسانی یکنواخت $s = A\,sin\,at$ ، آوند t عددی استکه نمایندهٔ زمان است (ضریب a عددی استکه بستگی به‌نوع حرکت نوسانی دارد) .

وقتی‌که توابع مثلثاتی با آوند عدد باشد ، برای سهولت کار ترجیح داده میشودکه از اصطلاحات هندسی استفاده شود . وقتی توابع مثلثاتی بنام زاویه یاقوسی نامیده میشود ، ممکن است منظور ازآوند خود زاویه یا قوس نباشد ، بلکه منظورمقدارعددی اندازهٔ آن باشد. با حفظ اصطلاحات هندسی، مثلا «سینوس‌عددx » را میتوان گفت « سینوس‌زاویهٔ x » یا «سینوس قوسx».

درنظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی یا متغیر عدد، قوانین مربوط به‌روابط

بین مقدار آوند و تابع مثلثاتی نه‌بوسیلهٔ اعمال ریاضی‌که بایستی روی آوند انجام شود ، بلکه بشکل هندسی ، برقرار میشود .

برای‌اینکه امکان گفتگو دربارهٔ تابع باشد ، بایستی قانونی وجودداشته باشدکه بوسیلهٔ آن هرمقدار قابل قبول آوند با مقدار معینی از تابع تطبیق کند ، ولی اسلوب ونحوهٔ برقراری این قانون مهم نیست . تعریف توابع مثلثاتی بنحوی‌که به‌هندسه و تعبیرهای هندسی مربوط نباشد درنظریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی (فصل ۶) توضیح داده خواهد شد . متذکرمیشویم‌که امکان بدست‌آوردن روابطی‌که مقادیر توابع مثلثاتی را تنها بوسیلهٔ اعمال جبری‌که روی آوند انجام میشود ، معین نماید ، ممکن نیست (به بند ۷۳ مراجعه شود) و بهمین‌علت است‌که ریاضیات مقدماتی اجباراً مثلثات را برپایهٔ نظریهٔ هندسی بنا می‌نهد .

توضیح : گاهی باین اظهارنظراشتباه برخورد می‌کنیم‌که‌گویا نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی از لحاظ علمی‌کاملا دقیق نیست ودر این‌مورد به‌موقعیت هندسهٔ اقلیدسی استناد می‌کنند ، ولی نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی از نظر علمی‌کامل و مدلل است ، زیرا دستگاه هندسهٔ اقلیدسی‌کامل و مدلل است .

۹. معین و نامعین بودن توابع مثلثاتی

مجموعهٔ همهٔ مقادیر قابل قبول آوند در هریك از توابع مثلثاتی ، حوزه‌ای را تشکیل میدهدکه این تابع درآنجا معین است .

قضیه : حوزه‌ای‌که توابع مثلثاتی درآنجا معین هستند بترتیب زیر مشخص میشوند :

۱) برای توابع $\sin x$ و $\cos x$ ، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی یعنی فاصلهٔ ($+\infty$ و $-\infty$) .

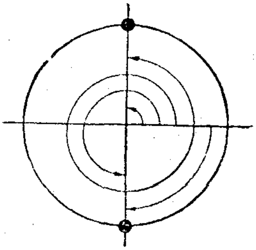
۲) برای تابع $tg\,x$ ، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باستثنای اعدادی که بصورت $k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ هستند (که در آن k عدد صحیح دلخواهی است) . یعنی مجموعهٔ بی‌نهایتی از فواصل بصورت $\left(k\pi-\frac{\pi}{۲}\right.$ و $\left.k\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$:

$$\ldots;\left(\frac{۵\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}\right);\ \left(\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right);\ \left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right);\ \left(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{۳\pi}{۲}\right);\ldots$$

۳) برای تابع $cotg\,x$، مجموعهٔ همهٔ اعدادحقیقی باستثنای اعدادبصورت $k\pi$ ، یعنی مجموعهٔ بی‌نهایتی از فواصل : $((k+۱)\pi$ و $k\pi)$.

$$\ldots,\ (۲\pi \text{ و } \pi);\ (\pi \text{ و } ۰);\ (۰ \text{ و } -\pi);\ (-\pi \text{ و } -۲\pi);\ldots$$

اثبات : ۱) توابع $cos\,x$ و $sin\,x$ عبارتند از طول و عرض نقطه‌ای از دایرهٔ واحد (کــه معرف مقدار x آوند است) و بازاء هرمقدار دلخواه x ، مقدار معینی برای این مختصات وجــود دارد . بنابراین‌مجموعهٔ مقادیر قابل‌قبول x همان مجموعهٔهمهٔ اعداد حقیقی است (همهٔ زوایا و یا قوسها) .



ش ۵۰

۲) تابع $tg\,x=\frac{v}{u}$ ، که نسبت عرض برطول نقطهٔ x از دایرهٔ واحد است، بازاء همهٔ مقادیر x، باستثنای مواردی‌که $u=۰$ است ، معین‌میباشد. نقاطی‌که برای آنها $u=۰$ است بـر محل تلاقی دایرهٔ واحد با محور عرض قــرارگرفته‌اند . این نقاط به مختصات (۱± و ۰) هستند (شکل ۵۰) ومعرف انتهای قوسهائی میباشندکه اندازهٔ آنها بصورت $۲n\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $۲n\pi-\frac{\pi}{۲}=(۲n-۱)\pi+\frac{\pi}{۲}$ میباشد . بنابـراین برای قــوسهای بصورت $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ (k عددی است صحیح و دلخواه) تانژانت وجودندارد ·

توضیح : برای اثبات(۲) کافی بودثابت کنیم که خط تانژانت را برای همهٔ زوایائی که ضلع انتهائی آنها برضلع مبداء عمود نیست میتوان ساخت و برای زوایائی که اضلاع آن برهم‌عمودند ، ساختن خط تانژانت ممکن نیست .

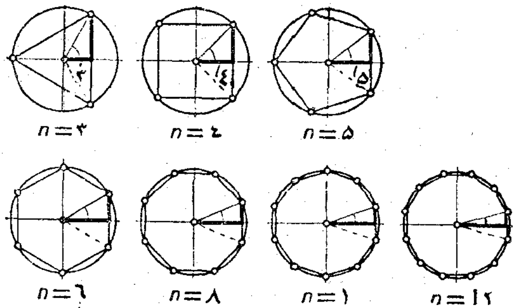
۳) اثبات (۳) کاملا شبیه (۲) میباشد .

۱۰• توابع مثلثاتی بعضی از مقادیر خاص آوند

اگر ضلع a_n از n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد معلوم باشد ، میتوان بسادگی مقدار هریك از توابع مثلثاتی زاویهٔ $\frac{\pi}{n}$ $\left(=\frac{۱۸۰^\circ}{n}\right)$ را محاسبه کرد . شعاعی که‌یك ضلع n ضلعی منتظم محاطی را نصف میکند بعنوان شعاع مبداء انتخاب می‌کنیم ، دراینصورت $\frac{a_n}{۲}$ خط سینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{n}$ و سهم n ضلعی یعنی $l_n=\sqrt{۱-\frac{a_n^۲}{٤}}$ خط کسینوس آنست (شکل ۵۱) .

و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{۲}\ ;\ \cos\frac{\pi}{n}=\sqrt{۱-\frac{a_n^۲}{٤}}$$



ش ۵۱

در هندسه ضلع بعضی از چند ضلعیهای منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آنها حساب کرده‌اند :

۱) برای $n=۳$ داریم : $a_۳=\sqrt{۳}$ و $l_۳=\frac{۱}{۲}$ (همه جا $R=۱$ حساب می‌کنیم) .

و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۳}=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ;\ \cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\ ;\ tg\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$;\ cotg\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ .$$

۲) برای $n=۴$ داریم : $a_۴=\sqrt{۲}$ و $l_۴=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{٤}=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ \cos\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ tg\frac{\pi}{٤}=۱\ ;\ cotg\frac{\pi}{٤}=۱$$

۳) برای $n=۵$ داریم :

$$a_۵=\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}\ ;\ l_۵=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$$

و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۵}=\sin ۳۶^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}\ ;\ \cos\frac{\pi}{۵}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}\ ;$$

$$tg\frac{\pi}{۵}=\frac{۲\sqrt{۵-\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+۱)}=\frac{\sqrt{۱۰}\sqrt{(\sqrt{۵}-۱)^۳}}{۴}$$

۴) برای $n=۶$ داریم : $a_۶=۱$ و $l_۶=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{٦}=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\ ;\ \cos\frac{\pi}{٦}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ;\ tg\frac{\pi}{٦}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۵) برای $n=۸$ داریم : $a_۸=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ و $l_۸=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$

و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۸}=\sin ۲۲/۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}\ ;\ \sin\frac{\pi}{۸}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\ ;$$

$$tg\frac{\pi}{۸}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲}-۱$$

۶) برای $n=۱۰$ داریم : $a_{۱۰}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ و $l_{۱۰}=\frac{۱}{٤}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$

و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۱۰}=\sin ۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{٤}\ ;\ \cos\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۱}{٤}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}\ ;$$

$$tg\frac{\pi}{۱۰}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}$$

۷) برای $n=۱۲$ داریم :

$a_{۱۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ و $l_{۱۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ و بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}=\sin ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{۲});$$

$$\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{۲})$$

$$tg\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=۲-\sqrt{۳}$$

توضیح : این مقادیر خاص توابع مثلثاتی‌را بصورت کسرهای اعشاری تقریبی ننوشتیم ، زیرا این مقادیر در جداول طبیعی خطوط مثلثاتی وجود دارد .

با کمك مقادیری که برای بعضی از توابع مثلثاتی بدست آوردیم میتوان مقادیر توابع بعضی دیگر از زوایا (زوایای متمم)را هم بدست آورد (صفحهٔ ۴۸ را به‌بینید) :

۸) چون داریم : $\frac{3\pi}{10}=54^\circ=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$، دراینصورت خواهیم داشت :

$$\cos\frac{3\pi}{10}=\cos 54^\circ=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ ;\ \sin\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

۹) چون‌داریم: $\frac{2\pi}{5}=72^\circ=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}$ ، خواهیم داشت :

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

۱۰) چون داریم : $\frac{5\pi}{12}=75^\circ=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ ، خواهیم داشت :

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

۱۱. تناوب توابع مثلثاتی

قضیه : ۱) توابع مثلثاتی : $\cos x\ ;\ \sin x\ ;\ tg\,x\ ;\ cotg\,x$

توابعی متناوب هستند که دورهٔ تناوب مشترك آنها 2π است .

۲) کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت توابع $\sin x$ و $\cos x$ برابر است با 2π .

۳) کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت‌توابع $tg\,x$و$cotg\,x$ برابر است‌با π.

اثبات : ۱) دومقدار آوند x و $x+2k\pi$ تنها یك‌نقطه را روی‌دایرهٔ واحد مشخص می‌کنند (اضلاع مبداء وانتهائی دوزاویهٔ x و $x+2k\pi$ برهم منطبق‌اند). بنابراین این نقاط دارای یك مختصات خواهند بود وبابن‌ترتیب

اگر مقدار x جزو مجموعه‌ای باشد که تابع مثلثاتی مفروض در آنجا معین است $x+۲k\pi$ هم جزو همان مجموعه خواهد بود و مقدار تابع بازاء آوندهای x و $x+۲k\pi$ برابر میشود :

$$f(x)=f(x\pm ۲\pi)=f(x\pm ۴\pi)\dots=f(x\pm ۲k\pi)$$

که در آنجا $f(x)$ نمایندهٔ تابع مثلثاتی دلخواهی است .

بنابراین عدد ۲π و همچنین هریك از اعداد $۲k\pi$ (k عددی است صحیح) دورهٔ تناوب مشترك همه توابع مثلثاتی هستند .

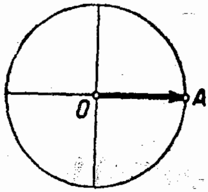
۲) ثابت می‌کنیم که ۲π کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت برای کسینوس و سینوس است. اگر l دورهٔ تناوب کسینوس باشد ، اتحاد زیررا خواهیم داشت :

$$\cos(x+l)=\cos x \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) اتحاد و بازاء هرمقدار دلخواهی از x صادق است ، اگر درآن $x=۰$ بگیریم ، خواهیم داشت : $\cos l=۱$

بنابراین تصویر بردار شعاع نقطهٔ l از دایرهٔ مثلثاتی برمحور طول از لحاظ اندازه مساوی شعاع مبداء دایره $OA=۱$ و با آن هم جهت است (شکل ۵۲) و این وقتی ممکن است که بردار شعاع نقطهٔ l بر OA منطبق باشد وبنابراین مقادیرممکنه برای l چنین‌اند :

$$l=۰\ ;\ \pm ۲\pi\ ,\ \pm ۴\pi;\ \dots$$



ش ۵۲

وروشن‌است که کوچکترین‌مقدارمثبت از بین آنها $l=۲\pi$ است که طبق اثبات(۱) دورهٔ تناوب کسینوس است . برای سینوس‌هم با روش مشابهی‌میتوان به نتیجه رسید ؛ کافی است در اتحاد : $\sin(x+l)=\sin x$

$x=\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم ، دراینصورت خواهیم داشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+l)=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

بنابراین بردارشعاع نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}+l$ بربردار شعاع نقطه $B(۰$ و $۱)$

منطبق میشود و بنابـراین :

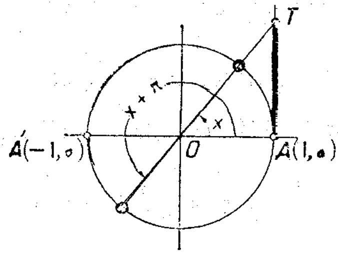
$$\frac{\pi}{۲}+l=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow l=۲k\pi$$

وکوچکترین مقدار از بین آنها $l=۲\pi$ میباشد .

۳) تساوی :

$$tg(x+l)=tgx \quad (۲)$$

بازاءهمهٔمقادیر x ومنجمله بازاء $l=\pi$ صادق است .



ش ۵۳

درحقیقت انتهای قـوسهای x و $x+\pi$ دو نقطهٔ متقاطرند (شکل۵۳)

وبنابراین قوسهای x و $x+\pi$ دارای یك خط تانژانت AT هستند ، یعنی :

$$tg(x+\pi)=tgx ،$$

یعنی $l=\pi$ دورهٔ تناوب تانژانت است. ثابت می کنیم که π کوچکترین مقدارمثبتی است که دررابطهٔ (۲) برای مقادیر دلخواه x صدق میکند . اگر دررابطهٔ (۲) فرض کنیم $x=۰$ خواهیم داشت : $tgl=۰$ یعنی بایستی پـاره خط AT بیك نقطه تبدیل شود و بنابراین نقطهٔ T بر A منطبق گردد و برای انتهای قوس l دووضع میتوان در نظر گرفت : $A(۱،۰)$ و $A'(-۱،۰)$. درنتیجه کوچکترین قوسی که برای آن $AT=۰$ باشد $l=\pi$ است .

برای کتانژانت هم میتوان با روش مشابهی استدلال کرد .

با توجه به‌تناوبی بودن توابع مثلثاتی ،کافی است که هریك از آنها را در فاصله‌ای مساوی کـوچکترین مقدار دورهٔ تناوب مثبت آن مورد مطـالعه قرار دهیم .

معمولاکـوچکترین دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی را بطـور خلاصه دورهٔ تناب آنها گویند .

۱۳. علامت توابع مثلثاتی

بسته باینکه علامت‌مختصات نقطهٔ مربوط به‌مقدار آوند روی دایرهٔواحد چگونه باشد ، مقدار تابع مثلثاتی میتواند مثبت : منفی و یا صفر باشد .

I. اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد ، نقطهٔ مربوط به‌مقدار آوند روی دایرهٔ واحد در ربع اول قرار میگیرد . در این ربع طول وعرض هرنقطه مثبت است و داریم :

$$u=\cos x>0 \;;\; v=\sin x>0 \;;\; tg\,x=\frac{v}{u}>0 \;:\; cotg\,x=\frac{u}{v}>0 \quad (I)$$

باین‌ترتیب در فاصلهٔ $0<x<\frac{\pi}{2}$ تمام توابع مثلثاتی مثبت هستندو یا بعبارت دیگرتوابع مثلثاتی زوایای حاده مثبت‌اند. که با توجه به‌متناوب‌بودن نامساویهـای (I) میتوان این فاصله را بصورت $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ تعمیم داد .

II. اگر $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ باشد ، نقطهٔ x روی دایرهٔ واحد در ربع‌دوم قرار می‌گیرد . در این ربع طول نقطه منفی و عرض‌آن مثبت است و داریم :

$$u=\cos x<0 \;;\; v=\sin x>0 \;;\; tg\,x<0 \;;\; cotg\,x<0 \qquad (II)$$

باین‌ترتیب درفاصلهٔ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ (در ربع دوم) وهمچنین‌درهرفاصلهٔ بصورت $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ و } (2k+1)\pi\right)$ نامساویهای (II) صادق‌اند .

III. اگر $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ باشد ، نقطهٔ x در ربع سوم قـرار میگیرد که درآن طول وعرض هر نقطه منفی است و داریم :

$$u=\cos x<0 \; ; \; v=\sin x<0 \; ; \; tg\, x>0 \; ; \; cotg\, x>0 \quad (III)$$

باین‌ترتیب در فاصلهٔ $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ (درربع سوم) و همچنین در هر-فاصله‌ای بصورت $\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2} \text{ و } (2k+1)\pi\right)$ نامساویهـای (III) صدق می‌کنند .

IV. اگر $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ باشد، نقطهٔ x درربع چهارم قرار میگیرد که درآن طول مثبت وعرض منفی است و بنابراین داریم :

$$u=\cos x>0 \; ; \; \sin x<0 \; ; \; tg\, x<0 \; ; \; cotg\, x<0 \qquad (IV)$$

باین‌ترتیب در فاصلهٔ $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ (در ربع چهـارم) و همچنین در هرفاصلهٔ بصورت $\left(2(k+1)\pi \text{ و } 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ نـامساویهـای (IV) صادق هستند .

بخصوص روابط (IV) درفاصلهٔ $\left(0 \text{ و } -\frac{\pi}{2}\right)$ (بازاء $k=1$) صدق میکنند و ازآنجا نتیجه میشود که نامساوی $\cos x>0$ در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2} \text{ و } -\frac{\pi}{2}\right)$ وبطورکلی درهرفاصلهٔ بصورت $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ و } 2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ درست است ، در این حالت نقطهٔ x برمحیط نیمدایرهٔ راست قرارگـرفته است (باستثنای دوانتهای آن) .

و نامساوی $\cos x<0$ درهرفاصلهٔ بصورت $\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2} \text{ و } 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

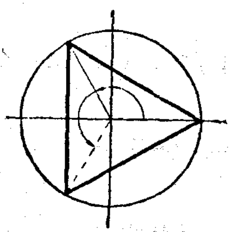
درست است و دراینصورت نقطهٔ x بر محیط نیمدایره چپ قرار گرفته است (باستثنای دوانتهای آن) .

نامساوی $\sin x > 0$ (ویا $\sin x < 0$) درفاصلهٔ $(0 , \pi)$ [یا $(\pi , 2\pi)$] همچنین هرفاصلهٔ بصورت $(2k\pi , (2k+1)\pi)$ [ویا $((2k+1)\pi , (2k+2)\pi)$] صادق است و نقطهٔ x برمحیط نیمدایرهٔ بالا (یا پائین) قرارگرفته است .

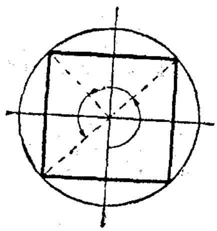
نامساوی $tg\, x > 0$ در فاصلهٔ $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ وهمچنین درهرفاصلهٔ بصورت $\left(k\pi , k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ صدق میکند و نامساوی $tg\, x < 0$ درفاصله $\left(-\frac{\pi}{2} , 0\right)$ و یا هرفاصلهٔ بصورت $\left(k\pi - \frac{\pi}{2} , k\pi\right)$.

درموردکتانژانت نامساویها و فواصل عین تانژانت است .

چندمثال . در مثالهای زیر مقادیرتوابع مثلثاتی بازاء بعضی از مقادیر خاص آوند ذکرشده است . قدرمطلق مقادیر توابع مثلثاتی بطریق هندسی (بند ۱۰ دیده شود) و علامت آنها باکمك آنچه که هم اکنون شرح دادیم معین میشود :



ش ۵۵



ش ۵۶

۱) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$;

$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ (شکل ۵۵)

$$۲)\quad \sin\frac{۳\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ \cos\frac{۳\pi}{٤}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ tg\frac{۳\pi}{٤}=-۱\ ;$$

$$\sin\frac{۵\pi}{٤}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ \cos\frac{۵\pi}{٤}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ tg\frac{۵\pi}{٤}=۱\ ;$$

$$\sin\frac{۷\pi}{٤}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ \cos\frac{۷\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ tg\frac{۷\pi}{٤}=-۱$$ (شکل ۵۶)

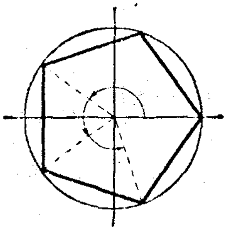
$$۳)\quad \sin\frac{۴\pi}{۵}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}\ ;\quad \cos\frac{۴\pi}{۵}=-\frac{\sqrt{۵}+۱}{٤}\ ;$$

$$\sin\frac{۶\pi}{۵}=-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}\ ;$$

$$\cos\frac{۶\pi}{۵}=-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}\ ;$$

$$\sin\frac{۸\pi}{۵}=-\frac{۱}{٤}\sqrt{۱۰+\sqrt{۵}}\ ;$$

$$\cos\frac{۸\pi}{۵}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{٤}$$ (شکل۵۷)



ش ۵۷

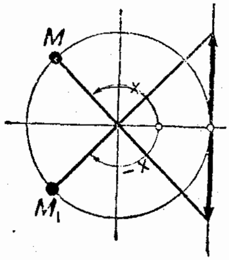
۱۳. فرد و زوج بودن توابع مثلثاتی

قضیه : تابع $\cos x$ تابعی است زوج و توابع $\sin x$، $tg x$ و $cotg x$ توابعی فرد هستند :

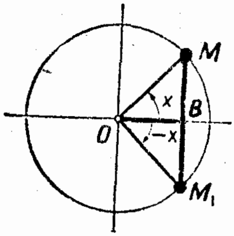
$$\cos(-x)=\cos x\ ;\ \sin(-x)=-\sin x\ ;\ tg(-x)=-tg x\ ;$$
$$cotg(-x)=-cotg x\ .$$

اثبات: نقاط M و $M_۱$ ازدایرهٔ واحد که معرف دومقدار قرینهٔ x و $-x$ از آوندند نسبت به محور ou قرینهٔ یکدیگرند (شکل۵۸)، بنا براین نقاط M و $M_۱$ دارای یك طول $OB=u$ و عرضهای قرینهٔ $BM=v$ و $BM_۱=-v$ هستند ، از آنجا :

$$u=\cos x=\cos(-x)\ ;\ \sin(-x)=-v=-\sin x\ .$$



ش ۵۹



ش ۵۸

و برای تابع $tg\,x$ داریم :

(شکل ۵۹)
$$tg(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tg\,x$$

و شبیه آن :
$$cotg(-x)=-cotg\,x$$

مثال :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=-۱\ ;\ \sin\left(-\frac{\pi}{٤}\right)=-\sin\frac{\pi}{٤}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right)=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\ ;\ tg\left(-\frac{\pi}{٦}\right)=-tg\,\frac{\pi}{٦}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۱۴. مجموعهٔ مقادیر توابع مثلثاتی

برای اینکه ثابت کنیم که تابع مثلثاتی مورد مطالعه (بازاء مقداری از آوند) میتواند مساوی مقدار عددی m شود ، کافی است ثابت کنیم که میتوان زاویه‌ای ساخت که تابع مثلثاتی آن مساوی m باشد. عدد m متعلق به مجموعهٔ مقادیر تابع مثلثاتی هست بشرطی که ساختن این زاویه ممکن باشد .

قضایای زیر شرایطی را که برای ساختن زاویه ، با دردست داشتن مقدار

تابع مثلثاتی آن ، لازم است مشخص می‌کند :

قضیه : اگر m عددی حقیقی واقع در فاصلهٔ $-1 \leqslant m \leqslant 1$ باشد ، بی‌نهایت زاویه(یاقوس)x میتوان پیدا کرد که کسینوسی‌مساوی m داشته‌باشند:

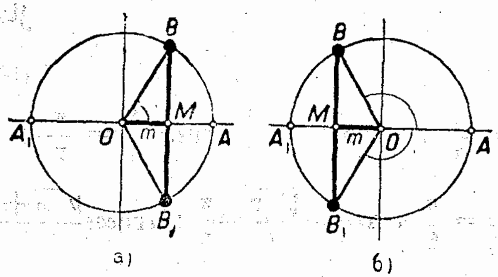
$$\cos x = m \qquad (1)$$

اگر $|m| > 1$ باشد ، زوایا ویا قوسهائی وجود ندارد که درشرط (۱) صدق کند .

وباین ترتیب مجموعهٔ همهٔ‌مقادیرتابع $\cos x$ درفاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] واقع است .

اثبات: بایستی ثابت کرد که تابع $\cos x$ میتواند مساوی مقداردلخواهی از m (که از لحاظ قدرمطلق بزرگتر از واحد نیست) باشد .

روی محور افقی از نقطهٔ O پاره‌خط OM را مساوی m (شکل ۶۰—a : $m > 0$ ؛ شکل ۶۰—b : $m < 0$) جدا می‌کنیم ، وقتی که $|m| < 1$ باشد ، نقطهٔ $M(m,0)$ درداخل دایرهٔ واحد قرارمیگیرد . اگر



ش ۶۰

از نقطهٔ M خطی موازی محورoy رسم کنیم دایرهٔ واحدرا دردونقطهٔ B و B_1 ، که نسبت به‌محور افقی قرینهٔ یکدیگرند ، قطع می‌کند . بازاء $m = 1$ نقاط B و B_1 بر $A(1,0)$ وبازاء $m = -1$ بر نقطهٔ $A_1(-1,0)$ منطبق‌میشوند.

درحالت‌کلی دوشعاع OB و OB_1 ، بعنوان ضلع انتهائی زاویهٔ مورد نظر، در دووضع هندسی‌متفاوت خواهند بودو هریك از آنها مجموعهٔ بی‌نهایت زاویه را معین می‌کنند که اختلاف هریك از آنها با دیگری تعداد صحیحی

از دورهای کامل است .

اگر $|m|>1$ باشد ، نقطهٔ M درخارج دایرهٔ واحد قرارمیگیرد و خطی که از M بموازات oy رسم‌شود ، دایرهٔ واحدرا قطع نمیکند وبنا براین قوسی وجود ندارد که کسینوس آن برابر مقدار مورد نظر باشد .

بازاء $0 \leqslant m \leqslant 1$ شعاعهای OB و OB_1 در ربعهای اول و چهارم بازاء $-1 \leqslant m \leqslant 0$ در ربعهای دوم و سوم واقع خواهند شد .

ازآنچه گفته‌شد نتیجه‌میشود که اگر $|m| \leqslant 1$ باشد، درفاصلهٔ بستهٔ $[0, \pi]$ (نیمدایرهٔ فوقانی) تنها یك قوس (یا یك‌عدد = اندازهٔ قوس) وجود دارد که کسینوس‌آن مساوی m است . این قوس را با علامت $\arc\cos m$ نشان میدهند :

$$x = \arccos m$$

و باتوجه باین تعریف میتوان نوشت :

$$\cos(\arccos m) = m \quad , \quad 0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi$$

چند مثال :

۱) داریم :

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \; ; \; \arccos 1 = 0 \; ; \; \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \; ;$$

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \; ; \; \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \; ; \; \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{5} \; ;$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8} \; ; \; \arccos(-1) = \pi \; ;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \; ;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} \; ; \; \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \; ;$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{4\pi}{5} \; ;$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)=\frac{۷\pi}{۸}\,.$$

۲) $\arccos\frac{۱}{۳}\approx\arccos ۰/۳۳۳۳\approx ۷۰^{\circ}$ و ۳۲

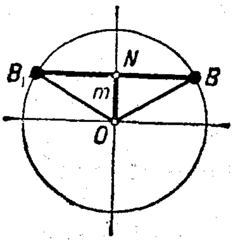
(دراین مثال مقدارتقریبی قوس، با معلوم بودن کسینوس آن ، ازروی جداول چهار رقمی معین شده است) .

قضیه : اگر عدد حقیقی m درفاصلهٔ بستهٔ $-۱\leqslant m\leqslant ۱$ واقع باشد، بی‌نهایت زاویه (یاقوس) وجود داردکه سینوس آنها مساوی m است :

$$\sin x=m \qquad (۲)$$

اگر $|m|>۱$ باشد، زوایا (ویا قوسهائی) که در رابطهٔ (۲) صدق کند، وجودندارد. بنابراین، مجموعهٔ همهٔ مقادیر تابع $\sin x$ درفاصلهٔ بستهٔ $[-۱ و ۱]$ واقع‌اند .

اثبات: شبیه استدلالی که درمورد قضیهٔ قبل کردیم ، کافی است پاره‌خط ON راکه از لحاظ مقدار برابر m است روی محور قائم جداکرده و از $N(۰ و m)$ بموازات محورافقی رسم‌کنیم (شکل ۶۱) . این موازی بازاء مقادیر $۱>m>۰$ محیط‌دایرهٔ واحد را در دونقطهٔ B و $B_۱$ واقع درربعهای اول ودوم قطع می‌کند. بازاء $-۱<m<۰$ خط موازی محیط دایرهٔ واحد را در نقاط B و $B_۱$ واقع در ربعهای سوم وچهارم قطع میکند ، بازاء $m=۱$ و $m=-۱$ نقاط B و $B_۱$ برهم منطبق میشوند وخط موازی در نقطهٔ $B(۱ و ۰)$ ویا $B_۱(۰ و -۱)$ بردایرهٔ واحدمماس میشود وبالاخره بازاء $|m|>۱$ ، خط موازی محیط دایرهٔ واحد را قطع نمیکند .



ش ۶۱

نقاط B و $B_۱$ مجموعهٔ بی‌نهایت زاویه را معین می‌کنند ، که شعاعهای

OB و OB_1 اضلاع انتهائی آنها را تشکیل میدهند .

ازآنچه گفته‌شد نتیجه میشود که برای هرمقدار m بشرط $|m|\leqslant ۱$ تنها یك‌قوس (یاعدد) درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}\text{ و }\frac{\pi}{۲}\right]$ (روی محیط نیمدایرهٔ راست) وجود داردکه سینوس‌آن برابر m است . این قوس را با علامت $\arcsin m$ نشان میدهند و داریم :

$$\sin(\arcsin m)=m \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\leqslant \arcsin m\leqslant \frac{\pi}{۲}$$

چند مثال :

$$۱)\ \arcsin ۰=۰\ ;\ \arcsin ۱=\frac{\pi}{۲}\ ;\ \arcsin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}\ ;$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\pi}{۴}\ ;\ \arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۳}\ ;$$

$$\arcsin\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{\pi}{۵}\ ;$$

$$\arcsin(-۱)=-\frac{\pi}{۲}\ ;\ \arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۳}\ ;$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۴}\ ;\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶}\ ;$$

$$\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}}\right)=-\frac{\pi}{۵}\ ;$$

$$۲)\ \arcsin\left(-\frac{۳}{۷}\right)\#\arcsin(-۰/۴۲۸۶)\#-۲۵^\circ \text{ و } ۲۳'$$

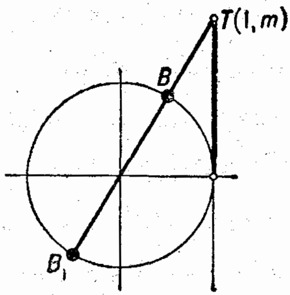
در جدولهای چهاررقمی سینوس $۲۳'$ و ۲۵° مساوی $۰/۴۲۸۶$ نوشته شده است و ما از خاصیت فردبردن تابع سینوس هم استفاده کردیم .

قضیه : عدد حقیقی m را درنظرمیگیریم ، مجموعهٔ بی‌نهایت زاویه (یاقوس) وجود داردکه تانژانتی مساوی m دارند : $\quad tg\,x=m$

و بنا براین مجموعهٔ همهٔ مقادیر تابع $tg\,x$ همان مجموعهٔ اعداد حقیقی

است ، یعنی فاصلهٔ ($+\infty$ و $-\infty$) .

اثبات: بایستی ثابت کرد که تابع $tg\,x$ میتواند مساوی هرمقدارمفروض m باشد . روی محور تانژانت ، نقطهٔ T را بعرض مساوی m پیدا می‌کنیم (شکل ۶۲)، خطی که نقطهٔ T را بمرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل می‌کند ، محیط دایره را دردونقطهٔ متقاطر B و B_1 قطع میکند . شعاعهای oB و oB_1 مواضع هندسی مختلف ضلع انتهائی زاویهٔ موردنظراند که هریك از آنها مجموعهٔ بی‌نهایت زاویه را معین می‌کنند .



ش ۶۲

اگر $m>0$ باشد ، نقاط B و B_1 بترتیب در ربعهای اول و سوم و اگر $m<0$ باشد در ربعهای چهارم و دوم واقع میشوند و بازاء $m=0$ در دوانتهای قطرافقی قرار میگیرند .

ازآنچه گفتیم نتیجه میشود که برای هرعدد حقیقی m تنها یك قوس در نیمدایرهٔ راست $\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$ وجود دارد که تانژانت آن مساوی m است ، این قوس (یاعدد) را با علامت $\mathrm{arc}tg\,m$ نشان میدهند و داریم :

$$tg(\mathrm{arc}tg\,m)=m \;;\; -\frac{\pi}{2}<\mathrm{arc}tg\,m<\frac{\pi}{2}$$

چند مثال :

$$1)\;\; \mathrm{arc}tg\,0=0 \;;\; \mathrm{arc}tg\,1=\frac{\pi}{4} \;;\; \mathrm{arc}tg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6} \;;$$

$$\mathrm{arc}tg(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{8} \;;\; \mathrm{arc}tg(-1)=-\frac{\pi}{4} \;;$$

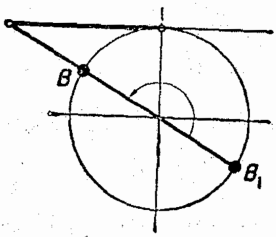
$$\mathrm{arc}tg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6} \;;$$

$$\mathrm{arc}tg(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3} \;;\; \mathrm{arc}tg(1-\sqrt{2})=-\frac{\pi}{8}$$

۲) $\mathrm{arc}tg\,۳ \neq ۷۱^\circ$ و $۳۴'$ (طبق جدول)

قضیه : عدد حقیقی m را درنظر می گیریم ، مجموعهٔ بی‌نهایت زاویه (یا قوس) وجوددارد که کتانژانتی مساوی m دارند. یعنی مجموعهٔ همهٔ مقادیر تابع $cotg\,x$ درفاصلهٔ ($\infty -$ و $\infty +$) قراردارند .

اثبات : اثبات این قضیه کاملا شبیه قضیهٔ قبلی است (شکل ۶۳) :



ش ۶۳

بازاء $m > ۰$ نقاط B و B_1 درربعهای اول و سوم ، بازاء $m < ۰$ درربعهای دوم و چهارم و بازاء $m = ۰$ در دو انتهای قطرقائم قرار میگیرند .

برای هرعدد حقیقی m ، تنها یك قوس درنیمدایره فوقانی (π و ۰) وجود دارد که کتانژانت آن مساوی m است ، این قوس (یا عدد)را با علامت $\mathrm{arc}cotg\,m$ نشان میدهند و بنابراین داریم :

$$cotg(\mathrm{arc}cotg\,m) = m \ ; \ ۰ < \mathrm{arc}\ cotg\,m < \pi$$

چند مثال :

$$\mathrm{arc}cotg\,۰ = \frac{\pi}{۲} \ ; \ \mathrm{arc}cotg\,۱ = \frac{\pi}{۴} \ ; \ \mathrm{arc}cotg\sqrt{۳} = \frac{\pi}{۶} \ ;$$

$$\mathrm{arc}cotg(-۱) = \frac{۳\pi}{۴} \ ; \ \mathrm{arc}cotg(-\sqrt{۳}) = \frac{۵\pi}{۶} \ ;$$

$$\mathrm{arc}cotg\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\pi}{۳}$$

قضیه : توابع $sin\,x$ و $cos\,x$ محدود وتوابع $tg\,x$ و $cotg\,x$ (درفواصلی که معین باشند) نامحدودند .

اثبات : قبلا دیدیم که :

$$-۱ \leqslant cos\,x \leqslant ۱ \quad ; \quad -۱ \leqslant sin\,x \leqslant ۱$$

و یا $|cos\,x| \leqslant ۱$ و $|sin\,x| \leqslant ۱$ و بنابراین توابع $cos\,x$ و $sin\,x$ محدودند.

و همچنین از آنجا که $tg\,x$ و $cotg\,x$ میتوانند مساوی هرمقدار حقیقی دلخواهی باشند (که از لحاظ قدر مطلق بهراندازه که مایل باشیم بـزرگ شود) ، این توابع نامحدود خواهند بود .

قضیه : اگردوعدد حقیقی (u و v) را طوری انتخاب کنیم که در شرط زیرصدق کنند :

$$u^{2}+v^{2}=1 \quad ,$$

تنها یك قوس درفاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ وجود دارد که کسینوس و سینوس آن مساوی مقادیرمفروض u و v باشند :

$$\cos x=u \quad , \quad \sin x=v$$

اثبات : درصفحه تنها یك نقطهٔ M بطول u وبعرض v وجود دارد ، نقطهٔ M برمحیط دایرهٔ واحد واقع است، زیرا داریم :

$$\rho=|OM|=\sqrt{u^{2}+v^{2}}=1$$

وباین‌ترتیب شعاع OM تنها یك زاویهٔ x واقع در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ را معین میکند که کسینوسی مساوی u و سینوسی مساوی v خواهد داشت .

درحوزهٔ اعداد حقیقی ، مجموعهٔ بی‌نهایت‌آوند (ارگومان) وجود دارد که درشرط (۳) صدق میکنند و اختلاف هریك از آنها با x باندازهٔ $2k\pi$ میباشد (k عددی است صحیح) .

نتیجه : اگردستگاه اعداد حقیقی u و v و w و z درشرایطزیرصدق کنند :

$$u^{2}+v^{2}=1 \quad , \quad z=\frac{v}{u} \quad ; \quad w=\frac{u}{v} \quad ,$$

درفاصلهٔ $0 \leqslant x < 2\pi$ تنها یك مقدار برای آوند x وجود دارد بنحوی که داشته باشیم :

$$\cos x=u \quad ; \quad \sin x=v \quad ; \quad tg\,x=z \quad ; \quad cotg\,x=w$$

۱۵. تعیین مجموعهٔ قوسهائی که تابع مثلثاتی آنها مفروض باشد

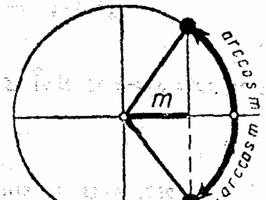
m را یك‌عدد حقیقی و $f(x)$ را تابع مثلثاتی‌مفروضی درنظر میگیریم،

معادلهٔ :
$$f(x)=m$$

ساده‌ترین معادلهٔ مثلثاتی نامیده میشود وحل این معادله ، یعنی پیدا کردن مجموعهٔ همهٔ جوابهای آن . بعبارت دیگر : **حل ساده‌ترین معادلهٔ مثلثاتی عبارتست ازیافتن مجموعهٔ قوسهائی‌که تابع مثلثاتی موردنظرآن مساوی‌مقدار مفروض‌باشد** . برای اینکه مجموعهٔ همهٔ قوسهائی راکه تابع مثلثاتی‌آن داده شده است ، معین‌کنیم (بمناسبت متناوب بودن توابع مثلثاتی) کافی است تنها قوسهائی‌راپیداکنیم‌که دریك دورهٔ تناوب واقع‌اند (یعنی درهرفاصلهٔ دلخواهی که مساوی یك دور تناوب باشد) ، دراینصورت تمام جوابهای تابع مثلثاتی را خواهیم داشت ، زیرا با اضافه‌کردن تعداد صحیح و دلخواهی از دورهٔ تناوب به‌هریك از جوابهای بدست‌آمده ، جواب‌کلی معادلهٔ مفروض بدست میآید .

۱. معادلهٔ : $\cos x=m$

بازاء $|m|\geqslant۱$ جواب ندارد . وقتی‌که $|m|<۱$ باشد ، در حالت‌کلی دونقطهٔ متقارن نسبت به‌محور طول بدست خواهدآمد (بازاء $m=\pm۱$ نقاط برهم منطبق میشوند) که انتهای قوسهائی به‌کسینوس مساوی مقدار مفروض m میباشند (به‌بند ۱۴ مراجعه‌کنید). قوسهای $\arccos m$ (روی نیمدایرهٔ فوقانی) و $-\arccos m$ (روی نیمدایرهٔ تحتانی) درفاصلهٔ بستهٔ $[-\pi و \pi]$ (که ضمناً یك‌دورهٔ تناوب کسینوس است) دارای کسینوسی‌مساوی m هستند (شکل ۶۴) :



ش ۶۴

$$\cos(\pm \arccos m) = \cos(\arccos m) = m.$$

و بنابراین مجموعهٔ همهٔ قوسهائی که کسینوس مساوی مقدار مفروض m دارند، از اضافه کردن $2k\pi$ (که دورهٔ تناوب کسینوس را معین می‌کند) به قوسهای بدست آمده، معین میشوند:

$$x = 2k\pi \pm \arccos m$$ (k عدد دلخواه وصحیحی است)

چند مثال:

معادله	جواب کلی
۱) $\cos x = \frac{1}{2}$	$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۲) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
۳) $\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
۴) $\cos x = -\frac{1}{2}$	$x = 2k \pm \frac{2\pi}{3}$
۵) $\cos x = 0$	$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{4k \pm 1}{2}\pi = \frac{2n+1}{2}\pi$

(n عددیست دلخواه و صحیح، زیرا $4k \pm 1$ معرف عدد صحیح وفرد است: $4k \pm 1 = 2n+1$)

۶) $\cos x = -1$ $\qquad x = 2k\pi \pm \pi = (2n+1)\pi$

(n عددصحیح و دلخواهی است، زیرا $2k \pm 1$ عددیست فرد)

۷) $\cos x = \frac{1}{3}$ $\qquad x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{3} = 360n^\circ \pm 70^\circ 32'$

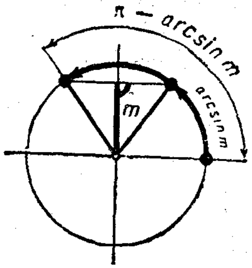
(مثال دوم صفحهٔ ۶۷ را به بینید).

۳. معادلهٔ:

$$\sin x = m$$

بازاء $|m| > 1$ دارای جواب نیست. وقتی که $|m| \leq 1$ باشد، درحالت کلی دو نقطهٔ متقارن نسبت به محور عرض وجود دارد (برای $m = \pm 1$ این

دو نقطه برهم منطبق‌اند) که انتهای قوسهائی به سینوس مفروض m هستند (به بند قبل مراجعه کنید) . قوس $\arcsin m$ روی نیمدایرهٔ راست و قوس $\pi - \arcsin m$ روی نیمدایرهٔ چپ که در فاصلهٔ بستهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (یك دورهٔ تناوب تابع) واقع‌اند ، سینوس مساوی m دارند (شکل ۶۵) :



ش ۶۵

$$\sin(\arcsin m) = m \; ;$$

$$\sin(\pi - \arcsin m) = m.$$

و بنابراین مجموعهٔ قوسهائی که سینوسی مساوی m دارند با اضافه کردن مضرب صحیحی از دورهٔ تناوب به قوسهای بدست آمده حاصل میشود:

$$x = \begin{cases} 2k\pi + \arcsin m \\ 2k\pi + (\pi - \arcsin m) \end{cases}$$

دو رابطهٔ بالا را میتوان بصورت یك رابطه نوشت ، در رابطهٔ اول $\arcsin m$ با علامت مثبت وضریب π عدد زوج $2k$ ودررابطهٔ دوم $\arcsin m$ با علامت منفی و ضریب π عدد فرد $2k+1$ است و بنابراین میتوان دو رابطه را دررابطهٔ زیر متمرکز کرد : $x = n\pi + (-1)^n \arcsin m$

که بازاء $n = 2k$ رابطهٔ اول و بازاء $n = 2k+1$ رابطهٔ دوم را مشخص میکند .

چند مثال :

معادله	جواب کلی
۱) $\sin x = \frac{1}{2}$	$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$
۲) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$
۳) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	

$$x = n\pi + (-1)^n(-\frac{\pi}{3}) = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$$

۴) $\sin x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $x = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}$

۵) $\sin x = 1$ $x = n\pi + (-1)^{n}\frac{\pi}{2} =$

$$= \frac{2n + (-1)^n}{2}\pi = \frac{4k+1}{2}\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(زیـرا وقتی‌که n زوج است : $n = 2k$ و وقتی‌که n فرد است: $n = 2k+1$ وخواهیم‌داشت: $2n + (-1)^n = 4k+1$)

۶) $\sin x = -1$ $x = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} = 2kn - \frac{\pi}{2}$

۷) $\sin x = -\frac{3}{7}$ $x = 180n^\circ + (-1)^{n+1} 25^\circ$ و $23'$

(مثال دوم صفحهٔ ۶۸ را به‌بینید) .

۳. معادلهٔ : $tg\, x = m$

بازاء همهٔ مقادیر حقیقی m دارای‌جواب است ؛ زیرا مجموعهٔ‌مقادیر تانژانت ، مجموعهٔ مقادیرحقیقی است . بازاء هرمقدار مفروض m ، تنهایك قوس $\operatorname{arctg} x$ در نیمدایرهٔ راست $[-\frac{\pi}{2} و \frac{\pi}{2}]$ وجود دارد که تانژانت آن مساوی m است وچون فاصله $[-\frac{\pi}{2} و \frac{\pi}{2}]$ معرف یك دورهٔ تناوب تانژانت است ، مجموعهٔ قوسهای‌جواب بصورت زیر خواهند بود :

$x = k\pi + \operatorname{arctg} m$ (که درآن k عددیست صحیح ودلخواه)

چند مثال :

معادله	جواب کلی
۱) $tg\, x = 1$	$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$
۲) $tg = -1$	$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

۳) $tg\,x = \sqrt{۳}$ $\quad x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۴) $tg\,x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ $\quad x = k\pi - \frac{\pi}{٦}$

۵) $tg\,x = ۲$ $\quad x = ۱۸۰\cdot n^\circ + ۶۳^\circ ۲۶'$ و

۴ . معادله : $\quad cotg\,x = m$

بازاء تمام‌مقادیر حقیقی m دارای‌جواب است وجواب‌کلی آن بصورت زیر میباشد :

$$x = k\pi + \operatorname{arccotg} m$$

چند مثال :

	معادله	جواب کلی
۱)	$cotg\,x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$
۲)	$cotg\,x = ۱$	$x = k\pi + \frac{\pi}{٤}$
۳)	$cotg\,x = -۱$	$x = k\pi + \frac{۳\pi}{٤}$
۴)	$cotg\,x = -\sqrt{۳}$	$x = k\pi + \frac{۵\pi}{٦}$

۱٦ . روابط بین توابع مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی .

دراین‌بند روابطی‌را که‌بصورت: $U(cos\,x ، sin\,x ، tg\,x ، cotg\,x)$ ، (اَ) باشند، مورد مطالعه قرار میدهیم .

این عبارت از عبارت شبیه آن : $\quad U(u ، v ، w ، z)$

بدست آمده است که آوندهای متغیر آن u و v و w و z در روابط زیر می کنند:

$u = \cos x \; ; \; v = \sin x \; ; \; w = tg\, x \; ; \; z = cotg\, x \cdot$

با توجه به آنچه تاکنون دیده‌ایم میتوان گفت :

۱. در عبارت : $(U) \qquad U(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x)$

که میتواند هرمقدار دلخواه x را قبول کند، همهٔ اعمال‌ریاضی را (که‌در U وجود دارد) میتوان انجام داد (U متناظر بایك عدد حقیقی‌خواهد بود).

۲. اگر مجموعهٔ مقادیر مفروض‌آوند تهی نباشد ، عبارت (U)معرف تابعی از آوند x است که بازاء مجموعهٔ مقادیر مفروض x معین خواهد بود . این تابع یك تابع مرکب از آوند x است که برای آن u و v و w و z آوندهای واسطه‌هستند . اگر مجموعهٔ‌مقادیر مفروض x تهی‌باشد، دراینصورت (U) هیچگونه تابعی را معین نمی کند.

۳. مقادیر قابل قبول آوند برای فصل‌مشترك دوعبارت ، برای‌هریك از عبارتهای مفروض نیز (بطور جداگانه) قابل قبول خواهد بود . مجموعهٔ این مقادیر مجموعه‌ای غیر تهی است .

تساوی :

$$U(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x) = V(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x) \quad (I)$$

را (نسبت به آونـد x) یك **اتحاد مثلثاتی** گوئیم وقتی که بازاء تمام مقادیر قابل قبول x صادق باشد . اتحاد مثلثاتی (I) درحالت‌کلی متکی بر روابطی است که بین مقادیر توابع مثلثاتی (نسبت بیك آوند) وجود دارد وباین‌ترتیب تساوی : $\qquad (II) \qquad U(u \text{ و } v \text{ و } w \text{ و } z) = V(u \text{ و } v \text{ و } w \text{ و } z)$

نسبت به آوندهای واسطهٔ تشکیل اتحاد نمیدهد .

اگر عبارتهای :

$$U(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x) \text{ و } V(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x)$$

متحد باشند ، ممکن است مجموعهٔ مقادیر قابل قبول آوند x برای هریك از آنها بطور جداگانه باهم فرق داشته باشد . در حقیقت ممکن است مقادیری

از x وجود داشته باشد ، که بازاء آنها یکی ازعبارتهای U و V مفهوم خود را از دست بدهد . درحالیکه دیگری دارای مفهوم باشد ، با وجوداین مجموعهٔ غیر تهی m از مقادیر x وجود دارد که بازاء آنها عبارتهای مفروض دارای مفهوم‌اند ومقادیرشان باهم برابر است .

تبدیل یك عبارت، بعبارت دیگری که بـا آن متحد است، تبدیل اتحادی عبارت مفروض نامیده میشود . پس از انجام یك تبدیل اتحادی **ممکن است** مجموعهٔ مقادیر قابل قبول آوند x **تغییر کند** .

اگر رابطهٔ (II) نسبت به آوندهای u و v و w و z یك اتحاد باشد، رابطهٔ (I)هم یك اتحاد خواهد بود ، ولی دراینحالت رابطهٔ (I) متکی برهیچ رابطه‌ای بین مقادیر توابع مثلثاتی نیست و بهمین مناسبت برای مطالعهٔ ما جالب نخواهند بود . نمونهٔ این اتحادها ، تساوی زیر است :

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$$

تـوضیح : در حالت خاص ممکن است که عبارت (U) شامل بعضی از توابع مثلثاتی نباشد ، دراینحالت عبارت $U(u, v, w, z)$ هم فـاقد آوند واسطهٔ نظیر آن خواهد بود .

عبارت (U) را نسبت به توابع مثلثـاتی یك عبارت **جبـری** گوئیم ، بشرطی که $l(u, v, w, z)$ نسبت به آوندهای واسطهٔ u و v و w و z یك عبارت جبری باشد . درحالتهای خاص عبارت (U) را نسبت به توابع مثلثاتی کثیرالجمله، کسری ، گویا و گنگ گویند بشرطی که عبارت $U(u, v, w, z)$ نسبت به آوندهای واسطه، متناظراً کثیرالجمله ، کسری ، گویا و گنگ باشد .

تـوضیح : وقتی که عبارت (U) نسبت به توابع مثلثاتی جبری باشد ، درحالت کلی نسبت به‌آوند x غیرجبری (ترانساندانت) خواهد بود (یعنی این تابع باهیچ معادلهٔ جبری تطبیق نمی‌کند ــ به بند ۷۳ مراجعه کنید) .

قضیه : هر تابعی بصورت :

$$f(x) = U(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\, x \text{ و } cotg\, x)$$

نسبت به آوند x يك تابع متنـاوب است ، بنحوی‌که يك‌دورهٔ تناوب آن 2π است .

اثبات : درحقیقت با تغییر مقادیر آوند x به $2k\pi + x$ مقدار آوندهای واسطه : $u = \cos x \; ; \; v = \sin x \; ; \; w = tg\, x \; ; z = cotg\, x$ تغییر نمی‌کند و بنابراین مقدار تابع $f(x)$ هم تغییر نمی‌کند .

متذکر میشویم‌که ممکن است 2π کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت این تابع نباشد (به مثال دوم توجه‌کنید) :

چند مثال :

۱ . با توجه بآنچه گفتیم هریك از توابع زیر، توابعی متناوب‌هستند:

$$\sin x + tg\, x \; ; \; 2\sin x + \cos x \; ; \; \sin^3 x + 3\sin^2 x + 1 \; ;$$

$$\frac{1}{\sin x + tg\, x - \cos x}$$

۲ . تابع $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ تابعی‌متناوب است، ولی 2π کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت آن‌نیست . درحقیقت $\cos(\pi + x)$ و $\sin(\pi + x)$ مختصات نقطهٔ متقاطر نقطه‌ای از دایـره هستند‌که مختصـاتش $(\cos x \text{ و } \sin x)$ است . مختصات این‌دو نقطه قرینهٔ یکدیگرند و بنابراین :

$$f(\pi + x) = \cos(\pi + x)\sin(\pi + x) = (-\cos x)(-\sin x) = f(x)$$

و بنابراین π دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ است .

۳ . به‌بینید تابع زیر درچه فواصلی معین است:

$$f(x) = \frac{\sin x + cotg\, x}{1 + tg\, x}$$

حل : بـرای اینکه به‌بینیم‌کی تابع معین است، بایستی از مجموعـهٔ مقادیر قابل قبول x ، مقادیری راحذف‌کردکه بازاء آنها :

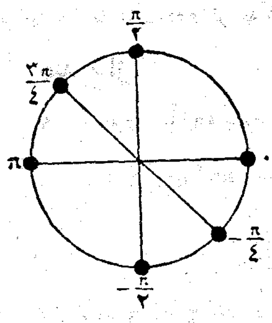
a) $tg\,x$ مفهوم خود را ازدست میدهد، یعنی مقادیر $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ؛

b) $cotg\,x$ مفهوم خود را از دست میدهد، یعنی مقادیر بصورت $k_۱\pi$

c) $tg\,x=-۱$ ، یعنی مقادیر بصورت :

$$k_۲\pi+arc\,tg(-۱)=k_۲\pi-\frac{\pi}{٤}$$

در شکل ۶۶ نقاط انتهای قوسهائی که بازاء آنها تابع $f(x)$ معین نیست مشخص شده‌است.



ش ۶۶

مثلا اگر فاصلهٔ بستهٔ [۰ و ۲π] را که یك دورتناوب $f(x)$ است انتخاب کنیم، تابع $f(x)$ در شش فاصلهٔ زیر دارای مفهوم‌است :

$$\left(۰ و \frac{\pi}{۲}\right) ; \left(\frac{\pi}{۲} و \frac{۳\pi}{٤}\right) ;$$
$$\left(\frac{۳\pi}{٤} و \pi\right) ; \left(\pi و \frac{۳\pi}{۲}\right) ; \left(\frac{۳\pi}{۲} ,\frac{۷\pi}{٤}\right) ; \left(\frac{۷\pi}{٤} و ۲\pi\right).$$

ودر انتهای هریك از این فواصل دارای مفهوم نیست.

۴. تابع زیر کی معین است:

$$\varphi(x)=log\,sin\,x$$

حل : برای معین بودن تابع $\varphi(x)$ بایستی داشته باشیم : $sin\,x>۰$ واین شرط درمورد قوسهائی صادق است که انتهای آنها بر نیمدایرهٔ فوقانی دایره واقع باشد (نیمدایرهٔ باز). بنابراین تابع زیر در مجموعهٔ نا محدود فواصل زیر معین‌است:

$$۲k\pi<x<(۲k+۱)\pi$$

۵. تابع $f(x)=log\,sin^{۲}x$ بازاء تمام‌مقادیر x که درشرط $sin\,x\neq ۰$ صدق کنند، یعنی در مجموعهٔ نا محدود فواصل زیر معین است:

$$\ldots;\ (-\pi و ۰)\ ;\ (۰ و \pi);(\pi و ۲\pi);\ldots;(k\pi و (k+۱)\pi)\quad (I)$$

و برای معین بودن تابع $F(x)=۲\,log\,sin\,x$ مجموعهٔ نامحدود فواصل زیر بدست میآید :

$$\ldots;(-۲\pi و -\pi)\ ;\ (۰ و \pi);\ldots;(۲k\pi\ و\ (۲k+۱)\pi)\quad (II)$$

فصل مشترك دو تابع $f(x)$ و $F(x)$ بازاء مقادیری که در فواصل (II) هستند بدست میآید ودراین فاصله داریم :

$$log\,sin^{۲}x=۲\,log\,sin\,x$$

این تساوی بازاء تمام مقادیر قابل قبول x برقرار است، یعنی‌متحد بایکدیگر ند. هما نطور که دیده میشود در این مثال حوزه‌ای که درآ نجاهر یك از دوتابع معین هستند، باهم اختلاف دارد.

۶. مطلوبست مجموعهٔ مقادیر آوند x که بازاء آ نها اتحاد زیر بر قرار باشد:

$$log\,tg\,x=log\,sin\,x-log\,sin\,x$$

حل : برای اینکه سمت چپ تساوی معین باشد بایستی $tg\,x>۰$ باشد، وازآ نجا $k\pi<x<(k+\frac{۱}{۲})\pi$ (قوسهائی که‌انتهای‌آ نها درربع اول و سوم‌است) بدست‌میآید.

برای اینکه سمت راست تساوی معین باشد بایستی شرایط زیر برقرار باشد :

$$\begin{cases} sin\,x>۰ & (\text{نیمدایرهٔ فوقانی}) \\ cos\,x>۰ & (\text{نیمدایرهٔ راست}) \end{cases}$$

و جواب مشترك این دونامساوی چنین است:

$$۲k\pi<x<(۲k+\frac{۱}{۲})\pi\ (\text{قوسهائی که انتهای آنهادرربع اول است})$$

و در نتیجه اتحاد در فاصلهٔ $\left(2k\pi \text{ و } (2k+\frac{1}{2})\pi\right)$ برقرار خواهد بود (قوسهائی که انتهای آنها درربع اول قرار دارد).

۷. مجموعهٔ مقادیری از آوند x را بدست آورید که بازاء آنها اتحاد زیر برقرار باشد :

$$\log tg\, x = \log|\sin x| - \log|\cos x|$$

حل : قسمت سمت چپ در فاصلهٔ $\left(k\pi \text{ و } (k+\frac{1}{2})\pi\right)$ معین‌است‌وقسمت سمت راست بازاء مقادیری معین است که درشرایط زیر صدق کنند:

$$\sin x \neq 0 \text{ و } \cos x \neq 0$$

وازآنجا $x \neq \frac{n\pi}{2}$ (n عددیست‌صحیح) بدست میآید، یعنی‌فواصل‌زیر:

$$\left(\frac{n\pi}{2} \text{ و } (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

و بنابراین اتحاد بازاء مقادیر مشترك شرایط دوقسمت برقرار خواهد بود، یعنی در فاصلهٔ:

$$\left(k\pi \text{ و } (k+\frac{1}{2})\pi\right) \qquad \text{(ربعهای اول‌و دوم)}$$

۸. درچه فواصلی تابع زیر معین است:

$$f(x) = tg\frac{1}{x}$$

حل : تابع f(x) یك تابع مرکب است :

$$f(x) = tg\, u \;\; ; \quad u = \frac{1}{x}$$

و معین بودن تابع از شرایط زیر بدست میآید: مقادیری از آوند x قابل قبول نیستند که بازاءآنها:

a) $\frac{1}{x}$ مفهوم نداشته باشد و ازآنجا $x = 0$

b) $tg\, u$ مفهوم نداشته باشد وازآنجا :

$$u=\frac{1}{x}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$$

(که در آن k عـددیست صحیح و دلخـواه) . از فـاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$)
این مقادیر x را حذف می کنیم، مجموعهٔ نامحدود فواصل زیر بدست میآید:

$$\left(\frac{2}{\pi} \text{ و } +\infty\right);\left(\frac{2}{3\pi} \text{ و } \frac{2}{\pi}\right);\left(\frac{2}{5\pi} \text{ و } \frac{2}{3\pi}\right);\dots;\left(\frac{2}{(2k+3)\pi} \text{ و } \frac{2}{(2k+1)\pi}\right);\dots;\left(-\infty \text{ و } -\frac{2}{\pi}\right);\left(-\frac{2}{\pi} \text{ و } -\frac{2}{3\pi}\right);\left(-\frac{2}{3\pi} \text{ و } -\frac{2}{5\pi}\right);\dots$$

روابط اساسی

قضیه : بازاء هر مقدار دلخواه آرند x اتحاد زیر برقرار است:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad (1)$$

اثبات : اگر تساویهای :

$$\cos x=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\ ;\ \sin x=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

را مجذور کرده و بـا هـم جمع کنیم ، رابطـهٔ (۱) بدست میآیـد (u و v مختصات نقطهٔ دلخواه $M\neq 0$، انتهای قوس x اند).

اگر به رابطهٔ (۱)، روابطی که تانژانت و کتانژانت را معین می کنند، اضافه کنیم ، سه رابطهٔ اساسی که توابع مثلثاتی را بهم مربوط می کنند بدست میآید :

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\ ;\quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\ ;\ cotg\,x=\frac{\cos x}{\sin x} \qquad (I)$$

باکمك اتحادهای(I) میتوان اتحادهای مثلثاتی دیگری استخراج کرد وما از بین آنها، اتحادهائی راکه غالباً مورد استفاده‌اند ذکر می‌کنیم:

۱ـ ازاتحادهای دوم وسوم نتیجه میشود:

$$tg\,x\cdot cotg\,x=1 \qquad (1)$$

این اتحاد بازاء تمام مقادیری از $\mathbf{x}$ که تانژانت وکتانژانت مفهوم دارند برقرار است.

۲ـ اگر طرفین اولین اتحاد (I) را بر $sin^{۲}\mathbf{x}$ (بشرط $sin\,\mathbf{x} \neq ۰$) وسپس بر $cos^{۲}\mathbf{x}$ (بشرط $cos\,\mathbf{x} \neq ۰$) تقسیم کنیم، بدست میآید:

$$tg^{۲}\mathbf{x} + ۱ = \frac{۱}{cos^{۲}\mathbf{x}} \;;\; cotg^{۲}\mathbf{x} + ۱ = \frac{۱}{sin^{۲}\mathbf{x}} \qquad (۳)$$

ویاصورت دیگر بیان آنها :

$$tg^{۲}\mathbf{x} + ۱ = \sec^{۲}\mathbf{x} \;;\; cotg^{۲}\mathbf{x} + ۱ = \mathrm{cosec}^{۲}\mathbf{x} \qquad (۳)$$

از اولین اتحاد (I) میتوان کسینوس را برحسب سینوس وباقراردادن در دو اتحاد دیگر، تانژانت وکتانژانت را برحسب سینوس بدست آورد:

$$cos\,\mathbf{x} = \pm\sqrt{۱ - sin^{۲}\mathbf{x}} \;;\; tg\,\mathbf{x} = \frac{sin\,\mathbf{x}}{\pm\sqrt{۱ - sin^{۲}\mathbf{x}}}$$

$$cotg\,\mathbf{x} = \frac{\pm\sqrt{۱ - sin^{۲}\mathbf{x}}}{sin\,\mathbf{x}} \qquad (۳)$$

وبهمین ترتیب میتوان توابع مثلثاتی را برحسب کسینوس بدست آورد:

$$sin\,\mathbf{x} = \pm\sqrt{۱ - cos^{۲}\mathbf{x}} \;;\; tg\,\mathbf{x} = \frac{\pm\sqrt{۱ - cos^{۲}\mathbf{x}}}{cos\,\mathbf{x}} \;;$$

$$cotg\,\mathbf{x} = \frac{cos\,\mathbf{x}}{\pm\sqrt{۱ - cos^{۲}\mathbf{x}}} \qquad (۵)$$

از اولین رابطهٔ (۳) میتوان کسینوس را برحسب تانژانت و از روابط دوم وسوم (I) سینوس وکتانژانت را برحسب تانژانت بدست آورد:

$$cos\,\mathbf{x} = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^{۲}\mathbf{x}}} \;;\; sin\,\mathbf{x} = \frac{tg\,\mathbf{x}}{\pm\sqrt{۱ + tg^{۲}\mathbf{x}}}$$

$$cotg\,\mathbf{x} = \frac{۱}{tg\,\mathbf{x}} \qquad (۶)$$

وبا همین روش میتوان توابع مثلثاتی را برحسب کتانژانت بدست آورد:

$$\cos x = \frac{\cot g\, x}{\pm\sqrt{1+\cot g^2 x}}\,;\quad \sin x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot g^2 x}}\,;$$

$$tg\, x = \frac{1}{\cot g\, x} \qquad (7)$$

بوسیلهٔ روابط (۴)، (۵) ، (۶) و (۷) میتوان با در دست داشتن یکی ازتوابع مثلثاتی مقدار عددی سایر توابع را بدست آورد و از روابط مذکور معلوم است که درحالت کلی، مسئله دو جواب خواهد داشت یعنی برای مقدار مفروض یك تابع دو دستگاه مختلف جواب برای توابع دیگر بدست میآید . درحقیقت وقتی که یکی از توابع مثلثاتی معلوم باشد (درحالت کلی) دو وضع هندسی متفاوت برای ضلع انتهای زاویه بدست میآید. برای اینکه ضلع انتهای زاویه مشخص باشد، بایستی بدانیم که درچه ربعی از دایره قرار گرفته است ، این شرط علامت جلو رادیکال راهم مشخص خواهد کرد.

چند مثال :

۱ . اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$1-(\sin^6\alpha+\cos^6 o) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

حل : داریم:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)=$$
$$=\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=$$
$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=1-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

وازآنجا صحت اتحاد ثابت میشود.

۲ . اگر $\sin x+\cos x = a$ باشد $\sin^5 x+\cos^5 x$ را محاسبه کنید :

حل : داریم :

$$\sin^5 x+\cos^5 x = (\sin x+\cos x)(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+$$

$$+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)=(\sin x+\cos x)[(\sin^4 x+$$
$$+\cos^4 x)-\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x\cos^2 x]\cdot$$

اکنون اگر طرفین رابطهٔ مفروض مسئله را مجذور کنیم، بدست‌میآید:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x=a^2$$

و از آنجا ؛
$$\sin x\cdot\cos x=\frac{a^2-1}{2}$$

و همچنین داریم :
$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-$$
$$-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{(a^2-1)^2}{2}=\frac{1+2a^2-a^4}{2}$$

که اگر در رابطهٔ مورد نظر قرار دهیم، میشود :

$$\sin^5 x+\cos^5 x=a\left[\frac{1+2a^2-a^4}{2}-\frac{a^2-1}{2}+\frac{(a^2-1)^2}{4}\right]=$$
$$=\frac{a}{4}(5-a^4)$$

۳. فرض می‌کنیم :

$$x_1=\sin\varphi_1\ ;\ x_2=\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ ;\ x_3=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3\ ;$$

....

$$x_{n-1}=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ \cdots\ \cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$
$$x_n=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ \cdots\ \cos\varphi_{n-2}\cos_{n-1}$$

ثابت کنید که بازاء همهٔ مقادیر φ_1، φ_2 ، .... ، φ_{n-1} اتحاد زیر صحیح است :

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

حل : داریم :

$$x_{n-1}^2+x_n^2=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\cdots\cos^2\varphi_{n-2}(\sin^2\varphi_{n-1}+\cos^2\varphi_{n-1})=$$
$$=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ \cdots\ \cos^2\varphi_{n-2}$$

و سپس :

$$x_{n-2}^2+x_{n-1}^2+x_n^2=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\cdots\cos^2\varphi_{n-3}\sin^2\varphi_{n-2}+$$
$$+\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\cdots\cos^2\varphi_{n-3}\cos^2\varphi_{n-2}=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\cdots\cos^2\varphi_{n-3}$$

و اگر بهمین روش ادامه دهیم، بدست‌میآید :

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=1$$

۴. ثابت کنید که اگر تساوی زیر برقرار باشد :

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$

هریك از دوطرف تساوی برابر $|\sin\alpha|.|\sin\beta|.|\sin\gamma|$ خواهد بود .

حل : دوطرف تساوی فرض را در :

$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$ ضرب می‌کنیم ، میشود :

$$[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)]^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)\times$$
$$\times(1-\cos^2\gamma)=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

از طرف دیگر روشن است که عبارت $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$ نمیتواند منفی باشد (زیرا $|\cos x|\leqslant 1$ است) وبنابراین خواهیم داشت :

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=|\sin\alpha|.|\sin\beta|.|\sin\gamma|$$

درحالتی که $\sin\alpha$ ، $\sin\beta$ و $\sin\gamma$ مثبت باشند ومثلا وقتی که α و β و γ زوایائی حاده هستند ، علامتهای قدرمطلق از بین میروند .

۵. عبارت زیر را ساده کنید :

$$U(x)=\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{tg^2 x-1}$$

حل : کسر دوم را در نظر میگیریم :

$$\frac{\sin x+\cos x}{tg^2x-1}=\frac{\cos^2x(\sin x+\cos x)}{\sin^2x-\cos^2x}=\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}$$

و بنابراین :

$$U(x)=\frac{\sin^2x.}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x-\sin x}=$$
$$=\sin x+\cos x$$

و بالاخره خواهیم داشت: $\sin x+\cos x=\frac{\sin^{2}x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{tg^{2}x-1}$

توضیح : در اتحادی که بدست آوردیم مجموعهٔ مقادیر آوند قابل قبول برای قسمتهای سمت راست و چپ تساوی (بطور جداگانه) با هم فرق دارد . درحقیقت‌عبارت $\sin x+\cos x$ بازاء همه‌مقادیرحقیقی x دارای‌مفهوم است ، ولی عبارت سمت‌چپ تساوی بازاءهمهٔ مقادیر x دارای‌مفهوم است‌بجز مقادیری که در شرایط زیر صدق کنند :

$$\sin x=\cos x\ ;\ tg x=\pm 1\ ;\ x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

و باین ترتیب ، درحالت خاص ، مقادیر :

$$x=\frac{\pi}{4}\ ;\ x=\frac{3\pi}{4}\ ;\ x=\frac{\pi}{2}$$

برای سمت چپ تساوی مقادیری قابل قبول نیستند .

۶ . کسرزیر رابرحسب $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ بنویسید: $\frac{1}{\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha}$

حل : بترتیب داریم :

$$\frac{1}{\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha}=\frac{(\cos^{2}\alpha+\sin^{2}\alpha)^{2}}{\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha}=\frac{\cos^{4}\alpha+2\cos^{2}\alpha\sin^{2}\alpha+\sin^{4}\alpha}{\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^{4}\alpha}{\cos^{2}\alpha\sin^{2}\alpha}+2+\frac{\sin^{4}\alpha}{\cos^{2}\alpha\sin^{2}\alpha}=cotg^{2}\alpha+tg^{2}\alpha+2$$

۷. کسر زیر را برحسب $tg\alpha$ بنویسید :

$$P=\frac{1}{a\sin^{2}\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^{2}\alpha}$$

حل : صورت ومخرج کسر را بر $\cos^{2}\alpha$ تقسیم می کنیم :

$$P=\frac{\frac{1}{\cos^{2}\alpha}}{a\,tg^{2}\alpha+b\,tg\alpha+c}=\frac{tg^{2}\alpha+1}{a\,tg^{2}\alpha+b\,tg\alpha+c}.$$

تبصره : اگر $a \neq 0$ باشد ، بازاء $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$ کسر مفروض‌دارای مفهوم است، درحالیکه کسر بدست آمده مفهوم خودرا ازدست‌میدهد.

۸ . صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید :

$$\frac{1 + tg\,x + cotg\,x}{sec^2 x + tg\,x} - \frac{cotg\,x}{cosec^2 x + tg^2 x - cotg^3 x} = sin\,x\,cos\,x.$$

حل : داریم :

$$a)\ \frac{1 + tg\,x + cotg\,x}{sec^2 x + tg\,x} = \frac{1 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}}{(1 + tg^2 x) + tg\,x} = \frac{1}{tg\,x} = \frac{cos\,x}{sin\,x};$$

$$b)\ \frac{cotg\,x}{cosec^2 x + tg^2 x - cotg^2 x} = \frac{cotg\,y}{(1 + cotg^2 x) + tg^2 x - cotg^2 x} =$$

$$= \frac{cotg\,x}{1 + tg^2 x} = \frac{cos^3 x}{sin\,x}.$$

و بنابراین سمت‌چپ اتحاد فرض چنین میشود :

$$\frac{cos\,x}{sin\,x} - \frac{cos^3 x}{sin\,x} = \frac{cos\,x(1 - cos^2 x)}{sin\,x} = cos\,x\,sin\,x.$$

۹ . ثابت‌کنیدکه تابع : $f(x) = \dfrac{sin\,x + tg\,x}{cos\,x + cotg\,x}$

در حوزه‌ای‌که معین است ، مثبت هم هست .

حل : بازاء همهٔ مقادیر $x \neq k\frac{\pi}{2}$ (kعددی است‌صحیح) ؛ تابع $f(x)$ معین است یعنی وقتی‌که نقطهٔ x روی دایرهٔ واحد بردو انتهای قطرهای‌افقی و قائم واقع‌نباشد . درحقیقت‌تابع مفروض‌مفهوم خودراوقتی ازدست‌میدهد که:

a) $tg\,x$ مفهوم نداشته‌باشد، یعنی $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$(دوانتهای‌قطر قائم).

b) $cotg\,x$ مفهوم نداشته باشد یعنی $x = k\pi$ (دو انتهای‌قطر افقی) .

c) $\cos x + \cot g x = 0$ باشد، یعنی :

$$\cos x\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)=0 \Longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(دو انتهای قطر قائم) ویا : $\sin x = -1 \Longrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

(انتهای پائین قطر قائم) .

اکنون تابع $f(x)$ را چنین مینویسیم :

$$\frac{\sin x + tg x}{\cos x + \cot g x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\frac{1}{\cos x}}{1+\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}.$$

وچون وقتی که $x \neq k\frac{\pi}{2}$ باشد $|\cos x| < 1$ و $|\sin x| < 1$ است ، بازاء تمام مقادیر x تابع $f(x)$ مثبت خواهد بود .

۱۰ . عبارت زیر را برحسب $\cot g x$ بنویسید :

$$U(x) = \operatorname{cosec} x \sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}} - \sqrt{2}$$

حل : داریم :

$$\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}$$

و بنابراین : $U(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\cos x|\sin x|} - 1\right)$

وقتی که انتهای قوس روی نیمدایرهٔ فوقانی باشد :

$2k\pi < x < (2k+1)\pi$ ،

داریم: $\sin x > 0$ و $|\sin x| = \sin x$ و بنابراین :

$$U(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \sqrt{2}\cot g^2 x.$$

و وقتی که انتهای قوس روی نیمدایرهٔ تحتانی باشد :

$(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi$ ،

داریم: $\sin x < 0$ و $|\sin x| = -\sin x$ و بنابراین:

$$U(x) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right) = -\sqrt{2}(\cot g^2 x + 2)$$

و بطور خلاصه:

$$U(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cot g^2 x & ; \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -\sqrt{2}(\cot g^2 x + 2) & \quad (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi. \end{cases}$$

۱۱ . عبارت زیر را ساده کنید :

$$P(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}\right).$$

حل : چون $|\sin\varphi| < 1$ و $|\cos\varphi| < 1$ است ، تمام جملات مثبت و همهٔ رادیکالها حقیقی خواهند بود . داریم :

$$\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \frac{(1-\sin\varphi)-(1+\sin\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = -\frac{2\sin\varphi}{|\cos\varphi|}$$

و شبیه آن :

$$\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = -\frac{2\cos\varphi}{|\sin\varphi|}$$

و بنابراین :

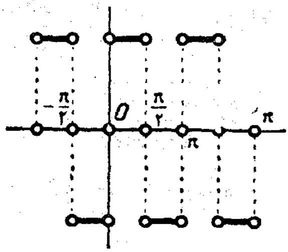
$$P = \frac{4\sin\varphi\cos\varphi}{|\cos\varphi|\cdot|\sin\varphi|} = 4\frac{\cos\varphi}{|\cos\varphi|}\cdot\frac{\sin\varphi}{|\sin\varphi|}$$

برای قوسهائی که انتهای آنها در نیمدایرهٔ بازفوقانی باشد $\sin\varphi > 0$ و بنابراین $|\sin\varphi| = \sin\varphi$ است و برای قوسهائی که انتهای آنها در نیمدایرهٔ تحتانی باشد $\sin\varphi < 0$ و بنابراین $|\sin\varphi| = -\sin\varphi$ خواهد بود . همچنین وقتی که انتهای قوس روی نیمدایرهٔ راست باشد $|\cos\varphi| = \cos\varphi$ و وقتی که انتهای قوس روی نیمدایرهٔ چپ باشد $|\cos\varphi| = -\cos\varphi$ میشود .

وبنابراین :

$$P(\varphi)=\begin{cases} ۴ & \text{اگر} \quad ۲k\pi<\varphi<۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \qquad (\text{ربع اول}) \\ -۴ & \text{اگر} \quad ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}<\varphi<(۲k+۱)\pi \qquad (\text{ربع دوم}) \\ ۴ & \text{اگر} \quad (۲k+۱)\pi<\varphi<۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \qquad (\text{ربع سوم}) \\ -۴ & \text{اگر} \quad ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}<\varphi<۲(k+۱)\pi \qquad (\text{ربع چهارم}) \end{cases}$$

نمایش تغییرات تابع $P(\varphi)$ درشکل ۶۷ داده شده است ، این تابع متناوب‌است (با دورهٔ تناوب π) و نقاط $\varphi=k\frac{\pi}{۲}$ نقاط انفصال نوع اول‌آنست .



ش ۶۷

۱۲ . از دستگاه زیر x را حذف کنید :

$$tg^۲x+cotg^۲x=a \; ; \; tg^۴x+cotg^۴x=b \cdot$$

حل : اگر طرفین معادلهٔ اول را مجذورکنیم داریم :

$$tg^۴x+cotg^۴x+۲tg^۲x\,cotg^۲x=a^۲$$

که با توجه به معادلهٔ دوم و اینکه $tg\,x\,cotg\,x=۱$ است ، رابطهٔ مطلوب به دست میآید :

$$a^۲=b+۲$$

۱۳ . از دستگاه زیر x را حذف کنید :

$$\operatorname{cosec}x-\sin x=m \; ; \; \sec x-\cos x=n \cdot$$

حل : مقادیر بصورت $x=k\frac{\pi}{۲}$ در هیچیك از معادلات دستگاه صدق نمی‌کنند (سمت چپ یکی از تساویها مفهوم خود را ازدست میدهد) . طرفین معادلهٔ اوّل را در $\sin x$ و طرفین معادلهٔ دوم را در $\cos x$ ضرب مـی‌کنیم ، میشود :

$$1-\sin^2 x = m\sin x \;;\; 1-\cos^2 x = n\cos x \qquad (1)$$

و یا :

$$\cos^2 x = m\sin x \;;\; \sin^2 x = n\cos x \qquad (2)$$

از ضرب روابط (۲) در یکدیگر (پس‌از حذف $\sin x\cos x$ از طرفین) خواهیم داشت :

$$\sin x\cdot\cos x = mn \qquad (3)$$

اکنون هریك از روابط (۲) را در رابطهٔ (۳) ضرب و ساده میکنیم:

$$\cos^3 x = m^2 n \;;\; \sin^3 x = n^2 m$$

و ازآنجا :

$$\cos^2 x = m\sqrt[3]{mn^2} \;;\; \sin^2 x = n\sqrt[3]{m^2 n}$$

از جمع این دورابطه ، به رابطهٔ مطلوب میرسیم :

$$m\sqrt[3]{mn^2} + n\sqrt[3]{m^2 n} = 1$$

بعضی از اتحادهای مثلثاتی را میتوان برای حالتی‌که‌آوند ، زاویهٔ حاده باشد تعبیر هندسی‌کرد ، چند مثال در این مورد ذکر می‌کنیم :

۱۴ . اتحاد زیر را ثابت‌کنید :

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

و برای موردی‌که زاویه α ، حاده باشدآنرا تعبیر هندسی‌کنید .

حل : برای اثبات صحت اتحاد ، سمت چپ تساوی را بااین ترتیب تبدیل می‌کنیم :

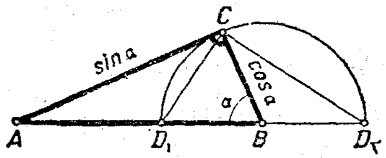
$$\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

حالا فرض می‌کنیم‌که α زاویه‌ای حاده باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باوترواحد وزاویهٔ حاده‌ای مساوی α میسازیم (شکل۶۸) . مثلثهای AD_1C و ACD_2 متشابه‌اند و بنابراین :

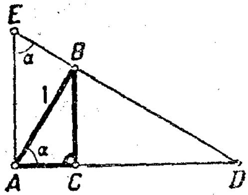
$$\frac{AC}{AD_1} = \frac{AD_2}{AC} \;;$$

و چون داریم : $AC = \sin\alpha$ ، $AD_1 = 1 - \cos\alpha$ ، $AD_2 = 1 + \cos\alpha$ ، اتحاد مفروض بدست میآید.

روشن است که این تعبیر هندسی بمعنای اثبات کامل اتحاد نیست ، زیرا اتحاد بازاء هرمقدار دلخواه α صحیح است ، در حالیکه بیان هندسی مربوط به موردی است که $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد .



ش ۶۸



ش ۶۹

۱۵ . وقتی که α زاویه‌ای حاده باشد ، تعبیر هندسی اتحاد زیررا پیدا کنید :

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha \ .$$

حل : مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به وتر واحد وزاویهٔ حادهٔ مساوی α در نظر میگیریم (شکل ۶۹) . مثلث ADE را چنان میسازیم که A زاویهٔ قائمهٔ و $DE \perp AB$ باشد ، در اینصورت داریم : $\widehat{DEA} = \widehat{BAC}$ (اضلاع آنها برهم عمودند) . بنابراین مثلثهای ABC و AED متشابه میشوند و میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{AC+BC}{AD+AE} = \frac{AB}{DE} \qquad (1)$$

ولی داریم :

$AC = \cos\alpha$; $BC = \sin\alpha$; $AB = 1$; $AD = \sec\alpha$;

$AE = \operatorname{cosec}\alpha \; ; \; DE = DB + BE = tg\alpha + cotg\alpha =$

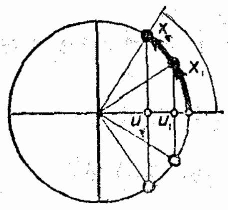
$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

اگر این مقادیر را در (۱) قرار دهیم اتحاد مفروض بدست میآید .

۱۷. فواصلی که توابع مثلثاتی یکنوا هستند

تابع $\cos x$. قضیه : تابع $\cos x$ در نیمدایره فوقانی (بسته) $0 \leq x \leq \pi$ از ۱ تا ۱ — تنزل میکند و در نیمدایرهٔ تحتانی $-\pi \leq x < 0$ از ۱ — تا ۱ + ترقی میکند .

اثبات : قطعهٔ $[0 \text{ و } \pi]$ را به دو قطعهٔ $\left[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ (ربع بستهٔ اول) و $\left[\frac{\pi}{2} \text{ و } \pi\right]$ (ربع دوم بسته) تقسیم می‌کنیم و $\cos x$ را هر یك از این دو قطعه مورد مطالعه قرار میدهیم .



ش ۷۰

ثابت میکنیم که $\cos x$ درربع اول $\left[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ نزولی است ، یعنی از دو مقدار مختلف آوند x در ربع اول (بسته) ، مقدار بزرگتر x متناظر با مقدار کوچکتر کسینوس است .

فرض کنید : $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ؛ مقادیر آوندهای x_1 و x_2 را بصورت قوسهائی از دایرهٔ واحد در نظر میگیریم (شکل ۷۰) .

در هندسه دیده‌ایم ، از دو قوس آنکه بزرگتر است ، فاصلهٔ وترش از مرکز

کوچکتر است. خطوط کسینوس u_1 و u_2 قوسهای x_1 و x_2 عبارتندازفواصل مرکز تا وترهای مربوط به قوسهای مساوی $2x_1$ و $2x_2$ وچون $2x_1<2x_2$ است ، بنابراین $u_1>u_2$ خواهد شد و در نتیجه :

بازاء $x_1<x_2$ داریم : $\cos x_1>\cos x_2$

یعنی تابع $\cos x$ در ربع اول نزولی است .

اگر قوسهای x_1 و x_2 در ربع دوم باشند : $\frac{\pi}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$ ، قوسهای φ_1 و φ_2 مکملهای x_1 و x_2 در نامساویهای زیر صدق می کنند :

$$0\leqslant\varphi_2<\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}$$

فواصل مرکز دایره تا وترهای دو قوس $2\varphi_2$ و $2\varphi_1$ بترتیب هستند :

$$|u_1|=|\cos x_1| \text{ و } |u_2|=|\cos x_2|$$

و بنابراین $|\cos x_1|<|\cos x_2|$ ؛ ولی درربع دوم مقدار کسینوس مثبت نیست و در نتیجه :

بازاء $x_1<x_2$ داریم : $\cos x_1>\cos x_2$

یعنی $\cos x$ در ربع دوم نزولی است .

باین ترتیب :

اولا **کسینوس در قطعهٔ $[0 \text{ و } \pi]$ (نیمدایرهٔفوقانی) نزولی است** ،زیرا در هریك از قطعات $\left[0\text{ و }\frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}\text{ و }\pi\right]$ نزولی است .

ثانیاً **در دو انتهای این قطعه** $\cos 0=1$ و $\cos\pi=-1$ **است .**

ثانیاً (طبق آنچه کەدربند ۱۴ ثابت کردیم) ، **هرمقدار m ،که با شرط $-1\leqslant m\leqslant 1$ انتخاب شود ، برای آونـد تابع $\cos x$ درقطعهٔ $[0 \text{ و } \pi]$ جواب $x=\arccos m$ وجود دارد .**

بنابر این $\cos x$ درقطعهٔ $[0 \text{ و } \pi]$ از $+1$ تا -1 تنزل میکند .

x_1 و x_2 را دو مقدارآونـد با شرط $-\pi\leqslant x_1<x_2<0$ انتخـاب

می‌کنیم . مقادیر قرینهٔ آوندها یعنی $-x_1$ و $-x_2$ در قطعهٔ $[\pi$ و $0]$ قرار دارند و داریم : $0 \leqslant -x_2 < -x_1 \leqslant \pi$ ، با توجه باین‌که تابع $\cos x$ در قطعهٔ $[\pi$ و $0]$ نزولی و زوج است . داریم :

$$\cos x_2 > \cos x_1 \quad \text{یا} \quad \cos(-x_2) > \cos(-x_1)$$

یعنی تابع $\cos x$ در قطعهٔ $[0$ و $-\pi]$ صعودی است .

تبصره: صعودی بودن تابع $\cos x$ در قطعهٔ $[0$ و $-\pi]$ را میتوان مستقیماً و بطریق هندسی اثبات‌کرد (و ما آنرا بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم) .

اولاً $\cos x$ **صعودی است ،**

ثانیاً $\cos(-\pi) = -1$ و $\cos 0 = 1$ ،

ثالثاً بازاء هرمقدار دلخواه m (با شرط $-1 \leqslant m \leqslant 1$) ازتابع $\cos x$ مقداری برای آوند $x = -\arccos m$ وجود دارد :

$$\cos(-\arccos m) = \cos(\arccos m) = m.$$

بنابراین تابع $\cos x$ درقطعهٔ $[0$ و $-\pi]$ از -1 تا 1 ترقی می‌کند .

نیمدایره‌های فوقانی و تحتانی $[\pi$ و $0]$ و $[0$ و $-\pi]$ مجموعاً قطعهٔ $[\pi$ و $-\pi]$ را تشکیل میدهند که یك دورتناوب کسینوس است ، درنتیجه‌تابع $\cos x$ در هرقطعهٔ دلخواهی از $[(2k+1)\pi$ و $2k\pi]$ نزولی (از ۱ تا ۱ —) و در هر قطعهٔ دلخواهی از $[2k\pi$ و $(2k-1)\pi]$ صعودی است (از ۱ — تا ۱) .

مطالب فوق را میتوان باین ترتیب در جدول زیر نشان داد :

مقدار آوند x	...	-2π	$<x<$	$-\pi$	$<x<$	0	$<x<$	π	$<x<$	2π	...
تابع $y=\cos x$	...	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	...

تابع $\sin x$. **قضیه : تابع $\sin x$ در نیمدایرهٔ راست (بسته)** $\left[\frac{\pi}{2}\right.$ و

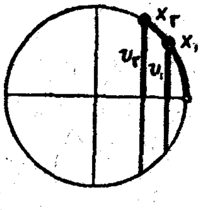
$\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ از ۱− تا ۱ ترقی میکند و در نیمدایرهٔ چپ $\left[\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{3\pi}{2}\right]$ از ۱ تا ۱− تنزل میکند .

اثبات: قطعهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ را به دو قطعهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.0\right]$ و $\left[0\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ تقسیم مـی‌کنیم . در قطعهٔ $\left[0\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ (ربع بستهٔ اول) داریم:

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

چون $\cos x$ در ربع بستهٔ اول نـزولی و $\cos x \geqslant 0$ است ، $\cos^2 x$ هـم نزولی و همراه‌آن عبارت $\sqrt{1-\cos^2 x}$ و بنابراین $\sin x$ صعودی است .

تبصره: صعودی بودن تابع $\sin x$ در قطعهٔ $\left[0\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ را میتوان بطریق هندسی اثبات‌کرد .کافی است دقت‌کنیم (شکل ۷۱) که $2v_1 = 2\sin x_1$ و $2v_2 = 2\sin x_2$ طولهای وترهای مربوط به قوسهای $2x_1$ و $2x_2$ هستند و چون وتر بزرگتر مربوط به قوس بزرگتر است :



ش ۷۱

بازاء $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ داریم :

$$\sin x_1 < \sin x_2$$

در قطعهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.0\right]$ داریم:

$$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$$

و چون در این فاصله $\cos x$ صعودی است ، $\sin x$ هم صعودی خواهد بود .

تبصره: برای اثبات صعودی بودن تابع $\sin x$ در قطعهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.0\right]$ میتوان از خاصیت فردبردن سینوس استفاده کرد : اگر $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$

باشد $0 \leqslant -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$ خواهد بود و بنابراین :

$$\sin(-x_2) < \sin(-x_1) \Longrightarrow -\sin x_2 < -\sin x_1 ،$$

و از آنجا $\sin x_2 > \sin x_1$ خواهد شد .

وقتی‌که تابع در قطعات [۰ و $-\frac{\pi}{2}$] و [$\frac{\pi}{2}$ و ۰] صعودی است

باین معناست که تابع $\sin x$ در قطعهٔ [$\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$] صعودی است .

بنابر این در نیمدایرهٔ راست [$\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$] تابع $\sin x$:

اولا صعودی است :

ثانیا $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ و $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

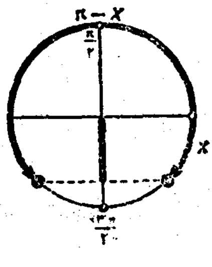
ثالثا بازاء هرمقدار دلخواه m (با شرط $|m|<1$) برای‌مقدارآوند داریم :

$$x = \arcsin m$$

و باین ترتیب $\sin x$ از ۱− تا ۱ ترقی میکند.

برای اینکه یکنوا بودن تابع $\sin x$ را در قطعهٔ [$\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$] جستجو کنیم، کافی‌است توجه‌کنیم که نقاط‌متقارن نسبت به‌محورعرض دارای عرضهای مساوی هستند و بنابراین مقادیـر آوند x و $\pi - x$ (شکل ۷۲ — $x<0$) نقاط متقارن نسبت به محورعرض روی دایرهٔ واحد هستند و سینوسهای مساوی دارند :

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



ش ۷۲

وقتی‌که $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ باشد ، قوسهای $\pi - x_1$ و $\pi - x_2$ (که انتهای آنها قرینهٔ انتهای قوسهای x_1 و x_2 نسبت به محور عرض است) در قطعهٔ [$\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$] قرار می‌

گیرند :

$$-\frac{\pi}{۲} \leqslant \pi - x_۲ < \pi - x_۱ \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

و چون $sin\, x$ در قطعهٔ $\left[\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right]$ صعودی‌است، بدست میآید :

$$sin(\pi - x_۲) < sin(\pi - x_۱)$$

یعنی :

بازاء $\frac{۳\pi}{۲} \geqslant x_۲ > x_۱ \geqslant \frac{\pi}{۲}$ داریم : $sin\, x_۲ < sin\, x_۱$

و بنابراین $sin\, x$ نزولی است .

باین ترتیب **در قطعهٔ** $\left[\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right]$ **تابع** $sin\, x$:

اولا نزولی است،

ثانیا $sin\frac{\pi}{۲} = ۱$ و $sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱$.

ثالثاً هر مقدار دلخواه m (با شرط $|m| < ۱$) متناظر با آوندی مساوی $\pi - arcsin\, m$ است:

$$sin(\pi - arcsin\, m) = sin(arcsin\, m) = m \cdot$$

و بنابراین $sin\, x$ از ۱ تا ۱− تنزل میکند .

قطعات $\left[\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right]$ مجموعاً قطعهٔ $\left[\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right]$ را تشکیل میدهند که یك دورهٔ تناوب سینوس است . بنابراین تابع $sin\, x$ در هر قطعهٔ $\left[۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \text{ و } ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}\right]$ از ۱− تا ۱ ترقی و در هر قطعهٔ $\left[۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \text{ و } ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right]$ از ۱ تا ۱− تنزل‌میکند. نتیجهٔ آنچه را که گفتیم میتوان بوسیلهٔ جدول صفحهٔ بعد نشان داد :

مقدار آوند x	...	$-\frac{۳\pi}{۲}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{۲}$	$<x<$	$\frac{\pi}{۲}$	$<x<$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$<x<$	$\frac{۵\pi}{۲}$	...
تابع $y=\sin x$	...	۱	↘	-۱	↗	۱	↘	-۱	↗	۱	...

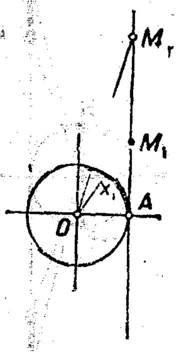
تابع $tg\,x$. قضیه : تابع $tg\,x$ در نیمدایرهٔ راست (باز) $\left(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند .

اثبات : فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right)$ را به دو قسمت $\left[۰ \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right)$ و $\left(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰\right]$ تقسیم می‌کنیم . در ربع اول (نیم باز) $\left[۰ \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right)$ صورت کسر $\left(tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\right.$ غیر منفی و صعودی و مخرج هم مثبت و نزولی است :

بازاء $۰\leqslant x_۱<x_۲<\frac{\pi}{۲}$ داریم : $۰\leqslant \sin x_۱<\sin x_۲$ و

$\cos x_۱>\cos x_۲>۰$ و ازآنجا :

$$\frac{\sin x_۱}{\cos x_۱}<\frac{\sin x_۲}{\cos x_۲}\Longrightarrow tg\,x_۱<tg\,x_۲$$



ش ۷۳

بنابر این وقتی‌که $۰\leqslant x<\frac{\pi}{۲}$ باشد $tg\,x$ صعودی است .

تبصره: صعودی بودن $tg\,x$ را در ربع اول میتوان بطریق هندسی اثبات‌کرد . اگر $۰\leqslant x_۱<x_۲<\frac{\pi}{۲}$ باشد (شکل ۷۳) ، ضلع $OM_۲$ از زاویهٔ $x_۲$ در خارج زاویهٔ $x_۱$ قرار میگیرد و بنابراین $AM_۱<AM_۲$ یعنی $tg\,x_۱<tg\,x_۲$ خواهد بود .

از صعودی بودن تابع $tg\,x$ در فاصلهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ و با توجه باینکه $tg\,x$ تابعی است فرد ، نتیجه میشود که $tg\,x$ در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ هم صعودی است ؛ در حقیقت اگر $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$ باشد، $0 < -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$ خواهد بود و بنابراین :

$$tg(-x_1) > tg(-x_2) \Longrightarrow -tg\,x_1 > -tg\,x_2 \Longrightarrow tg\,x_1 < tg\,x_2 \,.$$

فواصل $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ و $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ مجموعاً فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ را تشکیل میدهند که در آن تانژانت صعودی است .

فرض کنید $N > 0$ عدد مفروض دلخواهی باشد. روی محور تانژانت نقطهٔ $T(1, N)$ را انتخاب می‌کنیم (شکل ۷۴) . اگر $\xi = \mathrm{arc}\,tg\,N$ قوس متناظر آن روی دایرهٔ واحد باشد ، چون تانژانت در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ صعودی است . بازاء مقادیری از x که بزرگتر از ξ و کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشند، نامساوی $tg\,x > N$ برقرار خواهد بود . بنابر این حد چپ $tg\,x$ در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ مساوی $+\infty$ است :

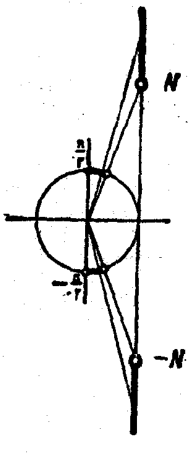
$$\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{حد}}\; tg\,x = +\infty \quad \left(\text{بازاء}\; x < \frac{\pi}{2}\right)$$

و همچنین وقتی که :

$$-\frac{\pi}{2} < x < -\xi = -\mathrm{arc}\,tg\,N$$

باشد $tg\,x < -N$ خواهد بود و بنابراین :

$$\underset{x\to-\frac{\pi}{2}}{\text{حد}}\; tg\,x = -\infty \quad \left(\text{بازاء}\; x > -\frac{\pi}{2}\right)$$



ش ۷۴

باین ترتیب تابع $tg\,x$ در فاصلهٔ :

$\left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right)$:

اولا صعودی است .

ثانیاً : ; $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{۲}} tg\,x = -\infty \left(x > -\frac{\pi}{۲}\right)$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} tg\,x = +\infty \left(x < \frac{\pi}{۲}\right)$.

ثالثاً بازاء هرعدد حقیقی ودلخواه m درنقطهٔ $x = \operatorname{arc}tg\,m$ داریم:

$$tg(\operatorname{arc}tg\,m) = m$$

بنابراین $tg\,x$ در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند .

فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right)$ یك دورهٔ تناوب تانژانت است و بنابراین $tg\,x$ در هرفاصلهٔ $\left(k\pi + \frac{\pi}{۲} \text{ و } k\pi - \frac{\pi}{۲}\right)$ صعودی است (یعنی تمام فواصلی که تانژانت همین است) .

تبصره: بیان مطلب باین نحوکه «تانژانت یك تابع صعودی است» یا «تانژانت همیشه ترقی میکند» نادرست است . اگر مثلا مقادیر ۰ و $\frac{\pi}{٤}$ و $\frac{۳\pi}{٤}$ را برای‌آوند در نظر بگیریم ، داریم : $۰ < \frac{\pi}{٤} < \frac{۳\pi}{٤}$ وضمناً :

$tg\,۰ < tg\,\frac{\pi}{٤}$ و $tg\,\frac{\pi}{٤} > tg\,\frac{۳\pi}{٤}$ و این با یکنوا بودن تابع مغایر است .

مطالبی راکه در مورد تانژانت گفتیم میتوان در جدول زیر نشان داد:

مقدار آوند x	...	$-\frac{3\pi}{2}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{5\pi}{2}$	...
تابع $y=tg\,x$	...	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

تابع $cotg\,x$. قضیه : تابع $cotg\,x$ در فاصلهٔ (π و ۰) از $+\infty$ تا $-\infty$ تنزل میکند .

اثبات : اولا تابع $cotg\,x$ در فاصلهٔ (π و ۰) نزولی است ، زیرادرفاصلهٔ $(\frac{\pi}{2}$ و ۰) تابع $tg\,x>0$ صعودی است، در فاصلهٔ (π و $\frac{\pi}{2}$) هم تابع $tg\,x<0$ صعودی است و $cotg\frac{\pi}{2}=0$ است ، بنابر این $cotg\,x=\frac{1}{tg\,x}$ در هر یك از فواصل [$\frac{\pi}{2}$ و ۰) و (۰ و $\frac{\pi}{2}$] نزولی خواهد بود . یعنی $cotg\,x$ در فاصلهٔ (π و ۰) تنزل میکند . اثبات هندسی این مطلب هم بسادگی و مستقیماً از روی خط کتانژانت بدست میآید .

ثانیاً بازاء هر مقداردلخواه m ازتابع $cotg\,x$ درنقطهٔ $x=arccotg\,m$ داریم :

$$cotg(arccotg\,m)=m.$$

فاصلهٔ (π و ۰) یك دورهٔ کامل تناوب کتانژانت است، بنابراین کتانژانت در هریك از فواصل $((k+1)\pi$ و $k\pi)$ از $+\infty$ تا $-\infty$ تنزل میکند (یعنی در فواصلی که تابع کتانژانت معین است) .

چند مثال :

۱ . فواصلی راکه تابع زیر یکنواست معین کنید :

$$f(x)=sin\,2x$$

حل : تابع مفروض یك تابع متناوب است با دورهٔ تناوب π :

$$sin\,2(x+\pi)=sin(2x+2\pi)=sin\,2x\ .$$

اگر $u=2x$ و $f(x)=\sin u$ فرض کنیم، در قطعهٔ $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ تابع $\sin u$ از -1 تا 1 ترقی میکند و این قطعه متناظر است با قطعهٔ $-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ بهمین ترتیب قطعهٔ $\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{3\pi}{2}$، متناظر باقطعهٔ $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3\pi}{4}$، که درآنجا تابع از 1 تا -1 تنزل میکند و این قطعات یك دورهٔ تناوب تابع را تشکیل میدهند.

نتایجی را که گرفتیم، میتوان در جدول زیر نشان داد :

آوند x	...	$-\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{4}$	...
آوند $u=2x$	...	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{3\pi}{2}$	...
تابع $y=\sin u$	...	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	...

۲. مطلوبست فواصلی که تابع $y=\sin(\cos x)$ یکنواست.

حل : تابع متناوب است با دورهٔ تناوب 2π. در قطعهٔ $0\leq x\leq\pi$ آوند واسطهٔ $u(\cos x)$ از 1 تا -1 تنزل میکند و متناظر با آن y هم از : $\sin 1\approx 0/84$ تا $\sin(-1)\approx -0/84$ تنزل مینماید.

بنابراین تابع مفروض در قطعات $[k\pi$ و $(k+1)\pi]$ یکنواست.

داریم :

آوند x	...	$-\pi$	$<x<$	0	$<x<$	π	$<x<$	2π	...
آوند واسطهٔ $u=\cos x$	...	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	...
تابع $y=\sin u$	...	$-\sin 1$	↗	$\sin 1$	↘	$-\sin 1$	↗	$\sin 1$	...

۳. مطلوبست فواصلی که تابع $y=tg\sqrt{x}$ یکنو است.

حل : رابطهٔ تابع وقتی مفهوم دارد که x منفی نباشد. از فاصلهٔ

$0 \leqslant x < +\infty$ ، مقادیری از x را که بازاء آنها تانژانت مفهوم خود را از دست میدهد ، حذف می‌کنیم . این مقادیر از رابطهٔ زیر بدست میآیند :

$$\sqrt{x}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2$$

فرض می‌کنیم :

$$y=tg\,u \;;\; u=\sqrt{x} \;;\; x=u^2$$

تابع در مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر معین است :

$$\left(0 \text{ و } \frac{\pi^2}{4}\right) , \left(\frac{\pi^2}{4} \text{ و } \frac{9\pi^2}{4}\right) , \ldots , \left(\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}\right.$$
$$\left.\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\right) , \ldots$$

ودر همین فواصل هم تابع مفروض یکنواست ، داریم :

آونـد x	0	$<x<$	$\frac{\pi^2}{4}$	$<x<$	$\frac{2\pi^2}{4}$	$<x<$	$\frac{25\pi^2}{4}$	...
آوند واسطهٔ $u=\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{2}$	...
تابع $y=tg\,u$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

۴. ثابت کنید که معادلهٔ :

$$\sin x=\cos x$$

در قطعـهٔ $\left[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ تنها دارای یك جواب‌است.

حل : روشن است کـه بازاء $x=\frac{\pi}{4}$ مقادیرسینوس‌وکسینوس برابر ند:

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

واین معادله در قطعهٔ $\left[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ جواب دیگری نمیتواند داشته باشد .

در حقیقت تفاضل $\sin x - \cos x$ در قطعهٔ $\left[\cdot \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ صعودی است، زیرا $\sin x$ صعودی و $\cos x$ نزولی (وبنابراین $\cos x$ — صعودی) است . در نتیجه‌تساوی $\sin x - \cos x = \cdot$ تنها بازاء یك مقدار آوند x میتواند برقرار باشد .

۵ . فواصلی راکه تابع زیر معین است ، معلوم کنید :

$$y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$$

حل : فواصل که تابع معین است از شرط زیر بدست میآید :

$$\sin x - \frac{1}{2} \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin x \geqslant \frac{1}{2} \; . \qquad (1)$$

در نیمدایرهٔ راست تساوی $\sin x = \frac{1}{2}$ بازاء $x = \frac{\pi}{6}$ برقرار است وچون سینوس‌صعودی است وقتی‌که $x > \frac{\pi}{6}$ باشد $\sin x > \frac{1}{2}$ و وقتی $x < \frac{\pi}{6}$ باشد $\sin x < \frac{1}{2}$ خواهد بود . در نیمدایرهٔ چپ (بعلت نزولی بودن سینوس) بازاء $x \leqslant \frac{5\pi}{6}$ داریم $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ و بازاء $x > \frac{5\pi}{6}$ داریم $\sin x < \frac{1}{2}$.

بنابراین شرط(۱) دریك دورتناوب به شرط $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$ تبدیل میشود .

باین‌ترتیب‌فواصلی‌که تابع معین‌است مجموعهٔ بی‌نهایت‌قطعات زیرخواهدبود:

$$\left[2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ و } 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$$

۶ . فواصلی‌که تابع زیریکنواست معین‌کنید :

$$y = tg^2 x$$

حل : داریم :

$$y = u^2 \;\; ; \;\; u = tg\, x .$$

در تمام فواصل بصورت $k\pi \leqslant x < k\pi + \frac{\pi}{2}$، که در آنجا $u = tg x$ از صفر تا $+\infty$ ترقی میکند، تابع $y = u^2$ هم از صفر تا $+\infty$ ترقی میکند و در تمام فواصل بصورت $k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant k\pi$، که درآنجا $u = tg x$ از $-\infty$ تا صفر ترقی میکند، تابع $y = u^2$ از ∞ تا صفر تنزل مینماید.

۱۸. اتصال در توابع مثلثاتی

قضیه: هریك از توابع مثلثاتی در هر نقطهٔ دلخـواه متصل است، بشرطیکه این نقطه در حوزه‌ایکه تابع معین است، واقع باشد.

اثبات: هر یك از توابع مثلثاتی را بطور جداگانه در نظر میگیریم.

تابع $\cos x$. حوزه‌ای که کسینوس معین است، عبارتست از مجموعهٔ همهٔ اعدادحقیقی، بنابراین بایستی ثابت کنیم که تابع $\cos x$ بازاء هر مقدار دلخواه آوند متصل است. فرض کنید a، مقدار دلخواهی از آونـد باشد، بایستی ثابت کرد که نمو کسینوس از لحاظ قدر مطلق کوچکتر از هر مقدار مفروض عدد $\varepsilon > 0$ است:

$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon$$

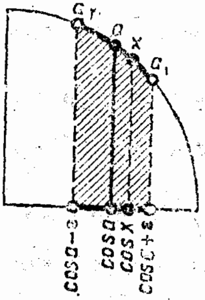
بشرطی که نمو آوند ازلحاظ قدرمطلق کوچکتر از عددی مانند δ باشد:

$$|x - a| < \delta$$

(عدد δ از عدد مفروض ε معین میشود).

ابتدا فرض می‌کنیم که نقطهٔ معرف مقدارآوند a، بر انتهای قطرافقی منطبق نباشد: $a \neq k\pi$. عدد ε را آنقدر کوچك میگیریم که هـر دو نقطهٔ $\cos a - \varepsilon$ و $\cos a + \varepsilon$ در داخل قطر افقی دایرهٔ واحد قرارگیرنـد، یعنی

$1 > \cos a \pm \varepsilon$ ، نقاط a_1 و a_2 بر همان نیمدایره‌ای (فوقانی یا تحتانی) در نظر میگیریم که نقطهٔ a هم روی آن واقع است (شکل۷۵) و تصاویر آنها بترتیب $\cos a + \varepsilon$ و $\cos a - \varepsilon$ باشد . بین قوسهای aa_1 و aa_2 ، آنرا که کوچکتراست δ مینامیم .



ش ۷۵

هر مقدارآوندکه درنامساوی $|x-a|<\delta$ صدق کند ، متناظر با نقطه‌ای از دایرهٔ واحد و واقع برقوسی است که به نقاط a_1 و a_2 محدود است وبنابراین تصویرآن بر محور افقی و داخل پاره خطی خواهد بود که به نقاط $\cos a - \varepsilon$ و $\cos a + \varepsilon$ محدود است، باین ترتیب :

وقتی که $|x-a|<\delta$ باشد داریم :

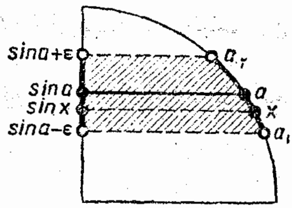
$$\cos x - \cos a < \varepsilon$$

درحالتی که a روی دایرهٔ واحد برانتهای قطر افقی ومثلا بر(A(۱۰۹ منطبق باشد $\cos a = 1$ میشود و بشرط $|x-a|<\delta$ داریم :

$$|\cos x - \cos a| = 1 - \cos x < \varepsilon,$$

که در آن کافی است $\delta = \arccos(1-\varepsilon)$ فرض کنیم .

تابع $\sin x$. سینوس بازاء مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی معین است وبنابراین باید ثابت کرد که تابع $\sin x$ بازاء هر مقدار دلخواه آوند متصل است. اثبات درست شبیه $\cos x$ است با این تفاوت که تصاویر را بجای قطرافقی برقطر قائم پیدا می کنیم (شکل ۷۶) .



ش ۷۶

باین‌ترتیب توابع $\sin x$ و $\cos x$ در هر نقطهٔ واقع درفاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ متصل است .

تابع $tg\,x$. تانـژانت در مجموعـهٔ فـواصل $\left(k\pi-\frac{\pi}{2} \text{ و } k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ معین است. بایستی ثابت کرد که تابع $tg\,x$ در هر یك از این فـواصل متصل است. ابتداء فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ را در نظر میگیریم. فرض کنید a، مقدار مفروضی از آوند در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ باشد. روی محور تانژانت سه نقطهٔ $tg\,a-\varepsilon$ ، $tg\,a$ و $tg\,a+\varepsilon$ راانتخاب و آنها بهمبداءمختصات وصل می کنیم: فرض کنید a_1 ، a و a_2 نقاط متناظر آنها بر دایرهٔ واحد باشند، از دوقوس aa_1 و aa_2، آنرا که کوچکتر است δ میگیریم. اگر $|x-a|<\delta$ باشد، نقطهٔ x بر قوس a_1a_2 قرار میگیرد و متناظر با آن نقطهٔ $tg\,x$ بـر محور تانژانت در فاصلهٔ $(tg\,a+\varepsilon \text{ و } tg\,a-\varepsilon)$ واقع خواهد شد، یعنی:

اگر $|x-a|<\delta$ باشد $|tg\,x-tg\,a|<\varepsilon$ خواهد شد.

بنابراین تابـع $tg\,x$ در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ متصل و با تـوجه اینکه دورهٔ تناوب تـابع $tg\,x$ مساوی π است، در هـر فاصله‌ای از:

$\left(k\pi-\frac{\pi}{2} \text{ و } k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ متصل خواهد بود.

تابع $cotg\,x$. بحث در مورد تابع کتانژانت کاملا شبیه تانژانت است.

تابـع $tg\,x$ در فاصلهٔ $(-\infty \text{ و } +\infty)$ متصل نیست، در حقیقت این تابع در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ معین نیست ودر حدود هر یك از این نقاط تابع نامحدود است، زیرا:

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} |tg\,x|=+\infty$$

بنابراین نقاط $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، نقاط انفصال تانژانت هستند .

در مورد کتانژانت، نقاط انفصال $k\pi$ هستند ، در حدود هر یك از این نقاط ، کتانژانت نامحدود میشود ، زیرا :

$$\text{حد}_{x\to k\pi} |cotg\, x| = +\infty$$

قضیهٔ مربوط به انفصال توابع مثلثاتی را میتوان بصورت زیر هم بیان کرد :

اگر عدد a در حوزه‌ای باشدکه تابع مثلثاتی معین است ، حد تابع مثلثاتی در نقطهٔ a برابر است با مقدارآن در این نقطه :

$$\text{حد}_{x\to a} \sin x = \sin a \text{ ،} \quad \text{حد}_{x\to a} \cos x = \cos a \text{ ،}$$

$$\text{حد}_{x\to a} cotg\, x = cotg\, a \text{ ،} \quad \text{حد}_{x\to a} tg\, x = tg\, a \text{ .}$$

چند مثال :

۱ . مطلوبست :

$$\text{حد}_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x+\cos x}{۱-tg\, x}$$

حل : طبق قانون کلی نظریهٔ حدود داریم :

$$\text{حد}_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x+\cos x}{۱-tg\, x} = \frac{\text{حد}\sin x+\text{حد}\cos x}{۱-\text{حد}\, tg\, x} =$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۳})}{۲(\sqrt{۳}-۱)} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲+\sqrt{۳}) .$$

۲. تابع $\frac{tg\,x}{1-2\sin x}$ در نقاطی منفصل است که :

a) $tg\,x$ مفهوم خود را از دست بدهد و از آنجا $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ ،

b) $1-2\sin x=0$ باشد و از آنجا $\sin x=\frac{1}{2}$ ویا:

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. و در تمام بقیهٔ نقاط ، تابع مفروض متصل است .

۳. تابع $y=\sin x^2$ همیشه متصل است ، زیرا میتوان آنـرا بصورت تابع تابع نوشت :

$$y=\sin u \quad , \quad u=x^2$$

y تابع متصلی است از u و u هم تابع متصلی است از x (قضیهٔ مربوط متصل بودن یك تابع‌تابع).

۱۹. اصل ادامهٔ اتصال ، مقادیر خاص آوند

در نظریهٔ حدود ، اصل ادامهٔ اتصال را باین‌ترتیب بیان می‌کنند :

اگر بازاء $x=a$ تابع $f(x)$ نامعین و بنابراین $f(x)$ مفهوم نداشته باشد، در نقطهٔ a داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ، $x=a$ را در حـوزه‌ای که تابع معین است بحساب میآورند وچنین در نظر میگیرند :

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

بنابراین ، اصل ادامهٔ اتصال متضمن تبدیل تابع $f(x)$ بـه تابع دیگری است که بازای همهٔ مقادیر آوند $x\neq a$ بر تابع $f(x)$ منطبق و در نقطهٔ a هم متصل است .

میدانیم که اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ a دارای حدی باشد ، این حد منحصر بفرد است و بنابراین ادامهٔ اتصال تنها بیك طریق میتواند انجام گیرد (اگر ممکن باشد) و ارتباطی بروش تعیین حد ندارد .

در مثلثات هم میتوان از اصل ادامهٔ اتصال ، در مورد توابعی که روی آوندآن اعمال مثلثاتی انجام گرفته است ، استفاده کرد . وقتی که با انتخاب مستقیم مقدار $x=a$ ، عبارتی مفهوم خود را از دست بدهد ، چنین مقداری از آوند را **مقدار خاص** گویند و بررسی میکنند که آیا این عبارت در نقطهٔ a دارای حدی هست یا نه ، این حد را (درصورتیکه وجود داشته باشد) بعنوان مقدار عبارت مفروض در نقطهٔ $x=a$ در نظر میگیرند .

با استفاده از اصل ادامهٔ اتصال ، میتوان بدون هیچ مانعی ، در موارد مهم عملی ، صورت و مخرج کسرها را بهمقسومعلیه مشترکشان کوچك کرد . مثلا فرض کنید توابع $F_1(x)$ ، $F_2(x)$ و $\varphi(x)$ در نقطهٔ a متصل باشند . و ضمناً $\varphi(a)=0$ و $F_2(a)\neq 0$ و در نقاط نزدیك به a هم $\varphi(x)\neq 0$ باشد ، در چنین حالتی عبارت :

$$U(x)=\frac{\varphi(x)F_1(x)}{\varphi(x)F_2(x)}$$

با قراردادن $x=a$ بطورمستقیم مفهوم خودرا از دست میدهد. عبارت:

$$V(x)=\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

(در هرحالتیکه به نقطهٔ a نزدیك باشیم) با عبارت $U(x)$ بازاء مقادیر $x\neq a$ برابر است و درنقطهٔ $x=a$ مفهوم خود را از دست نمیدهد.

با استفاده از اصل ادامهٔ اتصال داریم :

$$U(a)=\underset{x\to a}{\text{حد}}\, U(x)=\text{حد}\frac{\varphi(x)F_1(x)}{\varphi(x)F_2(x)}=\text{حد}\frac{F_1(x)}{F_2(x)}=$$

$$=\frac{F_1(a)}{F_2(a)}=V(a)\,.$$

بنابراین تساوی :
$$\frac{\varphi(x)F_1(x)}{\varphi(x)F_2(x)}=\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

بازاء همهٔ مقادیر x صادق است (در هرحالتی که به نقطهٔ a نزدیك باشیم)، که درنتیجه امکان میدهد، صورت و مخرج کسررا به مقسوم‌علیه مشترکشتان ساده کنیم .

چند مثال :

۱. تساوی :
$$tg\,x=\frac{1}{cotg\,x}$$

مقدمتاً بازاء همهٔ مقادیر x (کـه برای آنها هردو تابع $tg\,x$ و $cotg\,x$ مفهوم دارند) صحیح است . اصل ادامهٔ اتصال اجازه میدهدکـه مقادیر $x=k\pi$ را هم (که بازاء آنهـا $cotg\,x$ مفهوم خود را از دست میدهد) از آنها حذف نکنیم . در حقیقت بازاء $x=k\pi$ مقدار سمت چپ تساوی مساوی صفر و مقدار سمت راست تساوی هم مساوی صفر میشود .

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{1}{cotg\,x}=0 \qquad (\text{زیرا } \lim cotg\,x|=+\infty)$$

۲. برای عبارت :
$$U(x)=\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{tg^2 x-1}$$

مقادیر خاص ، چنین‌اند :

a) $\sin x=\cos x \implies x=k\pi+\frac{\pi}{4}$;

b) $tg\,x=\pm 1 \implies x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$;

c) مفهوم‌خودرا ازدست‌میدهد $tg\,x \implies x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

با ساده‌کردن عبارت خواهیم داشت (مثال ۵ بند ۱۶ را به‌بینید) :

$$\frac{\sin x^2}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{tg^2 x-1}=\sin x+\cos x \,.$$

سمت‌راست این تساوی بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x متصل است وضمناً :

$$\lim_{x\to a} U(x)=\sin a+\cos a \ ;$$

یعنی برای محاسبهٔ $U(a)$ کافی است که در سمت راست $x=a$ قرار دهیم . باین ترتیب درحالتهای خاص داریم :

$$U(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2} \ ; \ U(\frac{\pi}{2})=1 \ ; \ U(-\frac{\pi}{4})=0 \ ,$$

۳. تساوی :

$$\frac{1}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x}=\frac{1+tg^2x}{a tg^2x+b tg x+c}$$

(مثال ۷ بند ۱۶) وقتی‌که $a\neq 0$ باشد ، بازاء $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ هم (که مقادیر خاص سمت راست تساوی هستند) صادق است . در حقیقت بازاء $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ سمت چپ متصل و برابر $\frac{1}{a}$ است و بنابراین باکمك اصل ادامهٔ اتصال ، حد سمت راست هم همین مقدار خواهد بود .

تبصره : اگر حد راست تساوی را مستقیماً بدست آوریم ، بهمین نتیجه میرسیم :

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{1+tg^2x}{a tg^2x+b tg x+c}=\lim_{|z|\to+\infty}\frac{1+z^2}{az^2+bz+c}=\frac{1}{a}$$

بازاء $a=0$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ هردوطرف تساوی‌مفهوم‌خود را از دست میدهند ، و چون داریم :

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{b\sin x\cos x+c\cos^2x}\right|=+\infty$$

دراین نقاط ، عبارت مفروض دارای مقداری نیست .

۴. مقادیر خاص آوند را برای تابع زیر معین کنید :

$$f(x)=\frac{\sin x+tg x}{\cos x+tg tg x}$$

درمثال ۹ بند ۱۶ دیدیم که مقادیر خاص آوند برای این تابع، مقادیری هستند که در انتهای قطرهای افقی وقائم واقع باشند :

a) نقــاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (دوانتهای قطرقائم) درحوزه‌ای که $f(x)$ معین است ، واقع نیستند ، زیرا :

$$\underset{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}{\text{حـــد}}|f(x)|=+\infty \quad ;$$

b) نقاط $x=k\pi$ (دوانتهای قطرافقی) بایستی درحوزه‌ای باشد که $f(x)$ معین است، زیرا :

$$f(k\pi)=\underset{x\to k\pi}{\text{حـــد}} f(x)=\text{حد}\frac{\sin x+tg x}{\cos x+cotg x}=0$$

۵. برای تابع :

$$P(x)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$$

(مثــال ۱۱ بند ۱۶) ، نقاط $k\frac{\pi}{2}$ (انتهای قطرهای افقی و قائم) در حوزه‌ای که تابع معین است ، واقع نیستند . در حقیقت ، اینهــا نقاط انفصال نوع اول هستند .

و بنابراین $\underset{x\to k\frac{\pi}{2}}{\text{حـــد}} P(x)$ ، وجود ندارد.

۶. اتحاد زیر را درنظر میگیریم :

$$\log \sin^{2} x = 2 \log \sin x$$

سمت چپ تساوی به‌تنهائی درفاصلهٔ: $(k\pi$ و $(k+1)\pi)$ مفهوم‌دارد.
وسمت راست تساوی به تنهائی درفاصلهٔ $(2k\pi$ و $(2k+1)\pi)$ مفهوم دارد ، کــه در آنجا $\sin x > 0$ است . نقطه‌ای‌را درنظرمیگیریم که در آنجـا $\sin x < 0$ باشد و مثلا فرض می‌کنیم $x = \frac{3\pi}{2}$ ، دراین نقطه‌سمت چپ‌دارای مفهوم و سمت راست بــدون مفهوم است . در اینحالت اصل ادامهٔ اتصال بکار نمیرود ، درحقیقت :

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \log \sin x$$

مفهوم ندارد ، زیــرا نه نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$ و نـه نقاط مجاورآن در حوزه‌ای کــه تابع $\log \sin x$ معین است ، واقع نیستند .

۷. مقدار تابع : $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

درنقطهٔ $x = 0$ برابرصفراست. درحقیقت بنابراصل ادامهٔ اتصال‌داریم:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(عامل x حدی مساوی صفردارد و عامل $\sin \frac{1}{x}$ هم محدود است) .

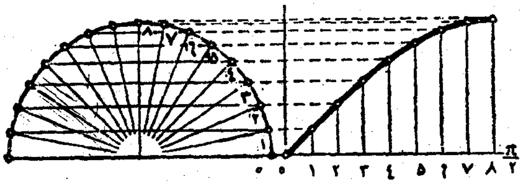
۲۰. منحنی توابع مثلثاتی

برای رسم منحنی توابع مثلثاتی‌کافی است ، آنــرا در فاصلهٔ یك دور تناوب تابع‌مفروض‌رسم کنیم وسپس با تکرار آن بطورمتناوب،منحنی‌کامل‌را بدست آوریم. اگر بتوانیم منحنی تابع را در ربع اول رسم‌کنیم ، خواهیم توانست

باکمك خواص توابع مثلثاتی منحنی آنرا درسایر ربعها هم بدستآوریم .

منحنی تابع $y = \sin x$ را در فاصلهٔ ($\infty -$ و $\infty +$) منحنی سینوسی (سینوسوئید) گویند .

تابع $\sin x$ را در قطعهٔ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ در نظر میگیریم ، در این قطعه ، تابع از صفر تا واحد ترقی میکند . برای دقیق کردن شکل منحنی میتوان از مقادیر معلوم سینوس استفاده کرد (بند ۱۱ را ببینید) . برای اینکه منحنی دقیقتر شود بایستی از مقادیر توابع مثلثاتی که در جدولها ضبط شده است استفاده نمود. رسم منحنی را میتوان بطریق هندسی با هردقت لازم رسم نمود . این طریقهٔ رسم در شکل ۷۷ نشان داده شده است . ربع اول دایرهٔ واحد و همراه با آن فاصلهٔ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ را به قسمتهای مساوی تقسیم میکنیم (درشکل ۷۷ به ۸ قسمت کردهایم) .



ش ۷۷

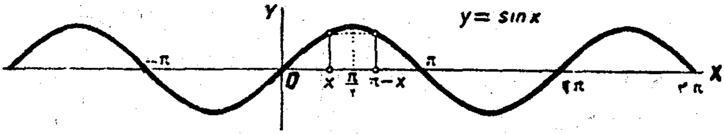
از انتهای نقاط تقسیم واقع در فاصلهٔ بستهٔ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ عمودهائی برمحورطول و باندازهٔ سینوس قوسهای مربوطه، اخراج میکنیم. انتهای این عرضها روی منحنی قرار خواهند داشت . در ربع دوم مقدار سینوس از ۱ تا صفر تنزل میکند ، درنقاط x و $\pi - x$ (واقع بردایرهٔ واحد و متقارن‌نسبت به قطر قائم) مقادیر سینوس برابرند :

$$\sin x = \sin(\pi - x) .$$

بنابراین ، منحنی سینوس در ربع دوم ، قرینهٔ منحنی ربع اول نسبت

بخطی است که از نقطهٔ $(\frac{\pi}{2}$ و ۰$)$ موازی محور عرض رسم شود . از خاصیت فرد بودن سینوس $\sin(-x) = -\sin x$ نتیجه میشود که منحنی سینوسی نسبت به مبداء مختصات متقارن است . منحنی را در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant \pi$ رسم می کنیم وسپس قرینهٔ آنرا نسبت بهمبداء مختصات در فاصلهٔ بستهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ ادامه میدهیم، منحنی در فاصلهٔ بستهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ بدست میآید که یکدور کامل تناوب سینوس است . برای بقیهٔ منحنی سینوسی کافی است ، منحنی بدست آمده را بطور متناوب در فواصل بستهٔ زیر ادامه دهیم (شکل ۷۸) :

$\dots ; [-5\pi$ و $-3\pi] ; [-3\pi$ و $-\pi] ; \dots ; [3\pi$ و $5\pi] ; [\pi$ و $3\pi]$



ش ۷۸

منحنی تابع $y = \cos x$ را هم میتوان مستقیماً بدست آورد . خصوصیات منحنی را میتوان از خواص کسینوس درك کرد : تابع $\cos x$ در فاصلهٔ بستهٔ $[0$ و $\frac{\pi}{2}]$ از ۱ تا صفر ، و در فاصلهٔ بستهٔ $[\frac{\pi}{2}$ و $\pi]$ از صفر تا ۱ــ تنزل میکند . منحنی نسبت بهمحور عرض متقارن است ، زیرا تابع $\cos x$ زوج است . برای دقیق کردن منحنی بایستی از جدول مقادیر کسینوس استفاده کرد .

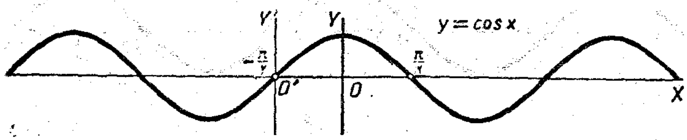
منحنی کسینوس را بطریق هندسی و شبیه سینوس هم میتوان بدست آورد : برای اینمنظور بایستی اندازهٔ تصویر شعاعهای دایرهٔ واحد برقطر افقی را عرض نقاط تقسیم درنظر گرفت .

از تساوی : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

(به‌بند ۲۳ مراجعه کنید) نتیجه میشود که منحنی تابع $\sin x$ و

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$$

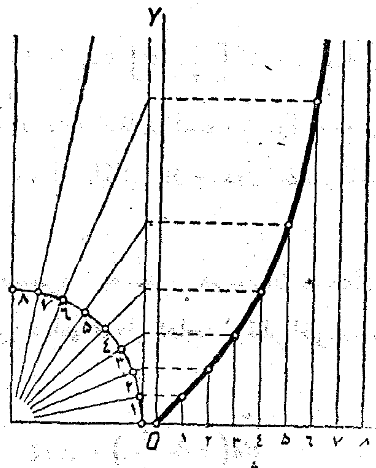
هردو ازیك نوع (سینوسی) هستند. بخصوص منحنی‌تابع $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)$ همان منحنی $y = \sin x$ است بشرطی‌که مبداء را باندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ روی محور طول سمت‌چپ منتقل کنیم. درحقیقت اگر فرض کنیم $x = x' - \frac{\pi}{۲}$ و منحنی سینوسی $y = \sin x'$ را بسازیم، اگر از طول نقاط این منحنی باندازه $\frac{\pi}{۲}$ کم کنیم، طول نظیر منحنی مجهول ما بدست میآید وعرضهای نقاط متناظر دو منحنی هم با یکدیگر برابر است (شکل ۷۹)



ش ۷۹

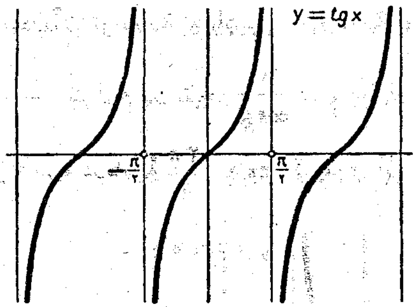
منحنی تابع $y = tg\, x$ را منحنی تانژانتی (تانژانتوئید) گویند.

تانژانت درفاصلهٔ $۰ \leqslant x < \frac{\pi}{۲}$ از صفر تا $+\infty$ ترقی میکندو بنابراین منحنی آن دارای مجانب قائم $x = \frac{\pi}{۲}$ است. برای دقیق‌تر کردن منحنی، بایستی از مقادیر معلوم تانژانت و همچنین از جدول مثلثاتی استفاده کرد. بطریق هندسی هم میتوان

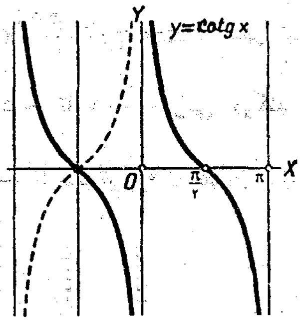


ش ۸۰

منحنی تانژانت را تا هردرجه دقت‌دلخواه رسم کرد ،کافی است ، همانطورکه در شکل ۸۰ دیـده میشود، ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و متناظـر با آن فاصلهٔ $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ را به‌چند قسمت مساوی (روی شکل به۸قسمت) تقسیم نمودو مقادیر تانژانت قوسهارا بعنوان عرضهای نقاط متناظر درنظر گرفت و چون تانژانت تابعی فرد و نسبت به مبداء مختصات متقارن است‌کافی است منحنی آنـرا در فاصلهٔ $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ داشته باشیم تا از قرینهٔ آن نسبت به مبداء مختصات منحنی را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}<x\leqslant 0$ هم بدست آوریم . با رسم منحنی در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ و ادامهٔ آن‌بطور متناوب (با دورهٔ تناوب π) شکل ۸۱را بدست خواهیم آورد .



ش ۸۱



ش ۸۲

رسم منحنی نمایش تابع $y=cotg\,x$ را بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم (شکل۸۲). فقط‌متذکرمیشویم که باتوجه به‌رابطهٔ $cotg\,x=-tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ (به‌بند ۲۲ مراجعه‌کنید) میتوان با انتقال منحنی تانژانت باندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ بسمت چپ و سپس رسم قـرینهٔ آن نسبت به محـور طـول ، منحنی کتانژانت را بدست آورد .

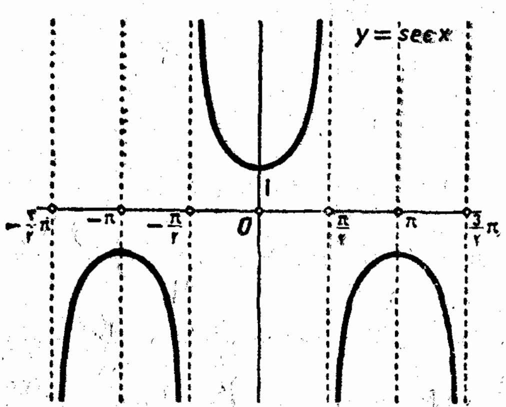
چند مثال :

۱. مطلوبست رسم منحنی: $y = \sec x$

حل : حوزه‌ای که در آن تابع معین است از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر تشکیل شده است :

$$k\pi - \frac{\pi}{۲} < x < k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

تابع متناوب است ودورهٔ تناوبی مساوی ۲π دارد و بنابراین کافی است آنرا در دوفاصلهٔ $(\frac{\pi}{۲}$ و $-\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ رسم کنیم . در فاصلهٔ $۰ \leqslant x < \frac{\pi}{۲}$ تابع $\cos x$ از ۱ تا صفر تنزل میکند و بنابراین $y = \frac{۱}{\cos x}$ در همین فاصله از ۱ تا $+\infty$ ترقی مینماید . بهمین ترتیب تابع $\sec x$ در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{۲} < x \leqslant ۰$ از $+\infty$ تا ۱ تنزل میکند (کافی است بخاصیت زوج بودن آن توجه داشته باشیم) . در فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲} < x \leqslant \pi$ تابع $\cos x$ از صفر تا -۱ تنزل و در نتیجه $\sec x = \frac{۱}{\cos x}$ از $-\infty$ تا -۱ ترقی میکند و بالاخره درفاصلهٔ $\pi \leqslant x < \frac{۳\pi}{۲}$ کسینوس از -۱ تا صفر ترقی و $\sec x$ از -۱

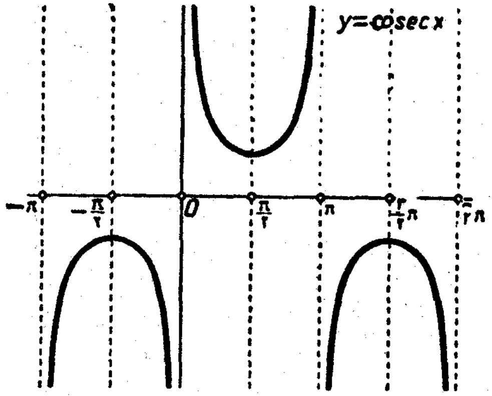


ش ۸۳

تا ∞ — تنزل مینماید .

منحنی سکانت در شکل ۸۳ داده شده و برای دقیق کردن آن بایستی از مقادیر معلوم تابع استفاده کرد .

۲. در شکل۸۴ منحنی‌تابع $y = \text{cosec}x$ داده‌شده است و بحث دربارهٔ آنرا بعهدهٔ خواننده میگذاریم .



ش ۸۴

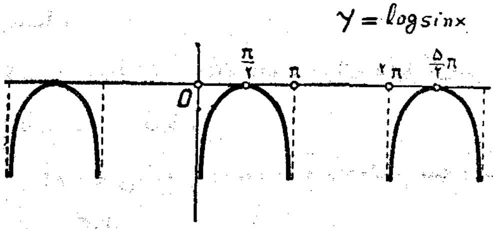
۳. مطلوبست منحنی تابع : $y = log_a(sin x)$ $(a>1)$

حل : حوزه‌ای که تابع در آن معین است از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل بصورت زیر تشکیل شده است :

$$(2k\pi \text{ و } (2k+1)\pi)$$

تابع‌دورهٔ تناوبی مساوی 2π دارد و بنابراین کافی است منحنی آنرا در فاصله‌ای از یک‌دور تناوب که تابع دارای مفهوم است رسم نمائیم . در فاصلهٔ $0<x<\frac{\pi}{2}$ سینوس از صفر تا ۱ و $log_a sin x$ از $-\infty$ تا صفر ترقی‌میکند.

در فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ سینوس از ۱ تا صفر و $log_a sin x$ از صفر تا $-\infty$ تنزل میکند . از نامساوی $sin x<1$ نتیجه میشود که $y<0$ است و $y = 0$ (بازاء $x = \frac{\pi}{2}$) ماکزیم تابع است .



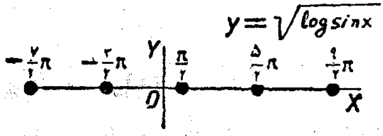
ش ۸۵

منحنی تابع $\log\sin x$ درشکل ۸۵ رسم شده است (بهتراست برای‌دقت رسم، جدولی ازمقادیرتابع $\log\sin x$ بازاء آوندهای $x=۰;۰/۱;۰/۲,\ldots$ با استفاده از جدول لگاریتم توابع مثلثاتی تنظیم کنید).

۴. نمایش تابع $y=\sqrt{\log_a \sin x}$ را پیدا کنید.

حل: مقادیرقابل قبول x ازنامساوی $\log_a \sin x \geqslant ۰$ بدست میآید ،ولی باتوجه به‌تمرین‌قبل‌داریم: $\log_a \sin x \leqslant ۰$ وبنابراین تنهامقادیری‌ازx که بازاء $\log_a \sin x=۰$ باشدقابل‌قبول‌است‌واز آنجا نقاط $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ بدست‌میآید.

یعنی‌مقادیرقابل‌قبولx ازنقاط‌منفرد $x=۲k+\frac{\pi}{۲}$ تشکیل شده است که بازاء آنهــا $y=۰$ است و نمایش تغییرات تابع عبارتست از نقاط منفردی واقــع برمحور طول (شکل ۸۶).



ش ۸۶

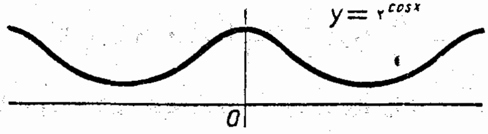
۵. منحنی‌تابع $y=۲^{\cos x}$ را رسم کنید.

حل: تابــع در فــاصلهٔ $(+\infty$ و $-\infty)$ معین است. داریم:

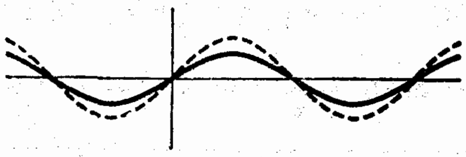
آوند x	۰	<x<	π	<x<	۲π
آوند واسطهٔ $u=\cos x$	۰	↘	−۱	↗	۱
تابع $y=۲^u$	۲	↘	$\frac{۱}{۲}$	↗	۲

دورهٔ تناوب تابع مساوی 2π است و منحنی آن هم درشکل ۸۷ رسم شده است .

۶. منحنی تابع $y = sin(sin x)$ را رسم کنید .



ش ۸۷



ش ۸۸

حل : تابع درفاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ معین است . تابع فرد ومتناوب با دورهٔ تناوب 2π است. درفاصلهٔ بستهٔ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ تابع $sin x$ از صفر تا ۱ و تابع $y = sin(sin x)$ از صفر تا $sin 1 \approx 0/84$ ترقی میکند . درفاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\pi\right]$ تابع مفروض از ۱ تا صفر تنزل میکند (شکل ۸۸)، در شکل منحنی نقطه‌چین منحنی سینوسی است . برای رسم منحنی در فاصلهٔ بستهٔ $[-\pi$ و $0]$ کافی است که قرینهٔ منحنی را درفاصلهٔ بستهٔ $[0$ و $\pi]$ نسبت به مبداء مختصات پیدا کنیم . منحنی تابع با ادامهٔ متناوب منحنی بدست آمده درفاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ بدست میآید.

۷. منحنی تابع زیر را رسم کنید :

$$y = \frac{1}{tg^2 x - 2 tg x + 2}$$

حل : تابع متناوب و دارای دورهٔ تناوبی مساوی π است . مقدار تابع در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (با توجه به اصل ادامهٔ اتصال) برابر صفر است، زیرا داریم :

$$\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}} |tg x| = +\infty$$

و در نتیجه :
$$\underset{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}{\text{حد}}\ \frac{1}{tg^{2}x-2tgx+2}=0$$

تابع را در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ جستجو می‌کنیم . مخرج کسر را بصورت زیر تغییرداده و آوند واسطه را انتخاب می‌کنیم :

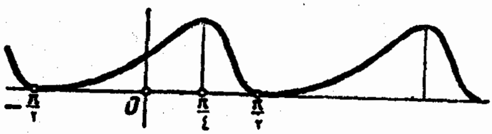
$$y=\frac{1}{(tgx-1)^{2}+1}=\frac{1}{(u-1)^{2}+1}$$

بازاء $u=tgx=1$ حداقل مقدار برای مخرج و حداکثر مقدار برای y بدست میآید که ازآنجا $arctg1=\frac{\pi}{4}$ خواهد شد . داریم :

آوند x	$-\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$
آوند واسطهٔ $u=tgx$	$-\infty$	↗	۱	↗	∞
تابع $y=\frac{1}{(u-1)^{2}+1}$	۰	↗	۱	↘	۰

منحنی در شکل ۸۹ داده شده است .

۸. مطلوبست رسم منحنی تابع $y=\sin x^{2}$



ش ۸۹

(منحنی «فرنل» که در فیزیك مورد استعمال دارد).

حل : تابع در فاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$) معین است . تابع زوج است وبنابراین کافی است منحنی آنرا درفاصلهٔ $0<x<+\infty$ بدست‌آوریم. آوند واسطهٔ $u=x^{2}$ را انتخاب می‌کنیم که در اینصورت $y=\sin u$ خواهد شد .

فواصلی راکه تابع یکنوا است معین می‌کنیم :

آوند x	0	$<x<$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{5\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{7\pi}{2}}$	...
آوند واسطهٔ $u=x^2$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	$\frac{5\pi}{2}$	↗	$\frac{7\pi}{2}$	...
تابع $y=\sin u$	0	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	...

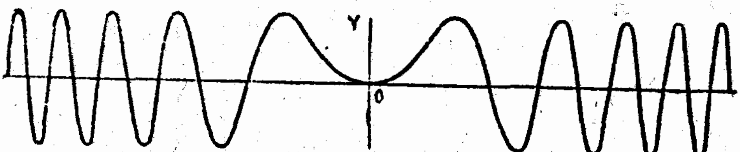
بطورکلی y درفاصلهٔ بستهٔ $\sqrt{\frac{4k-1}{2}\pi}\leq x\leq\sqrt{\frac{4k+1}{2}\pi}$

از ۱— تا ۱ ترقی ودرفاصلهٔ بستهٔ $\left[\sqrt{\frac{4k+1}{2}\pi}\right.$ و $\left.\sqrt{\frac{4k+3}{2}\pi}\right]$

از ۱ تا ۱ — تنزل میکند . منحنی محور طول را درنقاطی قطع میکندکه $u=x^2=k\pi$ واز آنجا $x=\sqrt{k\pi}$ باشد ، متذکر میشویم‌که فاصلهٔ بین دونقطهٔ تلاقی متوالی منحنی با محور طول حدی مساوی صفردارد :

$$\text{حد}\ [\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}]=\text{حد}\ \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}=0$$

اگرمنحنی را در فاصلهٔ ($\infty+$ و 0) رسم‌کنیم ، میتوان قرینهٔ آنرا نسبت به مبداء مختصات بدست‌آورد تا منحنی در فاصلهٔ (0 و $\infty-$) هم بدست آید (شکل ۹۰) .



ش ۹۰

تبصره: از نامساوی $|\sin x^2|<x^2$ نتیجه میشودکه منحنی در حوالی مبداء مختصات بین سهمی $y=x^2$ و محور طول قرار گرفته است .

۹. مطلوبست رسم منحنی $y=\cos\frac{۱}{x}$.

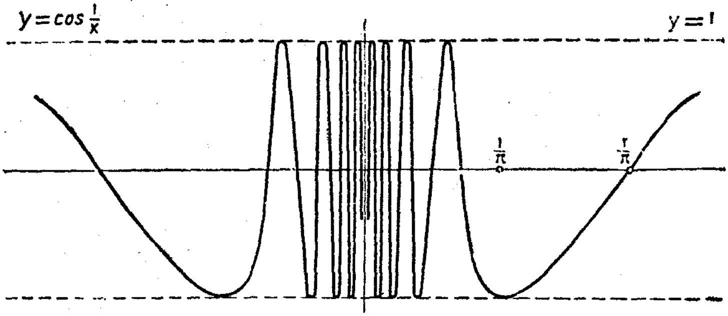
حل : تابع دردوفاصلهٔ $۰>x>-\infty$ و $+\infty>x>۰$ معین‌است. تابع زوج است وبنابراین‌کافی است منحنی را درفاصله ($+\infty$ و ۰) جستجو کنیم . نقاط تلاقی منحنی با محور طول از تساوی $\cos\frac{۱}{x}=۰$ بدست‌میآید که از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{x}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \implies x=\frac{۲}{(۲k+۱)\pi}$$

تابع محدود است، زیرا $-۱\leqslant\cos\frac{۱}{x}\leqslant ۱$ و بنابراین منحنی‌آن‌محدود به دو خط $y=\pm ۱$ است . حداکثر مقدار تابع برابر واحد است وآن‌وقتی است‌که $\cos\frac{۱}{x}=۱$ یعنی $\frac{۱}{x}=۲k\pi$ و $x=\frac{۱}{۲k\pi}$ باشد . حداقل مقدار تابع برابر -۱ است‌که در آنصورت خواهیم داشت $\cos\frac{۱}{x}=-۱$ یعنی $\frac{۱}{x}=(۲k+۱)\pi$ و یا $x=\frac{۱}{(۲k+۱)\pi}$ ، برای تعیین فواصلی‌که تابع یکنواست ، آوند واسطهٔ $u=\frac{۱}{x}$ را انتخاب می‌کنیم ، داریم :

آوند x	...	$\frac{۱}{۴\pi}$	$<x<$	$\frac{۱}{۳\pi}$	$<x<$	$\frac{۱}{۲\pi}$	$<x<$	$\frac{۱}{\pi}$	$<x<$	∞
آوند واسطهٔ $u=\frac{۱}{x}$	...	۴π	↘	۳π	↘	۲π	↘	π	↘	۰
تابع $y=\cos u$	...	۱	↘	-۱	↗	۱	↘	-۱	↗	۱

منحنی تابع در شکل ۹۱ داده شده است . نقطهٔ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال تابع (نوع‌دوم) است و درین نقطه تابع دارای حدی نیست (نه محدود است و نه نامحدود) .



ش ۹۱

۲

قضایای مجموع و نتایج آنها

۲۱. قضایای مجموع

قضایای مجموع برای توابع مثلثاتی ثابت میکنند که **میتوان توابع مثلثاتی مجموع (یاتفاضل) دوجمله را بصورت جبری برحسب توابع مثلثاتی هریك از جملات نوشت** ٭.

قضایای مجموع با بدست آوردن روابط مربوطه اثبات میشوند.

در اینجا ده اثبات مختلف ازقضیهٔ مجموع را ذکرمی کنیم. اثبات اول براساس تعبیرمختصاتی توابع مثلثاتی و اثبات دوم بر اساس قضایای تصویر قرار دارد.

قضیهٔ اصلی: برای هرمقدار دلخواه αوβ روابط زیر قرار است:

برای کسینوس:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\alpha \qquad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{\alpha-\beta})$$

و برای سینوس:

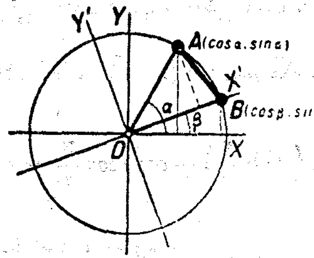
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\beta\sin\beta \qquad (S_{\alpha-\beta})$$

٭) نبایستی تصورکرد که وجود چنین روابطی واضح است، زیرا مثلا لگاریتم مجموع دو جمله یعنی $\log(x+y)$ را نمیتوان بصورت جبری برحسب $\log x$ و $\log y$ بیان کرد. و این مطلب بااین جملهٔ معمولی (که تاحدی غیر دقیق هم هست) تطبیق میکندکه: «نمیتوان لگاریتم مجموع را محاسبه کرد».

اثبات اول : A و B را نقاطی از دایرهٔ واحد ، که معرف قوسهای αو β باشند ، فرض می‌کنیم . مختصات نقاط Aو B چنین‌اند (شکل ۹۲) :

$$x_A = \cos\alpha \;;\; y_A = \sin\alpha \;;$$
$$x_B = \cos\beta \;;\; y_B = \sin\beta \;;$$



ش ۹۲

مربع فاصلهٔ بین نقاط Aو B را باکمك رابطهٔ‌کلی فاصلهٔ دو نقطه در دستگاه مختصات محاسبه‌می‌کنیم (بند ۳ را به‌بینید) :

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 +$$
$$+ (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) .$$

محورها را بازاء زاویهٔ β دوران میدهیم، دراینصورت محورجدیدطول Ox' برجهت شعاع OB ، یعنی برجهت ضلع انتهائی زاویهٔ β ، منطبق‌میشود و شعاع OA با محور Ox' زاویهٔ $\alpha - \beta$ را خواهد ساخت. دردستگاه‌جدید، مختصات نقاط A و B چنین است :

$$x'_A = \cos(\alpha - \beta) \;;\; y'_A = \sin(\alpha - \beta) \;;\; x'_B = 1 \;;\; y'_B = 0$$

در دستگاه $x'Oy'$ هم‌مربع‌فاصلهٔ بین‌نقاط Aو B را محاسبه می‌کنیم :

$$AB^2 = (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 +$$
$$+ [\sin(\alpha - \beta)]^2 = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)] .$$

با مساوی قراردادن دومقداری‌که برای AB^2 بدست آوردیم ، رابطهٔ $(C_{\alpha-\beta})$ بدست میآید و اگر در رابطهٔ $(C_{\alpha-\beta})$ مقدار β را به $-\beta$ تبدیل کنیم رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ بدست خواهدآمد :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

تبصره : اثبات فوق کلی و برای هرمقدار α و β صحیح است ؛ در

حقیقت‌وقتی که زاویهٔ شعاع OA با محور Ox' را $\beta - \alpha$ گرفتیم، بنا برقاعدهٔ کلی جمع زوایا ، برای‌هرمقدار دلخواهی از αوβ صحیح است ، رابطهٔفاصلهٔ بین دونقطه هم به‌جای دونقطهٔ AوB بستگی ندارد ورابطه‌ای‌کلی است .

حالا اگردر رابطهٔ $(C_{\alpha-\beta})$ حالت خاص $\beta = \frac{\pi}{۲}$ رادرنظر بگیریم،

داریم :
$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{۲} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{۲} .$$

و چون $\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$ و $\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$ است ، میشود :

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right) = -\sin\alpha \qquad (۱)$$

اگر در رابطهٔ (۱)، α را به $\alpha+\frac{\pi}{۲}$ تبدیل کنیم ، خواهیم داشت :

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right) = -\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)+\frac{\pi}{۲}\right] = -\cos(\alpha+\pi) =$$
$$= -(\cos\alpha\cos\pi - \sin\alpha\sin\pi) = \cos\alpha$$

یعنی :
$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right) = \cos\alpha \qquad (۲)$$

برای اثبات قضیهٔ مجموع برای سینوس ، دررابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ آوند α را به $\alpha+\frac{\pi}{۲}$ تبدیل می‌کنیم میشود :

$$\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)+\beta\right] = \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)\cos\beta - \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)\sin\beta =$$
$$= -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$ با توجه به‌روابط (۱) و (۲)

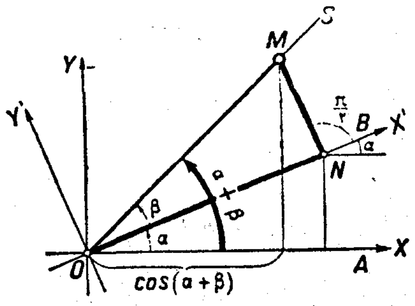
از طرف دیگر :

$$\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)+\beta\right] = \cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{۲}\right] = -\sin(\alpha+\beta)$$

که با مساوی قراردادن مقادیر بدست‌آمده ، رابطهٔ $(S_{\alpha+\beta})$ بدست‌میآید.

رابطهٔ $(S_{\alpha-\beta})$ هم با تبدیل β به $-\beta$ دررابطهٔ $(S_{\alpha+\beta})$ بدست خواهد آمد .

تبصره : اگر روابط تبدیل توابع مثلثاتی (به بند ۲۲ مراجعه شود) بدون ارتباط با قضیهٔ مجموع و بطور مستقل اثبات شوند ، دیگر احتیاجی نیست که روابط (۱) و (۲) را حالتهای خاصی از رابطهٔ مجموع بدانیم و میتوان از آنها بعنوان روابط مفروض استفاده کرد . دراکثر کتابهای درسی هم بهمین نحو عمل می‌کنند .



ش ۹۳

اثبات دوم : از ضلع انتهائی زاویهٔ α زاویهٔ β را میسازیم (شکل۹۳). OS را ضلع انتهائی زاویهٔ β فرض کنید . نقطهٔ M را روی نیم خط OS و بفاصلهٔ واحد از O انتخاب‌می‌کنیم: $|OM|=1$.

کسینوس زاویهٔ $\alpha+\beta$ عبارتست از تصویر بردار OM بر Ox ضلع ابتدائی زاویهٔ α :

$$\cos(\alpha+\beta) = (\text{تصویر} OM \text{ بر } Ox)$$

برای زاویهٔ β ، محور ox' محور افقی‌است که برضلع انتهائی زاویهٔ α واقع است . دستگاه محورهای متعامد $x'Oy'$ را میتوان از روی دستگاه xOy را با دوران باندازهٔ زاویهٔ α بدست‌آورد .

ON را تصویر بردار OM برمحور Ox' فرض‌می‌کنیم، بردار OM را میتوان مجموع بردارهای ON و NM دانست. خط شکستهٔ ONM را بر محور Ox تصویر می‌کنیم ، طبق قضیهٔ مربوط به تصویر خط شکسته داریم : (۳) $\cos(\alpha+\beta) = (\text{تصویر} ON \text{ بر } Ox) + (\text{تصویر } NM \text{ بر } Ox)$

پاره خط ON برمحود ´Ox قرار دارد و مقدارآن برابراست با:

$$\mathrm{ON} = (\mathrm{OM}\ \text{تصویر بر}\ \mathrm{Ox}') = \cos\beta$$ و

و بنابراین :

$$(\mathrm{ON}\ \text{تصویر بر}\ \mathrm{Ox}) = \mathrm{ON}\cos(\widehat{x\mathrm{O}x'}) = \cos\beta\cos\alpha\ .$$

پاره خط NM با محور ´Oy موازی و اندازهٔ آن مساوی :

$\sin\beta = (\mathrm{OM}\ \text{تصویر بر}\ \mathrm{Oy})$ ، میباشد . محورجهت‌دار ´Oy با محور Ox

زاویه‌ای برابر $\alpha+\frac{\pi}{۲}$ میسازد :

$$\widehat{x\mathrm{O}y'} = \widehat{x\mathrm{O}x'} + \widehat{x'\mathrm{O}y'} = \alpha+\frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین :

$$(\mathrm{NN}\ \text{تصویر بر}\ \mathrm{Ox}) = \mathrm{NM}\cdot\cos(x\mathrm{O}y') = \sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)\ .$$

که اگر در رابطهٔ (۳) قرار دهیم ، بدست میآید :

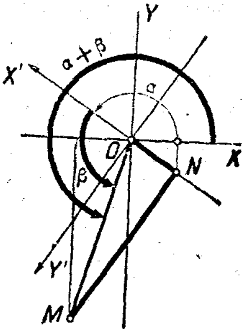
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)\sin\beta \qquad (۴)$$

و اگر در رابطهٔ (۴) ، $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم ، میشود :

$$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{۲}\right) = \cos\pi\sin\beta = -\sin\beta\ ، \qquad (۱)$$

حالا اگر در رابطهٔ (۴) بجای $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)$ مقدارش $-\sin\alpha$ را قرار دهیم ، رابطه $(C_{\alpha+\beta})$ بدست میآید . با تبدیل β به β− در رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ ، رابطهٔ $(C_{\alpha-\beta})$ مشخص میشود .

روابط $(S_{\alpha+\beta})$ و $(S_{\alpha-\beta})$ راهم شبیه اثبات اول بدست‌میآوریم .



ش ۹۴

تبصره: اثبات بر اساس حالت کلی نظریهٔ تصویر انجام گرفت و بنابراین برای هر مقدار دلخواه آوندهای α و β صحیح است. بعنوان‌مثال کوشش کنید که رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ را با توجه به شکل ۹۴ ثابت کنید.

قضیهٔ مجموع برای تانژانت: برای همهٔ مقادیری از α و β که $tg(\alpha+\beta)$ و $tg\alpha$ و $tg\beta$ وجود داشته باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \qquad (T_{\alpha+\beta})$$

اثبات: بااستفاده از روابط $(S_{\alpha+\beta})$ و $(C_{\alpha+\beta})$ برای‌مقادیری از α و β که $tg(\alpha+\beta)$ وجوددارد، خواهیم داشت،

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ وجود داشته باشد، نتیجه میشود: $\cos\alpha\neq 0$ و $\cos\beta\neq 0$. دراینصورت صورت ومخرج کسر را بر $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ تقسیم‌می کنیم، رابطهٔ $(T_{\alpha+\beta})$ بدست می‌آید.

اگر $tg(\alpha-\beta)$، $tg\alpha$ و $tg\beta$ وجودداشته‌باشد، دررابطهٔ‌بالا β را به $-\beta$ تبدیل می کنیم، میشود:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta} \qquad (T_{\alpha-\beta})$$

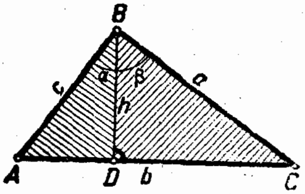
روابط مجموع مربوط به کتانژانت رابعهدهٔ خواننده‌می گذاریم.

تعبیرهای‌قضیهٔ مجموع: دربعضی حالتهای خاص مقادیر α و β میتوان روابط مجموع رامستقیماً با روش هندسی بدست آورد. در کتابهای درسی مثلثات هم گاهی به‌اینگونه روشها برخورد می کنیم. ولی‌بایستی بخاطر داشت

که بااین روشها اثبات کلی قضایـای مجموع انجام نمی گیرد، زیـرا قضایای مجموع برای هرمقدار دلخواه α و β صحیح است، نه برای مقادیر خـاصی که دراستدلال هندسی مفروض درنظر گرفته میشود. این راههای هندسی را تنها بایستی بعنوان تعبیرهای قضیهٔ مجموع برای این و یـا آن وضع خاص تلقی کرد.*

دراینجا بعضی ازتعبیرهای مشهور قضیهٔ مجموع راذکرمی کنیم.

I. α و β را زوایای دلخواه حاده‌ای فـرض می کنیم، مثلث ABC را درنظرمی گیریم که‌درآن $\hat{B}=\alpha+\beta$ باشد، بنحوی‌که ارتفاع $h=BD$ با اضلاع c ، a بترتیب زوایای α و β رابسازد (مثلثهای ABC که بااین شرط میتوان ساخت با یـکدیگر متشابـه خواهندبود).



ش ۹۵

ازیکطرف (شکل ۹۵) داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)^{**}$$

وازطرف دیگر:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{DBC} \qquad (1)$$

ولی داریم:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot h \quad ; \quad S_{DBC}=\frac{1}{2}CD\cdot h$$

وضمناً:

$$h=a\cdot\cos\beta=c\cdot\cos\alpha \quad ; \quad AD=c\sin\alpha \quad ; \quad CD=a\sin\beta.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}ac\sin\alpha\cos\beta \quad ; \quad S_{DBC}=\frac{1}{2}ac\cos\alpha\sin\beta.$$

که اگر دررابطهٔ (۱) قرار دهیم وطرفین تساوی را به $\frac{1}{2}ac$ سـاده

---

*) روشن است که اگر یکـی از تعبیرهـای هندسی بعنوان اساس اثبات قضیهٔ مجموع مورد استفاده قرارگیرد، بایستی استدلال راکامل‌کرد وآنرا برای حالت کلی قضیه تعمیم‌داد.

**) در اینجا رابطهٔ مساحت مثلث‌را برحسب دوضلع‌وزاویهٔ بین آن دانسته فرض‌کرده‌ایم (به بند ۵۱ مراجعه‌کنید).

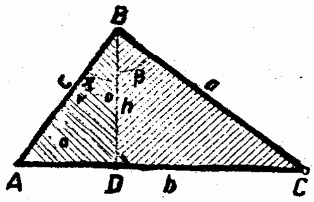
کنیم، رابطهٔ $(S_{\alpha+\beta})$ بدست‌می‌آید.

II. باتغییرمختصری درشکل میتوان رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ را بدست آورد. برای این منظور مساحت مثلث ABC رااز شکل۹۶ پیدا میکنیم که در آن $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ است.داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}ac\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}ac\cos(\alpha-\beta).$$



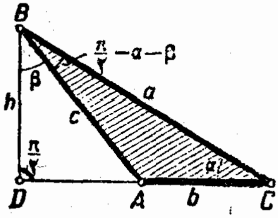
ش ۹۶

و با توجه به شکل روشن است که:

$$h=c\sin\alpha=a\cos\beta\ ;\ AD=c\cos\alpha\ ;$$
$$DC=a\sin\beta.$$

ودیگر بسادگی‌رابطهٔمورد نظر بدست میآید.

بعنوان تمرین کوشش کنید رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ را باکمك‌شکل۹۷اثبات کنید.

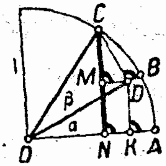


ش ۹۷

III. برای‌تعبیر قضیهٔ مجموع میتوان‌مستقیماً از ساختن خطوط مثلثاتی مجموع(ویا تفاضل)زوایااستفاده کرد.مثلااگر α و β را زوایائی حاده وضمناً $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ فرض کنیم‌میتوانیم‌شکل ۹۸ را بسازیم که در آن $CD\perp OB$ و $DM\perp CN$ و $CN\perp OA$ وبنابراین $\widehat{MCD}=\alpha$ است،داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=CN=NM+MC. \qquad (1)$$

وسپس:
$$NM=DK=OD\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$$



ش ۹۸

و: $MC = CD\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha.$

که اگر در (۱) قـرار دهیم ، رابطهٔ $(S_{\alpha+\beta})$

بدست میآید.

خواننده می‌تواند با شکل مشابهی، رابطهٔ $(C_{\alpha+\beta})$ را نیز بدست‌آورد.

IV. قضایای مجموع را میتوان با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس هم‌اثبات کرد. بموجب قضیهٔ بطلمیوس درهر چهارضلعی‌محاطی حاصلضرب دوقطر برابر است با مجموع حاصلضربهای اضلاع روبرو.*

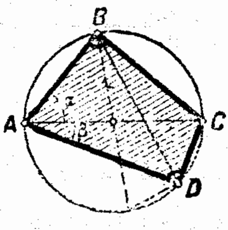
α و β رااززوایائی حاده فرض‌کنید وشکل ۹۹ را بطریقی بسازید که $AC = ۲R$ باشد، طبق قضیهٔ بطلمیوس خواهیم داشت:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \qquad (۱)$$

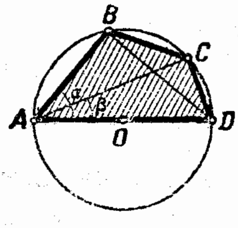
درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC و ACD داریم:

$$AB = ۲R\cos\alpha\ ;\ \ CD = ۲R\sin\beta\ ;\ \ AD = ۲R\cos\beta\ ;$$

$$BC = ۲R\sin\alpha.$$



ش ۹۹



ش ۱۰۰

از مثلث ABD بدست می‌آوریم:** $BD = ۲R\sin(\alpha+\beta)$

که اگر در رابطهٔ (۱) قراردهیم‌وطرفین رابه $۴R^۲$ ساده کنیم.رابطهٔ

*) در یونان قدیم ازهمین قضیهٔ بطلمیوس برای تنظیم «جدول وترها» استفاده میکردند (یعنی درحقیقت جداول مثلثاتی‌اولیه).

**) از رابطهٔ معلوم $a = ۲R\sin A$ (به‌بند ۵۶ مراجعه‌کنید).

$(S_{\alpha+\beta})$ بدست میآید.

V. با روش مشابهی میتوان رابطهٔ $(S_{\alpha-\beta})$ را تعبیر نمود و ما با انجام آنرا با توجه به‌شکل ۱۰۰ بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

توابع مثلثاتی مجموع چند جمله: با استفاده از روابط $(S_{\alpha+\beta})$ و $(C_{\alpha+\beta})$ و $(T_{\alpha+\beta})$ میتوان توابع مثلثاتی مجموع سه قوس (یازاویه) رابرحسب توابع‌مثلثاتی‌قوسهای α و β و γ را بیان نمود، داریم:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+$$
$$+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

و بهمین‌ترتیب‌بدست می‌آید:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-$$
$$-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

وبالاخره:

$$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma}{1-tg\alpha\, tg\beta-tg\alpha\, tg\gamma-tg\beta\, tg\gamma}$$

روابط کلی:

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\sin\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\cos\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

راهم میتوان باکمك استقراء ریاضی بدست آورد. روابط مربوط به مجموع دو وسه قوس‌را بطریق زیر مینویسیم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta(tg\alpha+tg\beta);$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta(1-tg\alpha\, tg\beta);$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[(tg\alpha+tg\beta+tg\gamma)-tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma];\quad (S)$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[1-(tg\alpha\, tg\beta+tg\alpha\, tg\gamma+tg\beta\, tg\gamma)]^{*}\quad (C)$$

حالا روابط زیررا ثابت میکنیم:

$$\sin\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_n[p_1-p_3+p_5-\cdots];\qquad (S)$$

$$\cos\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_n[1-p_2+p_4-\cdots];\qquad (C)$$

که‌درآنها:
$$p_1=tg\alpha_1+tg\alpha_2+\cdots+tg\alpha_n;$$
$$p_2=tg\alpha_1 tg\alpha_2+tg\alpha_1 tg\alpha_3+\cdots tg\alpha_{n-1} tg\alpha_n;$$

وبطور کلی:

$$p_k=tg\alpha_1 tg\alpha_2\cdots tg\alpha_k+tg\alpha_2 tg\alpha_3\cdots tg\alpha_{k+1}+\cdots$$

یعنی مجموع تمام انواع ممکنهٔ حاصلضربهای k تانژانت.

برای اثبات‌ازاستقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض‌کنیم‌که روابط (S) و (C) برای n آونددلخواه α_1، α_2، ...، α_n صحیح‌باشند، ثابت می‌کنیم که دراینصورت برای $n+1$ آونددلخواه α_1، α_2، ...، α_{n+1} هم‌صحیح خواهند بود.

با توجه به روابط (S) ، (C) داریم:

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1})=\sin(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\alpha_{n+1})=$$

$$\sin\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\cos\alpha_{n+1}+\cos\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sin\alpha_{n+1}=$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos_{n+1}[p_1-p_3+p_5-\cdots+$$
$$+(1-p_2+p_4-\cdots)tg\alpha_{n+1}]$$

مقدار داخل‌کروشه را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$(p_1+tg\alpha_{n+1})-(p_3+p_2 tg\alpha_{n+1})+\cdots+$$

---

*) بنا براصل ادامهٔ اتصال، وجود مقادیرخاص‌کسب اهمیت نمیکند(ولواینکه بازاء آنها یکی‌ازتانژانتهامفهوم خودرا ازدست بدهد).

$$+(-1)^k(p_{2k+1}+p_{2k}tg\alpha_{n+1})+\cdots$$

عبارت $p_{2k+1}+p_{2k}tg\alpha_{n+1}$ عبارتست ازمجموع حاصلضربهای ممکنه ازجملات $tg\alpha_1$; $tg\alpha_2$ ، ... ، $tg\alpha_{n+1}$ بشرطی که درهرضرب $2k+1$ عامل درنظر بگیریم. درحقیقت جملهٔ p_{2k+1} مجموع همهٔ حاصلضربهائی از ایــن نوع است که شامل $tg\alpha_{n+1}$ نباشند و جملهٔ $p_{2k}tg\alpha_{n+1}$ هم ازاین حاصلضربها که شامل $tg\alpha_{n+1}$ باشند، تشکیل شده است. بنابراین بفرض اینکه رابطهٔ (S) برای n جملهٔ α_1 ، α_2 ، ... ، α_n صحیح باشد، برای $n+1$ جملهٔ α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، α_{n+1} هم صحیح خواهد بود. بهمین ترتیب میتوان قضیهٔ مشابه مربوط به رابطهٔ (C) را هم اثبات کرد (که ما آنرا بعهدهٔ خواننده می گذاریم) ازآنجا که روابط (S) و (C) برای $n=2$ صحیح هستند، برای هرعدد صحیح $n\geqslant 2$ صحیح خواهند بود.

روابط کلی (S) و (C) را میتوان بطریق دیگر و بـا استفاده از ضرب صورت مثلثاتی اعداد مختلط هم بدست آورد☆. n عدد مختلط زیر را در نظر می گیریم:

$$z_1=\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1 \;;\quad z_2=\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2;\ldots;$$
$$z_n=\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n.$$

ازضرب این اعداد دریکدیگر بدست میاید:

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)=$$
$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n).$$

اگر پرانتزهای سمت چپ تساوی را بازکنیم ومقدارحقیقی را مساوی $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$ و ضـریـب عدد مـوهومـی i را مساوی

☆) حاصلضرب دوعدد موهومی دریکدیگر بااستفادهٔ مستقیم ازروابط اساسی $(S\alpha+\beta)$ و $(C\alpha+\beta)$ بدست میآید و برای بدست آوردن حاصلضرب تعداد دلخواه ازاعداد مختلط بهروش استقراء ریاضی متوسل میشوند.

$sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)$ قرار دهیم، روابط (S) و (C) بدست میآید.

چند مثال (مربوط به موارد استعمال قضیهٔمجموع).

۱. میدانیم $tg\alpha=a$ ، $tg\beta=b$ ، $tg\gamma=c$ که در آن $a>0$ ، $b>0$ ، $c>0$ و α ، β ، γ زوایائی حاده هستند ، مطلوبست شرایطلازم وکافی برایآنکه مجموع $S=\alpha+\beta+\gamma$ زاویه‌ای حاده باشد.

حل. با توجه به‌شرایط مسئله: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ ، $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$

دوحالت مختلف ممکن است وجود داشته باشد:

a) مجموع $S=\alpha+\beta+\gamma$ در ربع اول (باز) واقع باشد $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$ (یعنی S زاویه‌ای حاده باشد)، دراینصورت $cosS>0$ خواهدبود.

b) مجموع S درنیمدایرهٔچپ (نیم‌بسته) واقع باشد: $\frac{\pi}{2}\leqslant S<\frac{3\pi}{2}$، در اینحالت $cosS\leqslant0$ خواهدبود.

شرایط $cosS>0$ ، $cosS\leqslant0$ درحالتهای a و b برقرار است و بنا بر این شرط لازم وکافی برای اینکه $0<S<\frac{\pi}{2}$ باشد اینست که $cosS>0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$cos(\alpha+\beta+\gamma)=cos\alpha\, cos\beta\, cos\gamma(1-tg\alpha\, tg\beta-tg\beta\, tg\gamma-tg\alpha\, tg\gamma)=$$
$$=cos\alpha\, cos\beta\, cos\gamma[1-(ab+bc+ac)]>0$$

وشرط مورد نظر بصورت زیردر میآید:

$$ab+bc+ac<1$$

در تمرینات زیر مقادیر توابع مثلثاتی بعضی از قوسها ، که میتوانند بصورت رادیکال بیان‌شوند (یعنی بوسیلهٔ چهارعمل اصلی وریشه گرفتن‌ازاعداد صحیح)، ذکرشده است. باکمك این روابط میتوان مقادیر توابع مثلثاتی‌یك رشته‌ازقوسها را با هرتقریب دلخواه بدست‌آورد.

۲. مطلوبست محاسبهٔ $\sin 3^\circ$ و $\cos 3^\circ$.

حل . با توجه باینکه $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ میباشد و خطوط مثلثاتی قوسهای ۱۸ درجه و ۱۵ درجه راهم در بند ۱۰ دیده‌ایم ، داریم :

$$\sin 3^\circ = \sin\frac{\pi}{60} = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}-$$
$$-\sqrt{2})] \# 0.05234$$

و بهمین ترتیب :

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16}[\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) +$$
$$+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})] \# 0.99863$$

۳. $\sin 6^\circ$ و $\cos 6^\circ$ را محاسبه کنید .

حل. داریم : $36^\circ - 30^\circ = 6^\circ$ وخطوط مثلثاتی زوایای 36° و 30° راهم میدانیم (به بند ۱۰ مراجعه شود) و بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin 6^\circ = \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1) \# 0.104528$$

وشبیه‌آن :

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}] \# 0.994522$$

۴. $\sin 9^\circ$ و $\cos 9^\circ$ را بدست‌آورید .

حل. شبیه تمرینات قبل داریم :

$$\sin 9^\circ = \sin\frac{\pi}{20} = \sin(45^\circ - 36^\circ) = \frac{1}{8}[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) - 2\sqrt{5-\sqrt{5}}] \neq 0/15643$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}] \# 0/98769$$

۵. مطلوبست محاسبهٔ $\sin 12^\circ$ و $\cos 12^\circ$

حل. با توجه باینکه $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$ میباشد ، داریم :

$$\cos 12^\circ = \cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)] \# 0/97815$$

$$\sin 12^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)] \neq 0/20791$$

تمرینات مختلفی‌هم‌از موارد استعمال قضایای مجموع در اثبات اتحاد‌های مثلثاتی در بند ۲۷ ذکرخواهد شد .

۲۲. روابط تبدیل

منظوراز روابط تبدیل ، روابطی‌است‌که توابع مثلثاتی آوندهای :

$$-\varphi;\ \frac{\pi}{2}\pm\varphi;\ \pi\pm\varphi;\ \frac{3\pi}{2}\pm\varphi،\ 2\pi\pm\varphi$$

را برحسب توابع مثلثاتی‌آوند φ معین می‌کنند .

دستهٔ‌اول‌روابط‌با‌توجه‌به‌خاصیت‌فرد یازوج‌بودن‌توابع‌مثلثاتی‌بدست‌میآید:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(-\varphi) = \cos\varphi\ ;\ \sin(-\varphi) = -\sin\varphi \\ &tg(-\varphi) = -tg\varphi\ ;\ cotg(-\varphi) = -cotg\varphi \end{aligned}\right\}\quad [-\varphi]$$

این روابط نشان‌میدهند که محاسبهٔ توابع مثلثاتی قوسهای منفی ،منجر به محاسبهٔ توابع مثلثاتی قوسهای مثبت متناظر با آنها میشود . بقیهٔ روابط

را میتوان با توجه به قضایای مجموع :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{\alpha+\beta})$$

و استفاده ازروابط $[-\varphi]$ وسینوس و کسینوس در نقاط $\frac{\pi}{۲}$ ، π ، $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π بدست آورد :

x	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\cos x$	۰	-۱	۰	۱
$\sin x$	۱	۰	-۱	۰

I. اگر $\alpha=\varphi$ و $\beta=\frac{\pi}{۲}$ فرض کنیم، بدست میآید :

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\varphi+\frac{\pi}{۲})=-\sin\varphi\ ;\quad \sin(\varphi+\frac{\pi}{۲})=\cos\varphi\ ;\\ tg(\varphi+\frac{\pi}{۲})=-cotg\varphi\ ;\ cotg(\varphi+\frac{\pi}{۲})=-tg\varphi .\end{array}\right\}\quad [\frac{\pi}{۲}+\varphi]$$

که برای هر مقدار دلخواهی از φ صحیح‌اند . مثلا داریم :

$$\cos(\varphi+\frac{\pi}{۲})=\cos\varphi\cos\frac{\pi}{۲}-\sin\varphi\sin\frac{\pi}{۲}=-\sin\varphi$$

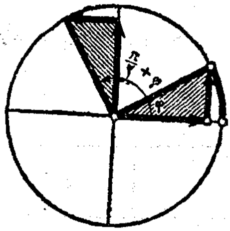
وبهمین ترتیب رابطهٔ دوم بدست میآید .

روابط سوم وچهارم‌هم باکمك روابط بین خطوط مثلثاتی یك زاویه بدست میآید :

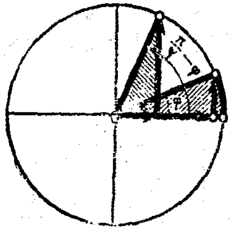
$$tg(\varphi+\frac{\pi}{۲})=\frac{\sin(\varphi+\frac{\pi}{۲})}{\cos(\varphi+\frac{\pi}{۲})}=\frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=-cotg\varphi$$

که برای همه مقادیر قابل قبول (یعنی $\varphi \neq k\pi$) صحیح است .

درشکل ۱۰۱ تعبیر هندسی رابطهٔ $[\frac{\pi}{2}+\varphi]$ برای حالتی که φ زاویهٔ حاده‌ای است داده شده (در شکل مثلثهای مساوی را هاشور زده‌ایم) .



ش ۱۰۱



ش ۱۰۲

II. در روابط $(C_{\alpha+\beta})$ فرض می‌کنیم $\alpha=\frac{\pi}{2}$ و $\beta=-\varphi$ بدست میآید :

$$\left.\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi\ ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi\ ; \\ &tg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=cotg\,\varphi\ ; \quad cotg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=tg\,\varphi\ . \end{aligned}\right\} \qquad \left[\frac{\pi}{2}-\varphi\right]$$

که بازاء هر مقدار قابل قبول φ صحیح‌اند. میتوانستیم در روابط $[\frac{\pi}{2}+\varphi]$،

φ را به $-\varphi$ تبدیل کنیم تا روابط $[\frac{\pi}{2}-\varphi]$ بدست آید .

در شکل ۱۰۲ تعبیر هندسی روابط $[\frac{\pi}{2}-\varphi]$ برای زاویهٔ حادهٔ φ داده شده است (به بند ۷ هم مراجعه کنید) .

III. درروابط $(C_{\alpha+\beta})$ و $(S_{\alpha+\beta})$ ، $\alpha=\varphi$ و $\beta=\pi$ فرض می‌کنیم ، روابط زیر را که برای هر مقدار قابل قبول φ صحیح‌اند، بدست میآوریم :

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi \; ; \quad \sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi \; ; \\ tg(\varphi+\pi) = tg\varphi \; ; \quad cotg(\varphi+\pi) = cotg\varphi . \end{array}\right\} \quad [\varphi+\pi]$$

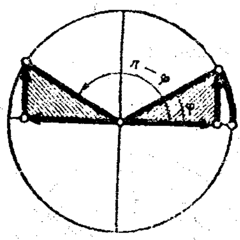
این روابط را هم میتوانستیم مستقیماً و بطریق هندسی بدست آوریم : قوس φ هرچه باشد، انتهای قوسهای φ و $\pi+\varphi$ دو نقطهٔ متقاطر از دایره‌اند و بنابراین طول وعرض انتهای این قوسها (یعنی کسینوس وسینوس) از لحاظ قدر مطلق برابر واز لحاظ علامت قرینه‌اند. در نتیجه نسبت مختصات انتهای این قوسها (یعنی تانژانت وکتانژانت) متناظراً برابرند .

IV. در روابط $(S_{\alpha+\beta})$ ، $\alpha=\pi$ و $\beta=-\varphi$ فرض می‌کنیم ، بدست میآید :

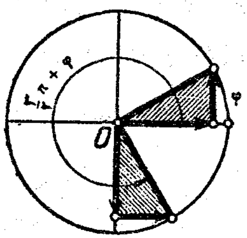
$$\left.\begin{array}{l} \cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi \; ; \quad \sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi \; ; \\ tg(\pi-\varphi) = -tg\varphi \; ; \quad cotg(\pi-\varphi) = -cotg\varphi . \end{array}\right\} \quad [\pi-\varphi]$$

(میتوانستیم در $[\varphi+\pi]$ ، φ را به $-\varphi$ تبدیل کنیم).

در شکل ۱۰۳ تعبیر هندسی روابط $[\pi-\varphi]$ برای زاویهٔ حادهٔ داده شده است .



ش ۱۰۳



ش ۱۰۴

V. در روابط $(C_{\alpha+\beta})$ و $(S_{\alpha+\beta})$ ، $\alpha=\varphi$ و $\beta=\frac{۳\pi}{۲}$ قرار میدهیم ، بدست میآید :

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\varphi+\frac{۳\pi}{۲}) = \sin\varphi \; ; \quad \sin(\varphi+\frac{۳\pi}{۲}) = -\cos\varphi \; ; \\ tg(\varphi+\frac{۳\pi}{۲}) = -cotg\varphi \; ; \quad cotg(\varphi+\frac{۳\pi}{۲}) = -tg\varphi . \end{array}\right\} \quad \left[\varphi+\frac{۳\pi}{۲}\right]$$

که برای همهٔ مقادیر قابل قبول φ صحیح‌اند .

در شکل ۱۰۴ تعبیر هندسی روابط $[\frac{3\pi}{2}+\varphi]$ برای زاویهٔ حادهٔ φ داده شده است .

IV. اگر $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ و $\beta=-\varphi$ را درروابط $(C_{\alpha+\beta})$ و $(S_{\alpha+\beta})$ قرار دهیم (ویادرروابط قبل φ را به φ — تبدیل کنیم) ، خواهیم داشت:

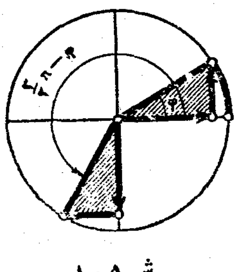
$$\left.\begin{matrix} \cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\sin\varphi \;; & \sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\cos\varphi \;; \\ tg(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=cotg\varphi \;; & cotg(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=tg\varphi \;. \end{matrix}\right\}[\frac{3\pi}{2}-\varphi]$$

در شکل ۱۰۵ تعبیر هندسی روابط $[\frac{3\pi}{2}-\varphi]$ برای‌زاویهٔ حادهٔφ داده شده است .

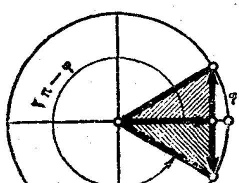
VII. روابط :

$$\left.\begin{matrix} \cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi \;; & \sin(2\pi+\varphi)=\sin\varphi \;; \\ tg(2\pi+\varphi)=tg\varphi \;; & cotg(2\pi+\varphi)=cotg\varphi \;. \end{matrix}\right\}\quad[2\pi+\varphi]$$

مبین دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی هستند (به بند ۱۱ مراجعه کنید).



ش ۱۰۵



ش ۱۰۶

VIII. اگر در روابط $(C_{\alpha+\beta})$ و$(S_{\alpha+\beta})$ ، $\alpha=2\pi$ و $\beta=-\varphi$ (ویا در روابط قبل φ را به φ —) تبدیل کنیم ، بدست میآید:

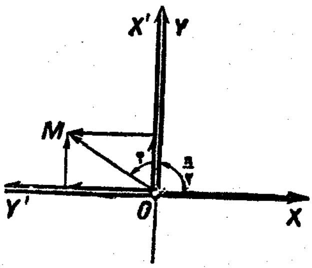
$$\left.\begin{array}{l} \cos(2\pi-\varphi)=\cos\varphi\ ;\quad \sin(2\pi-\varphi)=-\sin\varphi\ ; \\ tg(2\pi-\varphi)=-tg\varphi;\quad cotg(2\pi-\varphi)=-cotg\varphi\ . \end{array}\right\}[2\pi-\varphi]$$

در شکل ۱۰۶ تعبیر مثلثاتی روابط $[2\pi-\varphi]$ برای زاویهٔ حادهٔ φ داده شده است .

روابط تبدیل را در حالت کلی ، میتوان مستقیماً و بدون استفاده از قضایای مجموع بدست آورد و ما در اینجا بذکر آن می‌پردازیم :

اثبات دیگر روابط تبدیل . روابط $[-\varphi]$ را ، که مربوط به‌خاصیت زوج وفرد بودن تابع است ، دانسته فرض می کنیم .

ابتدا به اثبات روابط $[\frac{\pi}{2}+\varphi]$ میپردازیم . xoy را دستگاه مفروض مختصات صفحه فرض می کنیم .



ش ۱۰۷

محورهای مختصات را باندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ دور نقطهٔ O دوران میدهیم (شکل ۱۰۷) ، در اینصورت ox بوضع ´ox و بر خط oy قرار میگیرد ، oy بوضع ´oy و برخط ox قرار میگیرد ، ضمناً محورهای ´ox و oy دریك‌جهت محورهای ´oy و ox درخلاف جهت‌هم واقع خواهند بود . روابط بین‌مختصات نقطهٔ دلخواه M را در دو دستگاه xoy و ´x´oy مینویسیم. فرض‌کنید x و y مختصات نقطهٔ M در دستگاه xoy و ´x و ´y مختصات همین نقطه در دستگاه ´x´oy باشد ، بردار OM را برمحور ´ox تصویر می کنیم ، خواهیم داشت :

$$x' = \text{تصویر } OM \text{ بر } ox' = \text{تصویر } OM \text{ بر } oy = y$$

برای تصویر OM بر محور ´oy باید بخاطر داشت‌که تصاویر OM برمحورهای ox و ´oy دو عدد مختلف‌العلامه‌اند :

$$y' = oy' \text{ بر } OM \text{ تصویر } = -(ox \text{ بر } OM\text{تصویر}) = -x;$$

و باین ترتیب :

$$x = -y' \;;\; y = x' \qquad (۱)$$

محور ox' را برضلع ابتدای‌زاویهٔ φ انتخاب می‌کنیم ، ضلع انتهای این زاویه‌با محورهای ox و ox' بترتیب زوایای $\frac{\pi}{۲}+\varphi$ و φ میسازد که مختصات نقاط متناظر آنها روی دایرهٔ واحد چنین‌اند :

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{۲}+\varphi\right) \;;\; y = \sin\left(\frac{\pi}{۲}+\varphi\right)$$

در دستگاه xoy و : $\quad x' = \cos\varphi \;;\; y' = \sin\varphi$

در دستگاه $x'oy'$.

که با توجه به روابط (۱) دو رابطهٔ اول $[\frac{\pi}{۲}+\varphi]$ بدست‌میآید.

روابط $[\pi+\varphi]$ و $[\frac{۳\pi}{۲}+\varphi]$را میتوان‌بلافاصله ازروابط$[\frac{\pi}{۲}+\varphi]$ بدست‌آورد ، مثلا :

$$\cos(\pi+\varphi) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{۲}+\varphi\right)+\frac{\pi}{۲}\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\varphi\right) = -\cos\varphi \;;$$

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\varphi\right) = \cos\left[(\pi+\varphi)+\frac{\pi}{۲}\right] = -\sin(\pi+\varphi) = \sin\varphi \;.$$

و روابط$[\frac{\pi}{۲}-\varphi]$ ، $[\pi-\varphi]$و$[\frac{۳\pi}{۲}-\varphi]$ هم از روابط بالا با تبدیل φ به $-\varphi$ بدست میآید .

تبصره . درکتابهای درسی‌معمولا روابط تبدیل‌را قبل‌ازقضایای مجموع ذکر می‌کنند ، برای این منظور بایستی از اثبات دوم (که مستقل ازقضایای مجموع است) استفاده کرد .

راه‌اولی‌که برای نتیجه‌گیری روابط تبدیل مورد استفاده گرفت بهیچ

گونه اثبات خاصی احتیاج ندارد و همهٔ روابط مورد نظر بطور مستقیم با کمك قضایای مجموع بدست میآید .

روابط : $[-\varphi]$; $[\pi \pm \varphi]$; $[2\pi \pm \varphi]$

را **روابط تبدیل نسبت بقطر افقی** گویند ، زیرا این روابط خطوط مثلثاتی زوایائی را بیان میکنند که با قطر افقی زاویه‌ای باندازهٔ φ ساخته باشند .

با توجه به روابط تبدیل نسبت بقطر افقی روشن میشود کـه در این تبدیلات نام توابع مثلثاتی و همچنین مقدار مطلق آنها تغییری نمی‌کند (وتنها ممکن است علامت آنها تغییر کند).

روابط : $[\frac{\pi}{2} \pm \varphi]$ و $[\frac{3\pi}{2} \pm \varphi]$ را **روابط تبدیل نسبت بقطر قائم** گویند ، زیرا این روابط خطوط مثلثاتی زوایائی را بیان میکنند که با قطر قائم زاویه‌ای باندازهٔ φ ساخته باشند . در روابط تبدیل نسبت بقطر قـائم ، نام تابع مثلثاتی تغییرمی‌کند (سینوس به‌کسینوس تبدیل میشود و بر عکس همچنین تانژانت به‌کتانژانت تبدیل میشود و برعکس) وعلامت آن ممکن‌است تغییر کند و ممکن‌است ثابت بماند .

برای اینکه‌علامت تابع‌مثلثاتی‌رادر روابط‌تبدیل‌تعیین کنیم میتوان بطریق زیر عمل کرد . مثلا اتحاد زیررا در نظرمیگیریم :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right) = -\sin\varphi.$$

در اینجا $\sin\varphi$ در سمت راست تساوی علامت منفی دارد ، نباید گمان کرد که سمت راست همیشه منفی است ، زیرا این‌علامت بستگی بـه مقدار φ دارد ومیتواند حالتهای مختلفی‌داشته باشد، مثلا چون $\sin\frac{5\pi}{4} < 0$ است‌داریم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} > 0$$

برای اینکه علامت جلو خط مثلثاتی را در طرف راست تساوی معین

کنیم ، فرض می‌کنیم که φ حالت خاص حاده و مثبت باشد ، در اینصورت $\frac{3\pi}{2}-\varphi$ در ربع سوم قرار خواهد گرفت که درآنجا علامت کسینوس منفی است . وبرای اینکه اتحاد برقرار باشد ، بایستی $\sin\varphi$ باعلامت منفی درطرف راست تساوی قرار گیرد.

باتوجه بآنچه گفتیم میتوان قاعدهٔ زیر را برای روابط تبدیل بیان کرد:

قاعده . در تبدیل نسبت بقطر افقی نام توابع مثلثاتی تغییر نمی‌کند، در حالیکه در تبدیل نسبت بقطر قائم نام تابع مثلثاتی به تابع مشابه خودش تغییرمیکند . برای اینکه علامت جلو تابعی‌راکه درسمت راست تساوی قرار گرفته است معین‌کنیم ، کافی است زاویهٔ φ را حاده در نظر بگیریم وعلامت سمت چپ را با توجه باینکه درکدام‌ربع‌دایره قرارگرفته‌است، پیداکنیم.

اگر بخواهید توابع مثلثاتی زاویه‌ای مانند β را محاسبه‌کنید ، روابط $[\varphi+2\pi]$ و $[-\varphi]$ ، آنرا به‌زاویهٔ مثبتی که از 2π کوچکتراست تبدیل‌میکنند. بنابراین میتوان اینطور درنظر گرفت‌که $0\leqslant\beta<2\pi$ است (ویا برحسب‌درجه $0\leqslant\beta<360^\circ$). دو زاویهٔ حاده‌ای که ضلع انتهای زاویهٔ β با قطرهای افقی وقائم‌میسازد در نظر میگیریم‌و کوچکترین‌آنها را (ویا اگر هردومساوی ۴۵ درجه باشند یکی‌ازآنها را) α مینامیم، در اینصورت $0\leqslant\alpha\leqslant45^\circ$ خواهد بود. باکمك روابط‌تبدیل میتوان توابع مثلثاتی زاویهٔ β را برحسب توابع مثلثاتی زاویهٔ α نوشت . درعمل معمولا از جداول توابع مثلثاتی (و یا لگاریتمهای‌آنها) استفاده می‌کنندکه از قبل‌آماده شده است . در این‌جدولها معمولا مقادیر زوایا بر حسب درجه بیان شده است ، آنچه‌که در بالا گفتیم روشن میکندکه‌کافی است جدول مقادیر توابع مثلثاتی را تنها برای زوایای ازصفر تا ۴۵ درجه در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم توابع مثلثاتی هرزاویهٔ دلخواه را محاسبه‌کنیم .

چند مثال

۱. در زیر نمونه‌هائی‌ازتبدیل‌توابع‌مثلثاتی زوایای‌مختلف بحسب‌توابع

زوایائی که کوچکتر از ۴۵ درجه‌اند داده شده است :

a) $\sin ۷۲^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۱۸^\circ) = \cos ۱۸^\circ$;

b) $\cos ۱۰۰۰^\circ = \cos(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۲۸۰^\circ) = \cos ۲۸۰^\circ =$

$= \cos(۲۷۰^\circ + ۱۰^\circ) = \sin ۱۰^\circ$;

c) $tg ۵۲۰^\circ = tg(۳۶۰^\circ + ۱۶۰^\circ) = tg ۱۶۰^\circ =$

$= tg(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ) = - tg ۲۰^\circ$.

۲. محاسبه کنید :

$$P = \frac{tg(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)}{\cos(۲\pi - \alpha)} + \cos(\alpha - \frac{\pi}{۲})\sin(\pi - \alpha) +$$

$$+ \cos(\pi + \alpha)\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}).$$

حل. داریم :

$$tg(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha \ ;$$

$$\cos(۲\pi - \alpha) = \cos\alpha \ ; \quad \cos(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha \ ;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \ ; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \ ;$$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = -\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha \ .$$

و در نتیجه خواهیم داشت :

$$P = -۱ + \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۰$$

۳. ثابت کنید :

$$\cos(n\pi + x) = (-۱)^n \cos x \ ; \ \sin(n\pi + x) = (-۱)^n \sin x$$

حل. در حقیقت اگر n عددی زوج باشد $(n = ۲k)$ ، دراینصورت :

$$(-۱)^n = ۱ \ ، \ \cos(۲k\pi + x) = \cos x \ ; \ \sin(۲k\pi + x) = \sin x$$

واگر n عددی فرد باشد $(n = ۲k + ۱)$ ، دراینصورت :

$$\cos(2k\pi+\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x$$

وشبیه آن در مورد رابطهٔ دوم .

۴. اگر n عددی صحیح ودر تقسیم بر ۷ یکی از باقیمانده‌های ۱، ۳ و ۴ را داشته باشد ، ثابت کنید :

$$\cos\left(\frac{n\pi}{7}-\frac{13\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3n\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5n\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=0$$

حل. عدد n را بر ۷ تقسیم می‌کنیم :

$$n=7k+r\ ;$$

جملات مجموع مفروض بصورت $\cos\left(\frac{mn\pi}{7}-\alpha\right)$ هستند که در آن $m=1$ و ۳ و ۵ و α برابر $\frac{13\pi}{14}$ ویا $\frac{3\pi}{14}$ است .

اگر $n=7k+r$ قرار دهیم ، بدست میآید :

$$\cos\left(\frac{(7k+r)m\pi}{7}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{rm\pi}{7}+km\pi-\alpha\right)=$$

$$=(-1)^{km}\cos\left(\frac{rm\pi}{7}-\alpha\right).$$

چون m عددی است فرد ، برای هرسه جمله $(-1)^{km}=(-1)^k$ میباشد . بنابراین کافی‌است ثابت کنیم که بازاء $r=1$ و ۳ و ۴ داریم :

$$\cos\left(\frac{r\pi}{7}-\frac{13\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=0$$

در حالتی که $r=1$ باشد ، هریك از جملات را محاسبه می‌کنیم :

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{13\pi}{14}\right)+\cos\left(-\frac{11\pi}{14}\right)=\cos\frac{11\pi}{14}=-\cos\frac{3\pi}{14}\ ;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=\cos\frac{3\pi}{14}\ ;$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

و مجموع این جملات‌هم برابر صفراست .

حالتهای $r=۳$ و $r=۴$ هم بطریق مشابهی به نتیجه میرسد .

۵. $sin(\frac{n\pi}{۲}+x)$ و $cos(\frac{n\pi}{۲}+x)$ را محاسبه کنید .

حل. اگر n عددی زوج باشد $(n=۲k)$ ، داریم :

$$cos(\frac{n\pi}{۲}+x)=cos(k\pi+x)=(-۱)^k cos x=(-۱)^{\frac{n}{۲}} cos x ;$$

وشبیه‌آن :

$$sin(\frac{n\pi}{۲}+x)=(-۱)^{\frac{n}{۲}} sin x .$$

واگر n فرد باشد $(n=۲k+۱)$ در اینصورت :

$$cos(\frac{n\pi}{۲}+x)=cos(k\pi+\frac{\pi}{۲}+x)=-sin(k\pi+x)=$$

$$=(-۱)^{k+۱} sin x=(-۱)^{\frac{n+۱}{۲}} sin x ;$$

وشبه‌آن :

$$sin(\frac{n\pi}{۲}+x)=cos(k\pi+x)=(-۱)^{\frac{n+۱}{۲}} cos x .$$

۲۳. توابع مثلثاتی‌مضرب قوسها

اگردرروابط$(C_{\alpha+\beta})$و$(S_{\alpha+\beta})$و$(T_{\alpha+\beta})$ فرض کنیم $\alpha=\beta$، روابطی بدست میآوریم که توابع مثلثاتی آوند ۲α را برحسب توابع مثلثاتی آوند α بما میدهند . داریم :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \; ; \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (C_{2\beta})$$

$$tg 2\alpha = \frac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad (T_{2\alpha})$$

روابط مربوط به توابع مثلثاتی 3α، 4α وغیره راهم میتوان بااستفادهٔ مستقیم از قضایای مجموع بدست آورد ، مثلا :

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \, .$$

برای اینکه روابط کلی مربوط به $\cos n\alpha$ و $\sin n\alpha$ را بدست آوریم ، کافی است در روابط کلی مجموع (C) و (S) (صفحهٔ ۱۴۲) فرض کنیم: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2 \sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + C_4^n \sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \dots \quad (C_{n\alpha})$$

(آخرین جملهٔ سمت راست تساوی در حالت فرد بودن n برابر $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha$ و در حالت زوج بودن n برابر $(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha$ میباشد).

$$\sin n\alpha = C_n^1 \sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - C_n^3 \sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha +$$
$$+ C_n^5 \sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \dots \qquad (S_{n\alpha})$$

(و آخرین جمله درحالت فرد بودن n مساوی $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\alpha$ و در حالت زوج بودن n مساوی $(-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot n\sin^{n-1}\alpha\cos\alpha$ میباشد).

روابط $(C_{n\alpha})$ و $(S_{n\alpha})$ رامیتوان باروش دیگر و بااستفاده از نظریهٔ مشهور

مربوط به اعداد مختلط یعنی رابطهٔ مواورهم بدست‌آورد :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

سمت چپ تساوی را طبق دوجمله‌ای نیوتون باز می‌کنیم وسپس در دو طرف تساوی مقادیر حقیقی را باهم وضرایب i را باهم مساوی قرارمیدهیم ، روابط($C_{n\alpha}$) و($S_{n\alpha}$) بدست میاید .

روابط($C_{n\alpha}$) و($S_{n\alpha}$) توابع مثلثاتی مضرب n ام‌آوند را برحسب قوای سینوس وکسینوس آوند بیان میکنند . مثلا بازاء $n=4$ داریم :

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha \; ;$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha \; .$$

وبازاء $n=5$ داریم :

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\sin^2\alpha\cos^3\alpha + 5\sin^4\alpha\cos\alpha \; ;$$

$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha\cos^4\alpha - 10\sin^3\alpha\cos^2\alpha + \sin^5\alpha$$

مثال: حاصلضرب زیر را محاسبه‌کنید :

$$P = \cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^k\alpha \ldots \cos 2^n\alpha \; .$$

حل. اتحادهای زیررا درهم ضرب می‌کنیم :

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \; ,$$

$$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha \; ,$$

$$2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 8\alpha \; ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$2\sin 2^n\alpha\cos 2^n\alpha = \sin 2^{n+1}\alpha \; ,$$

که پس‌از ساده‌کردن خواهیم داشت :

$$2^{n+1}\sin\alpha \cdot P = \sin 2^{n+1}\alpha \Longrightarrow P = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} \; .$$

و اگردرحالت خاص $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}+1}$ باشد ، داریم :

$$\sin 2^{n+1}\alpha = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2^{n+1}+1}\right) = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}+1} = \sin\alpha$$

وبنابراین بدست میآوریم :

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}+1}\cos\frac{2\pi}{2^{n+1}+1}\cos\frac{4\pi}{2^{n+1}+1}\cdots\cos\frac{2^{n}.\pi}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

مثلابازاء $n=1$ خواهیم داشت: $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

وبازاء $n=2$: $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$

و یا برحسب درجه : $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

۲۴ . روابط تقسیم قوسها

روابط مربوط به توابع مثلثاتی نصف قوس ، توابع مثلثاتی آوند $\frac{\alpha}{2}$ را برحسب مقادیر توابع مثلثاتی آوند α بدست میدهد .

در رابطهٔ $(C_{2\alpha})$ آوند α را به $\frac{\alpha}{2}$ تبدیل می‌کنیم ، بدست میآید :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \;;$$

باین رابطه اتحاد زیر راهم اضافه می‌کنیم :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

و نسبت به $\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\sin\frac{\alpha}{2}$ حل می‌کنیم بدست میآید :

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}} \qquad (C_{\frac{\alpha}{۲}})$$

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}} \qquad (S_{\frac{\alpha}{۲}})$$

و همچنین :

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}} \qquad (T_{\frac{\alpha}{۲}})$$

علامت جلو رادیکالها بسته به اینست که آوند $\frac{\alpha}{۲}$ درچه ربعی ازدایره واقع شده باشد .

در روابط $(C_{\frac{\alpha}{۲}})$ ، $(S_{\frac{\alpha}{۲}})$ و $(T_{\frac{\alpha}{۲}})$ ، توابع مثلثاتی آوند $\frac{\alpha}{۲}$ برحسب کسینوس آوند α داده شده است . اگرمقدار $\cos\alpha$ معلوم باشد، قدر مطلق مقادیر توابع مثلثاتی $\frac{\alpha}{۲}$ معلوم خواهد بود :

$$\left|\cos\frac{\alpha}{۲}\right|=\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}} \quad ; \quad \left|\sin\frac{\alpha}{۲}\right|=\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}}$$

با مفروض بودن مقدار کسینوس : $\cos\alpha=m$ مجموعهٔ بی‌نهایت قوس خواهیم داشت :

$$\alpha=۲k\pi\pm\arccos m$$

که متناظراً خواهیم داشت :

$$\frac{\alpha}{۲}=k\pi\pm\frac{\arccos m}{۲}$$

که بسته به انتخاب علامت مثبت یا منفی ومقدار k ، میتواند انتهای آن در هریك از چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی قرارگیرد . در حقیقت اگر

$-1<m<1$ باشد $0<\arccos m<\pi$ خواهد بود و $\frac{\arccos m}{2}$

زاویه‌ای حاده میشود . اگر علامت $+$ را انتخاب کنیم ، انتهای قوس $\frac{\alpha}{2}$ در ربع اول یا سوم (بسته باینکه k زوج یا فرد باشد) قرار میگیرد واگر علامت $-$ را انتخاب کنیم ، قوسی بدست میآید که انتهای آن در ربع دوم و یا چهارم خواهد بود . بازاء $m=\pm 1$ قوسهائی بدست میآید که انتهای آنها در یکی‌از دو انتهای قطرهای افقی وقائم قرار میگیرد . بنابر این در حالت‌کلی بامعلوم بودن $\cos\alpha = m$ در روابط $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ همهٔ انواع ترکیبهای علامتها ممکن میباشد .

آوند مفروض α را بصورت $\alpha = 2k\pi + \alpha_0$ در نظرمیگیریم که α_0 مقداری در فاصلهٔ $-\pi<\alpha_0\leqslant\pi$ انتخاب شده است . در اینحالت رابطهٔ $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ میتواند بصورت زیردرآید :

$$\cos\frac{\alpha}{2} = (-1)^k \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

در حقیقت $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha_0}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین انتهای زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\alpha_0}{2}$ در حالت زوج بودن k در نیمدایرهٔ راست ودرحالت فرد بودن k در نیمدایرهٔ چپ واقع میشود ، درحالت اول $\cos\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$ و درحالت دوم $\cos\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$ است .

بهمین ترتیب اگر زاویهٔ مفروض α را بصورت زیردرنظربگیریم :

$$\alpha = 2k\pi + \alpha_0 \qquad (0\leqslant\alpha_0<2\pi)$$

رابطهٔ $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\sin\frac{\alpha}{2}=(-1)^k\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

در حقیقت $\pi > \frac{\alpha}{2}^\circ \geqslant 0$ وبنابراین انتهای زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}^\circ$ $\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\alpha}{2}^\circ$ وقتی k زوج باشد در نیمدایرهٔ فوقانی و وقتی k فرد باشد در نیمدایرهٔ تحتانی واقع میشود ، در حالت اول $\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$ و درحالت دوم $\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$ است .

رابطهٔ مربوط به $tg\frac{\alpha}{2}$ را میتوان بصورتهای زیرهم نوشت :

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (T'_{\frac{\alpha}{2}})$$

و :

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (T''_{\frac{\alpha}{2}})$$

از روابط $(T'_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(T''_{\frac{\alpha}{2}})$ نتیجه‌میشود که : **تانژانت نصف قوس $(tg\frac{\alpha}{2})$ برحسب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ عباراتی است گویا :**

از روابط :

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha \quad \text{و} \quad \sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$$

میتوان کسینوس‌وسینوس نصف قوس را برحسب $\sin\alpha$ بدست آورد . درحقیقت ازجمع و تفریق این دو رابطه بدست میآید :

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha\ ;\quad \left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$$

و از آنجا :

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\ ;\ \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\alpha}$$

که از جمع و تفریق آنها روابط زیر بدست میآید :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\qquad (C'_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}\qquad (S'_{\frac{\alpha}{2}})$$

با مفروض بودن α علامت جلو هر یك از رادیکالها بسته به علامتی که $\sin\frac{\alpha}{2}$ و $\cos\frac{\alpha}{2}$ دارند انتخاب میشوند ، ضمناً همیشه در روابط $(C'_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S'_{\frac{\alpha}{2}})$ علامتهای جلو رادیکال دوم مخالف یکدیگرند . روابط $(C'_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S'_{\frac{\alpha}{2}})$ ساده نیستند و خیلی کمتر از $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ مورد استعمال دارند .

تبصره . روابط $(C'_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S'_{\frac{\alpha}{2}})$ را مستقیماً از روابط $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ هم میتوان بطریق جبری بدست آورد . درحقیقت داریم :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}$$

که با تبدیل رادیکال مرکب به رادیکالهای ساده، رابطهٔ $(C'_{\frac{\alpha}{2}})$ بدست میآید.

از رابطهٔ :
$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

میتوان $tg\frac{\alpha}{2}$ را برحسب $tg\alpha$ بدست آورد . ازمعادلهٔ درجه دوم :

$$tg\alpha\, tg^2\frac{\alpha}{2} + 2tg\frac{\alpha}{2} - tg\alpha = 0 \qquad (1)$$

بدست میآید :

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\alpha}$$

ریشه‌های معادلهٔ (۱) (نسبت به مجهول $tg\frac{\alpha}{2}$)عکس‌قرینهٔ‌یکدیگر ند.

این نتیجه را بطریق هندسی‌هم میتوان بدست آورد : اگر داشته باشیم $tg\alpha = m$، خواهیم داشت: $\alpha = k\pi + \mathrm{arc}tg\,m$ وازآنجا بازاء $n = 2k$:

$$tg\frac{\alpha}{2} = tg\left(k\pi + \frac{\mathrm{arc}tg\,m}{2}\right) = tg\frac{\mathrm{arc}tg\,m}{2}\ ;$$

و بازاء $n = 2k+1$:

$$tg\frac{\alpha}{2} = tg\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{arc}tg\,m}{2}\right) = -cotg\frac{\mathrm{arc}tg\,m}{2}$$

واین دو مقدارهم ازلحاظ قدرمطلق عکس یکدیگر وهم‌ازلحاظ علامت‌مخالف یکدیگرند ، که بایستی این و یا آن جواب را بسته به علامت $tg\frac{\alpha}{2}$ انتخاب کرد .

تعیین روابطی‌که توابع مثلثاتی قوس $\frac{\alpha}{n}$ را برحسب توابع قوس α بدست دهد باشکالات جبری برخورد میکند و مستلزم حل معادلات ازدرجات بالاست . اگردررابطهٔ $(C_{n\alpha})$ (صفحهٔ ۱۵۸) $n\alpha$ را به α و α را به

$\frac{\alpha}{n}$ وقوای سینوس را به‌کسینوس تبدیل کنیم ، اگر $x = \cos\frac{\alpha}{n}$ بگیریم معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\cos\alpha = x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots$$

واین معادله درحالت‌کلی دارای n ریشهٔ حقیقی متمایز است . در حقیقت، مجموعهٔ قوسهائی که‌کسینوس آنها مفروض باشد: $\cos\alpha = m$ ازرابطهٔ زیر معین میشود :

$$\alpha = 2k\pi \pm \arccos m \implies \frac{\alpha}{n} = \frac{2k\pi}{n} \pm \frac{\arccos m}{n}$$

اگر علامت + را در نظر بگیریم مجموعهٔ بی‌نهایت قوسهای زیر بدست میآید :

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\arccos m}{n} \qquad (2)$$

که روی دایرهٔ واحد تنها n نقطهٔ متمایز را مشخص می‌کند ، زیرا وقتی که به k اعداد صحیح متوالی با شروع از صفر تا $n-1$ را نسبت بدهیم بازاء مقادیر بعدی k همان نقاط قبلی بدست میآید . بنابراین :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\arccos m}{n}\right)$$

(در حالت کلی) n مقدار مختلف دارد . بهمین ترتیب همهٔ قوسهای بصورت:

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{2k\pi}{n} - \frac{\arccos m}{n} \qquad (3)$$

به n نقطهٔ متمایز ختم میشوند. قوسهای رشتهٔ (۲) و رشتهٔ (۳) دوبدو نسبت به محور طول‌متقارن‌اند وبخصوص اگردر(۳) عدد صحیح دلخواه k را به $-k$ تبدیل کنیم قوسی بدست میآید که قرینهٔ قوسی از (۲) خواهدبود . ولی تغییر علامت قوس، مقدارکسینوس آنرا تغییر نمیدهد وبنابراین $x = \cos\frac{\alpha}{n}$ درحالت

کلی n جواب حقیقی متمایزدارد

مثلا بازاء $n=۳$ معادلهٔ درجه سوم زیررا خواهیم داشت:

$$\cos\alpha = ۴x^۳ - ۳x \Longrightarrow x^۳ - \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۲}\cos\alpha = ۰$$

این‌معادله را میتوان حل کرد، ولی‌دراینجا(درحالت‌کلی) با معادله‌ای سر و کار داریم‌که سه ریشهٔ حقیقی دارد. دررابطهٔ کاردان:

$$x = \sqrt[۳]{\frac{\cos\alpha}{۸} + \sqrt{\frac{\cos^۲\alpha - ۱}{۶۴}}} + \sqrt[۳]{\frac{\cos\alpha}{۸} + \sqrt{\frac{\cos^۲\alpha - ۱}{۶۴}}}$$

چون $\cos^۲\alpha - ۱ < ۰$ است، درحالت کلی (وقتی‌که $\alpha \neq ۲k\pi$ باشد) زیررادیکالهای باریشهٔسوم اعداد موهومی خواهدبود وبیان x بوسیلهٔ رادیکال ممکن نیست.

درحالت‌خاصی‌که $n = ۲^k$ باشدمیتوان توابع مثلثاتی آوند$\frac{\alpha}{۲k}$ را بر حسب آوند α بوسیلهٔ رادیکال بیان‌کرد. مثلا:

$$\cos\frac{\alpha}{۴} = \cos\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{\alpha}{۲}\right) = \pm\sqrt{\frac{۱ + \cos\frac{\alpha}{۲}}{۲}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۱ \pm \sqrt{\frac{۱ + \cos\alpha}{۲}}}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱ + \cos\alpha}}{۲\sqrt{۲}}}$$

چند مثال:

۱. روابط $(T'_{\frac{\alpha}{۲}})$ ، $(T''_{\frac{\alpha}{۲}})$ را باکمك رابطهٔ $(T_{\frac{\alpha}{۲}})$ بدست آورید.

حل. اگر دررابطهٔ $(T_{\frac{\alpha}{۲}})$ مخرج کسررا گویاکنیم، بدست میآید:

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{\pm\sqrt{۱-\cos\alpha}}{\sqrt{۱+\cos\alpha}}=\frac{\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}}{۱+\cos\alpha}=\frac{\pm\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

از دوعلامتی که‌درصورت کسروجوددارد، بایستی علامت $+$ را انتخاب کرد، زیرا بازاء تمام مقادیر قابل قبول α (یعنی $\alpha\neq(۲k+۱)\pi$) مخرج کسرمثبت‌است و $\sin\alpha$ و $tg\frac{\alpha}{۲}$ هم همیشه هم علامتند. در حقیقت اگر $۲k\pi\leqslant\alpha\leqslant(۲k+۱)\pi$ باشد $\sin\alpha\geqslant۰$ خواهد بود و ضمناً داریم: $k\pi\leqslant\frac{\alpha}{۲}\leqslant\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ یعنی انتهای قوس $\frac{\alpha}{۲}$ در ربع اول و یا سوم خواهد بود (بسته به‌اینکه k عددی زوج ویا فرد باشد)، یعنی دراینحالت $tg\frac{\alpha}{۲}\geqslant۰$ میشود.

بهمین ترتیب اگر $(۲k+۱)\pi<\alpha\leqslant۲(k+۱)\pi$ باشد $\sin\alpha\leqslant۰$ خواهد بود وضمناً داریم: $\frac{۲k+۱}{۲}\pi<\frac{\alpha}{۲}\leqslant(k+۱)\pi$ وانتهای‌قوس $\frac{\alpha}{۲}$ در ربع دوم و یاچهارم و $tg\frac{\alpha}{۲}\leqslant۰$ خواهدبود.

بهمین‌ترتیب‌میتوان رابطهٔ $(T''_{\frac{\alpha}{۲}})$ راهم‌از $(T_{\frac{\alpha}{۲}})$ بدست‌آورد (دررابطهٔ $(T_{\frac{\alpha}{۲}})$ صورت‌کسر راگویا کنید).

۲. $\cos\frac{\pi}{۲n}$ و $\sin\frac{\pi}{۲n}$ رامحاسبه‌کنید.

حل. داریم:

$$\cos\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;\quad \sin\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;$$

$$\cos\frac{\pi}{۸}=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\ ;\quad \sin\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲};$$

$$\cos\frac{\pi}{۱٦}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{۲}\ ;\quad \sin\frac{\pi}{۱٦}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{۲}.$$

برای سهولت فرض می‌کنیم:

$$R_n=\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\dots+\sqrt{۲}}}} \qquad (n=۱،۲،۳،\dots)$$

که درآن تعداد رادیکالها مساوی n است.

باین‌ترتیب داریم:

$$\cos\frac{\pi}{۲^۳}=\frac{R_۲}{۲};\quad \cos\frac{\pi}{۲^۴}=\frac{R_۳}{۲}\;;$$

$$\sin\frac{\pi}{۲^۳}=\frac{\sqrt{۲-R_۱}}{۲}\quad;\quad \sin\frac{\pi}{۲^۴}=\frac{\sqrt{۲-R_۲}}{۲}$$

وحال ازروش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم، اگرداشته باشیم:

$$\cos\frac{\pi}{۲^n}=\frac{R_{n-۱}}{۲}\quad;\quad \sin\frac{\pi}{۲^n}=\frac{\sqrt{۲-R_{n-۲}}}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$\cos\frac{\pi}{۲^{n+۱}}=\sqrt{\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۲^n}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲+R_{n-۱}}}{۲}=\frac{R_n}{۲}$$

و شبیه آن:

$$\sin\frac{\pi}{۲^{n+۱}}=\sqrt{\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۲^n}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲-R_{n-۱}}}{۲}$$

باین ترتیب اگر رابطه، برای قوس $\frac{\pi}{۲^n}$ صحیح باشد، برای قوس $\frac{\pi}{۲^{n+۱}}$ هم صحیح خواهد بودوچون برای $n=۳$ صحیح است، برای هرمقدار $n\geqslant ۳$ نیزصحیح خواهد بود.

تمرینهای مختلفی دربارهٔ مواردداستعمال روابط ضرب و تقسیم قوسهادر بند ۲۷ داده شده است.

۲۵. روابط تبدیل صورت ضرب توابع مثلثاتی به مجموع

قضیه. برای هرمقدار دلخواه α و β اتحادهای زیر برقراراست:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{۲}\ ; \qquad (C.C)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{۲}\ ; \qquad (S.S)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{۲}\ ; \qquad (S.C)$$

اثبات. اگر تساویهای $(C_{\alpha+\beta})$ و $(C_{\alpha-\beta})$ که مربوط به کسینوس مجموع وتفاضل دو قوس‌اند جمع کنیم، بدست میآید:

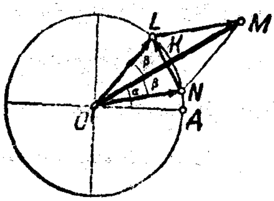
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = ۲\cos\alpha\cos\beta$$

واز آنجا رابطهٔ $(C.C)$ نتیجه میشود.

اگر تساویهای $(C_{\alpha+\beta})$ و $(C_{\alpha-\beta})$ را ازهم کم کنیم، رابطهٔ $(S.S)$ بدست میآید ورابطهٔ $(S.C)$ هم ازمجموع روابط $(S_{\alpha+\beta})$ و $(S_{\alpha-\beta})$ نتیجه می‌شود.

این روابط محاسبهٔ حاصلضرب سینوسها و کسینوسها را به محاسبهٔ مجموع این توابع (منتهی باآوندهای دیگری) منجر میکند.

تعبیر هندسی. α رازاویه‌ای دلخواه و β را حاده فرض کنید. یك لوزی بسازید که دوضلع مجاورآن شعاعهائی از دایرهٔ واحد باشند که باضلع انتهای زاویهٔ α، زاوایای $\pm\beta$ میسازند (شکل ۱۰۸)



ش ۱۰۸

قطر OM لوزی، خط شکستهٔ OLM را مسدود می‌کند و بنابراین اگر برمحورافقی تصویر کنیم، داریم:

(۱) (تصویر OM) = (تصویر LM) + (تصویر OL)

بردارهای OL و LM با محور ox زوایای $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ می‌سازند، بنابراین:

$$(\text{تصویر}\ OL) = cos(\alpha+\beta) \quad ; \quad (\text{تصویر}\ LM) = cos(\alpha-\beta) \quad ;$$
$$(\text{تصویر}\ OM) = ۲OK\,cos\,\alpha$$

(K محل تلاقی دوقطراست و داریم: $OK = cos\,\beta$). اگراین‌مقادیر را در رابطهٔ (۱) قراردهیم وطرفین‌آنرا بر ۲ تقسیم کنیم، رابطهٔ (C.C) بدست می‌آید.

با تصویر برقطرقائم هم رابطهٔ (S.C) بدست می‌آید.

قطر دوم لوزی NL بامحور ox زاویهٔ $\alpha+\frac{\pi}{۲}$ میسازد وپاره خط OL خط شکستهٔ ONL رامسدودمی‌کند.

داریم:

$$(\text{تصویر}\ NL\ \text{بر}\ ox) = ۲(\text{تصویر}\ NK) = ۲\,sin\,\beta\,cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -۲\,sin\,\beta\,sin\,\alpha$$

و:

$$cos(\alpha+\beta) = (\text{تصویر}\ OL\ \text{بر}\ ox) = (\text{تصویر}\ ON\ \text{بر}\ ox) + (\text{تصویر}\ NL\ \text{بر}\ ox) =$$
$$= cos(\alpha-\beta) - ۲\,sin\,\alpha\,sin\,\beta .$$

و ازآنجا رابطهٔ (S.S) بدست می‌آید.

بعنوان تمرین شکل را درحالتی‌که زاویهٔ β حاده نباشد (ومثلازاویهٔ منفرجه باشد) رسم‌کنید.

تبصره. این تعبیرهندسی نمی‌تواند معرف روابط مورد نظر باشد،زیرا روابط مزبور بازاء هرمقدار α و β صحیح است، نه‌فقط برای زاویهٔ حادهٔ β.

بااستفادهٔ متوالی‌ازروابط (C.C)، (S.S) و (S.C) می‌توان صورت ضرب: $cos\,\alpha_۱\,cos\,\alpha_۲\cdots cos\,\alpha_n\cdot sin\,\beta_۱\cdot sin\,\beta_۲\cdots sin\,\beta_m$

را بصورت مجموع‌چند سینوس و کسینوس نوشت.

اگر درروابط (S.C)، (C.C) و(S.S) فرض کنیم $\beta=\alpha$، روابطی بدست می‌آید که $\sin\alpha\cos\alpha$ ومربعات کسینوس وسینوس را برحسب تابع قوس دوبرابر بدست میدهد:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha;\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

بابکاربردن متوالی این‌روابط‌میتوان‌هر توانی‌ازسینوس وکسینوس‌یك قوس ویاحاصلضربی‌از توانهای آنهارا برحسب مجموع سینوس و کسینوس مضارب آن قوس نوشت.

برای‌اینکه روابط کلی توانهای کسینوس و سینوس را برحسب توابع مضارب قوس بدست آوریم، بایستی از رابطهٔ مواور استفاده کنیم. فرض‌میکنیم:

$$u=\cos\alpha+i\sin\alpha;\quad v=\cos\alpha-i\sin\alpha;$$

دراینصورت خواهیم داشت:

$$\cos\alpha=\frac{u+v}{2};\ \sin\alpha=\frac{u-v}{2};\ u\cdot v=1;$$

$$u^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha;\quad v^n=\cos n\alpha-i\sin n\alpha;$$

وازآنجا: $\cos n\alpha=\frac{1}{2}(u^n+v^n);\quad \sin n\alpha=\frac{1}{2i}(u^n-v^n).$

وبنابراین:

$$\cos^n\alpha=\left(\frac{u+v}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}(u^n+C_n^1u^{n-1}v+C_n^2u^{n-2}v^2+\dots+$$

$$+C_n^2u^2v^{n-2}+C_n^1uv^{n-1}+v^n)=$$

$$=\frac{1}{2^n}\Big[(u^n+v^n)+C_n^1uv(u^{n-2}+v^{n-2})+C_n^2u^2v^2(u^{n-4}+$$

$$+v^{n-4})+\dots\Big]=\frac{1}{2^{n-1}}\Big[\cos n\alpha+C_n^1\cos(n-2)\alpha+$$

$$+C_n^2\cos(n-4)\alpha+\dots\Big].$$

وبهمین ترتیب:

$$\sin^{n}\alpha=\frac{۱}{۲^{n}i^{n}}(u-v)^{n}=\frac{۱}{۲^{n}i^{n}}\left[u^{n}-C_{n}^{۱}u^{n-۱}v+C_{n}^{۲}u^{n-۲}v^{۲}-\dots\right]$$

که بازاء $n=۲k$ داریم:

$$\sin^{۲k}\alpha=\frac{(-۱)^{k}}{۲^{۲k}}\Big[(u^{۲k}+v^{۲k})-C_{۲k}^{۱}uv(u^{۲k-۲}+$$

$$+v^{۲k-۲})+\dots\Big]=$$

$$=\frac{(-۱)^{k}}{۲^{۲k-۱}}\left[\cos ۲k\alpha-C_{۲k}^{۱}\cos(۲k-۲)\alpha+C_{۲k}^{۲}\cos(۲k-۴)\alpha-\dots\right].$$

ووقتی که $n=۲k+۱$ باشد، داریم:

$$\sin^{۲k+۱}\alpha=\frac{(-۱)^{k}}{۲^{۲k+۱}i}\Big[(u^{۲k+۱}-v^{۲k+۱})-C_{۲k+۱}^{۱}uv(u^{۲k-۱}-$$

$$-v^{۲k-۱})+C_{۲k+۱}^{۲}u^{۲}v^{۲}(u^{۲k-۳}-v^{۲k-۳})-\dots\Big]=$$

$$=\frac{(-۱)^{k}}{۲^{۲k}}\Big[\sin(۲k+۱)\alpha-C_{۲k+۱}^{۱}\sin(۲k-۱)\alpha+$$

$$+C_{۲k+۱}^{۲}\sin(۲k-۳)\alpha+\dots\Big].$$

تساویهائی را که بدست آوردیم ، میتوان با روش استقراء ریاضی و با استفاده ازروابط:

$$\cos^{n+۱}\alpha=\cos^{n}\alpha\,.\,\cos\alpha\ ;\quad \sin^{n+۱}\alpha=\sin^{n}\alpha\,.\sin\alpha\,;$$

و روابط (C.C)، (S.C) و (S.S) بدست آوردکه ما آنرا بعنوان‌تمرین بعهدهٔ خواننده می گذاریم

تبصره. درعمل برای نوشتن توانهای $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بر حسب توابع مثلثاتی مضارب‌قوس‌می‌توان ازروابط کلی‌استفاده نکرد وتبدیل‌را بتدریج انجام داد، همانطورکه درمثالهای ۱،۲،۳ دراینجا دیده میشود.

چندمثال.

۱. $\sin^{۳}\alpha$ رابرحسب‌توابع مضارب قوس α بنویسید.

حل . داریم:

$$\sin^3\alpha=\sin^2\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\times\frac{\sin 3\alpha+\sin(-\alpha)}{2}=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

۲ . $\sin^4\alpha$ را برحسب توابع مثلثاتی‌مضارب قوس α بنویسید.

حل. داریم:

$$\sin^4\alpha=\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\times\frac{1+\cos 4\alpha}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha.$$

۳ . $\sin^3\alpha\cos^5\alpha$ را برحسب توابع مثلثاتی مضارب α بنویسید :

حل . داریم:

$$\sin^3\alpha\cos^5\alpha=(\sin\alpha\cos\alpha)^3\cos^2\alpha=\frac{1}{16}\sin^3 2\alpha(1+\cos 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{16}\sin^2 2\alpha(\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha)=\frac{1}{32}(1-\cos 4\alpha)(\sin 2\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\sin 4\alpha)=\frac{1}{32}\Big[\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha\sin 2\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\cos 4\alpha\sin 4\alpha\Big]$$

ولی‌داریم: $$\cos 4\alpha\sin 2\alpha=\frac{\sin 6\alpha-\sin 2\alpha}{2};$$

$$\cos 4\alpha\sin 4\alpha=\frac{1}{2}\sin 8\alpha;$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sin^3\alpha\cos^5\alpha=\frac{3}{64}\sin 2\alpha+\frac{1}{64}\sin 4\alpha-\frac{1}{64}\sin 6\alpha-\frac{1}{128}\sin 8\alpha.$$

۴. بدون استفاده ازجدول، حاصلضرب‌زیررا محاسبه کنید:

$$P = tg\,20^\circ\, tg\,40^\circ\, tg\,60^\circ\, tg\,80^\circ$$

حل: داریم:
$$P = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ};$$

قبلا درمثال صفحهٔ ۱۶۰ ثابت کردیم: $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

بنابراین مخرج کسر P مساوی $\frac{1}{16}$ است. برای محاسبهٔ صورت کسر از رابطهٔ (S.C) استفاده می‌کنیم:

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)$$

وبالاخره:

$$\frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big[\cos 20^\circ \sin 80^\circ -$$
$$-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\Big] = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big[\frac{\sin 100^\circ + \sin 60^\circ}{2} - \frac{1}{2}\sin 80^\circ\Big] = \frac{3}{16}$$

(توجه کنید که $\sin 80^\circ = \sin 100^\circ$ میباشد).

وبنابراین $P = 3$ خواهدبود.

۵. ثابت کنید:

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) - \cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) +$$
$$+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta) + \cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha) = 0$$

حل: هریك ازجملات را به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta).$$

اگر بقیهٔ جملات را بهمین نحو تبدیل وسپس با هم جمع کنیم، حاصل برابر صفر خواهدشد.

۲۶. روابط تبدیل مجموع توابع مثلثاتی بصورت ضرب

قضیه. برای هرمقداردلخواهی از α و β داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad (C+C)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad (C-C)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad (S+S)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (S-S)$$

و برای هرمقدار α و β که مخالف $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشند داریم:

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad (T+T)$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (T-T)$$

اثبات. برای اثبات چهار رابطهٔ اول، آوندهای φ و ψ را بر حسب آوندهای α و β چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\varphi+\psi=\alpha \quad , \quad \varphi-\psi=\beta \qquad (L)$$

بازاء همهٔ مقادیر α و β، معادلات (L) میتوانند نسبت به φ و ψ حل شوند:

$$\varphi=\frac{\alpha+\beta}{۲}; \qquad \psi=\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad (L')$$

دراینصورت داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)=۲\cos\varphi\cos\psi=$$

$$=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}.$$

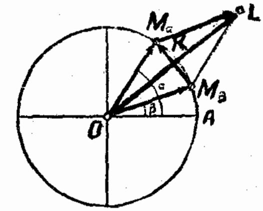
وبهمین ترتیب سه رابطهٔ دیگرهم ثابت می‌شود.

تساویهای $(T \pm T)$ هم بسادگی بدست می‌آید:

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

روابط تبدیل مجموع توابع مثلثاتی را بصورت ضرب، روابط تبدیل **بصورت لگاریتمی** هم‌می‌گویند. برای‌استفاده ازجداول لگاریتم‌همیشه‌ساده‌ترین صورت یك عبارت، صورت ضرب آنست.

تعبیرهندسی. شعاعهای دایرهٔ واحد راکه با قطرافقی زوایای α و β می‌سازند، رسم می‌کنیم، زاویهٔ بین این دو شعاع مساوی $\alpha - \beta$ خواهد بود. حالتی را درنظرمی‌گیریم که $0 < \alpha - \beta < \pi$ باشد. قطر OL ازلوزی که روی شعاعهای برداری OM_α و OM_β ساخته شده، با محور ox زاویه‌ای‌مساوی $\frac{\alpha+\beta}{2}$ میسازد و طول آن برابراست‌با (شکل ۱۰۹):



ش ۱۰۹

$$|OL| = 2|OK| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

خط شکستهٔ $OM_\beta L$ راروی‌محور طول تصویر می‌کنیم، بدست‌میآید:

$$(\text{تصویر } OL) = (\text{تصویر } M_\beta L) + (\text{تصویر } OM_\beta) \quad ; \quad (1)$$

ولی‌داریم:

$$(\text{تصویر } OM_\beta) = \cos\beta; \quad (\text{تصویر } M_\beta L) = (\text{تصویر } OM_\alpha) = \cos\alpha;$$

$$(\text{تصویر } OL) = |OL|\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

که اگر درتساوی (۱) قراردهیم، رابطهٔ $(C+C)$ بدست می‌آید. اگر برمحور قائم تصویرمی‌کردیم، رابطهٔ $(S+S)$ بدست می‌آمد.

قطردوم لوزی $M_\beta M_\alpha$ بامحور ox زاویهٔ $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$ می‌سازد و طول آن برابراست با:

$$|M_\beta M_\alpha| = 2|M_\beta K| = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

شعاع‌برداری OM_α خط‌شکستهٔ $OM_\beta M_\alpha$ رامسدود می‌کند. داریم:

$$(\text{تصویر}\ OM_\alpha) = (\text{تصویر}\ OM_\beta) + (\text{تصویر}\ M_\beta M_\alpha)$$

یا :
$$\cos\alpha = \cos\beta + 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

که باتوجه باینکه $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ است،رابطهٔ $(C-C)$ بدست می‌آید. بهمین ترتیب ازتصویرروی محور oy ، به رابطهٔ $(S-S)$ می‌رسیم.

ولی روشن است که این تعبیرهندسی نمی‌تواند معرف رابطهٔ کلی تبدیل بصورت مجموع باشد.

چندنتیجه ازروابط اساسی:

۱) $$\cos\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

ودرحالت خاص $\alpha = \beta$:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

۲) اگردر روابط $(T+T)$ و $(T-T)$ فرض کنیم $\beta = \frac{\pi}{4}$،داریم:

$$1 + tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}\ ;\quad 1 - tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha}\ .$$

۳) $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

۴) $$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}\ ;\ \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

۵) $$1+\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

و چون $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$1+\sin\alpha=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$$

۶) $$1-\sin\alpha=2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha).$$

چند مثال:

۱. عبارت $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ را بصورت ضرب تبدیل کنید.

حل . راه اول:

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\times 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

راه دوم:

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)-\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

۲. عبارت زیررا بصورت ضرب تبدیل کنید:

$$S=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha$$

حل. داریم:

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha;$$

وبنا براین:

$$S=(2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha)+(2\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha)$$

ضمناً داریم:

$$2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\sin 2\alpha\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

وبهمین ترتیب:

$$2\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

وازآنجا:

$$S=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

۳. این عبارت را بصورت ضرب تبدیل کنید:

$$S=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

حل. جملات اول ودوم را با هم وجملات سوم وچهارم را باهم درنظر گرفته وتجزیه می‌کنیم:

$$S=(\sin\alpha+\sin\beta)-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\right]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

وبنابراین:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

۴. بصورت ضرب تبدیل کنید:

$$S=tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

حل. طبق رابطهٔ:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma)$$

بسادگی خواهیم داشت: $S=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$

۵. باچه شرایطی رابطهٔ زیرصحیح است:

$$\sin x+\sin y=\sin(x+y)?$$

حل . عبارتهای دوطرف تساوی راتبدیل‌می‌کنیم:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

ودرنتیجه تساوی مفروض رامیتوان چنین نوشت:

$$\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0$$

ویا: $$2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0$$

هریك ازعوامل را مساوی صفر قرارمی‌دهیم:

a) $$\sin\frac{x+y}{2}=0 \implies \frac{x+y}{2}=k\pi \implies x+y=2k\pi$$

b) $\quad \sin\frac{x}{۲}=۰ \Longrightarrow x=۲k\pi \quad , \quad y=$ قوسی‌دلخواه

c) $\quad \sin\frac{y}{۲}=۰ \Longrightarrow y=۲k\pi \quad , \quad x=$ قوسی‌دلخواه

باین ترتیب برای اینکه تساوی فرض صحیح باشد لازم و کافی است که یکی ازشرایط a ، b یا c برقرار باشد، یعنی‌یا انتهای‌قوسهای x و y نسبت به محور طول متقارن باشند و یا انتهای یکی از دوقوس برنقطهٔ (۱۰۰)واقع باشد.

۲۷. مثالهائی ازکاربرد تبدیلات مختلف مثلثاتی

قضایای مجموع ونتایجی‌که ازآنها بدست‌آوردیم(روابط تبدیل،روابط مربوط به توابع مثلثاتی مضرب ویانصف قوس، روابط تبدیل ضرب به‌مجموع ومجموع بضرب) بااتحادهای اصلی مثلثاتی (به‌بند ۱۶ مراجعه‌کنید)پایه‌های اساسی اتحادهای مختلفی هستندکه صورت تحلیلی دارند ومحتوی اعمال‌آنها مثلثاتی است.

این اتحادها چه از نظر هدفی که تعقیب می‌کنند و چه از نظر روش اثبات آنها، بی‌اندازه متنوع‌اند.

دراین بندکوشش شده است انواع مختلفی ازاین نمونه‌هاآورده شود.

چند مثال:

درتمرینات‌از ۱ تا ۷ نمونه‌های مختلفی ازتبدیل‌مجموع‌بضرب‌وضرب به مجموع داده‌شده است.

۱. بصورت ضرب تبدیل کنید .

$$S=(\cos x+\cos y)^{۲}+(\sin x+\sin y)^{۲}$$

حل: داریم:

$$S=(\cos^2 x+\sin^2 x)+(\cos^2 y+\sin^2 y)+$$

$$+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=2[1+\cos(x-y)]=4\cos^2\frac{x-y}{2}$$

۲. به‌ضرب تبدیل کنید:

$$S=(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)^3-\sin^3\alpha-\sin^3 2\alpha-\sin^3 3\alpha$$

حل: اگر ازاین اتحاد جبری استفاده کنیم:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x);$$

داریم:

$$S=3(\sin\alpha+\sin 2\alpha)(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)(\sin 3\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=3\times 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times 2\sin 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=24\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}\sin 2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,.$$

۳. صحت اتحاد زیررا تحقیق کنید:

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{1}{\sin(b-c)\sin(b-a)}+$$

$$+\frac{1}{\sin(c-a)\sin(c-b)}=\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}$$

حل: عبارت سمت چپ تساوی را بیك مخرج تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(a-c)}\Big[\sin(b-c)-$$

$$-\sin(a-c)+\sin(a-b)\Big].$$

عبارت داخل کروشه رابصورت ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\sin(b-c)-\sin(a-c)=2\cos\frac{a+b-2c}{2}\sin\frac{b-a}{2};$$

وسپس:

$$۲\cos\frac{a+b-۲c}{۲}\sin\frac{b-a}{۲}+\sin(a-b)=$$

$$=۲\sin\frac{b-a}{۲}\left[\cos\frac{a+b-۲c}{۲}-\cos\frac{b-a}{۲}\right]=$$

$$=-۴\sin\frac{b-a}{۲}\sin\frac{b-c}{۲}\sin\frac{a-c}{۲}.$$

حالااگر هر یك از عوامل مخرج کسر جلو کروشه را با کمك رابطهٔ $\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$ تبدیل کنیم، پس‌ازساده کردن، طرف‌دوم‌اتحادبدست‌میآ ید.

۴. اتحادهای زیر راثابت کنید:

a) $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+$$
$$+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\cdot$$

b) $$\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+$$
$$+\frac{\cos\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\cdot$$

حل. a) عبارت را بیك مخرج تحویل می‌کنیم، صورت کسر چنین خواهدشد:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

که در آن هر یك از جملات را می‌توان از روی جملهٔ قبل با تبدیل دوری نسبت‌به α و β و γ بدست‌آورد، اولین جملهٔ راطبق‌رابطهٔ (S.S) تبدیل‌میکنیم:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$$

که نتیجهٔ دو جملهٔ دیگر راهم‌میتوان با تبدیل دوری این نتیجه نسبت

به آوندها بدست آورد و بسادگی معلوم میشود که مجموع آنها برابر صفر است.

b) اگر در اتحاد (a) مقادیر α ، β و γ را به $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ، $\frac{\pi}{2}-\beta$ و $\frac{\pi}{2}-\gamma$ تبدیل کنیم، اتحاد (b) بدست می‌آید.

۰۵ اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)+$$
$$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta-\gamma)=2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

حل: از آنجا که هر یك از جملات سمت چپ تساوی با تبدیل دوری عبارت قبل نسبت به آوندهای α ، β و γ بدست می‌آید ، کافیست جملهٔ اول را محاسبه کنیم:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)\right]$$

و سپس:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta+\gamma)-$$
$$-\frac{1}{2}\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{1}{4}\left[\sin 2\gamma+\right.$$
$$\left.+\sin(2\beta-2\alpha)-\sin 2\beta-\sin(2\gamma-2\alpha)\right]$$

حالا اگر نتیجهٔ جملات دوم و سوم سمت چپ اتحاد فرض را با تبدیل دوری همین عبارت اخیر، بدست آوریم و باهم جمع کنیم، نتیجه میشود:

$$\frac{1}{2}\left[\sin 2(\beta-\alpha)+\sin 2(\gamma-\beta)+\sin 2(\alpha-\gamma)\right]$$

ادامهٔ مسئله با تبدیل مقدار داخل کروشه بصورت ضرب (شبیه تمرین ۳) بسادگی بانجام میرسد.

۰۶ چه رابطه‌ای بین آوندهای α، β و γ برقرار باشد، اگر داشته باشیم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1 \qquad (1)$$

حل: مجموع زیر را بصورت ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$S=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1;$$

داریم:

a) $\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=\cos^2\beta-\sin^2\gamma=$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2\beta+\cos 2\gamma]=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma);$$

b) $\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos^2\alpha+$

$$+\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)];$$

c) $S=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+\cos^2\alpha+\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+$

$$+\cos(\beta-\gamma)]=[\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)][\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)].$$

واز آنجا بدست می‌آید:

$$S=4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

شرط (۱) باتساوی $S=0$ معادل است وشرط لازم و کافی برای اینکه $S=0$ باشد، اینست که یکی ازعوامل تشکیل دهندهٔ آن مساوی صفر شود، اگر اولین عامل را مساوی صفر قراردهیم:

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0 \implies \alpha+\beta+\gamma=(2k_1+1)\pi. \qquad (2)$$

وبهمین ترتیب باصفر قرار دادن هریك از عوامل دیگر به روابط زیر می‌رسیم:

$$-\alpha+\beta+\gamma=(2k_2+1)\pi; \qquad (3)$$

$$\alpha-\beta+\gamma=(2k_3+1)\pi; \qquad (4)$$

$$\alpha+\beta-\gamma=(2k_4+1)\pi. \qquad (5)$$

که درآنها k_1، k_2، k_3، k_4 اعداد صحیح دلخواهی هستند.

اگردرحالت خاص α،βوγ را زوایای حاده فرض کنیم:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2};\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2};\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

دراینحالت هیچیك ازروابط (۳) ،(۴) ،(۵) نمی‌توانند برقرارباشند، درحقیقت ازنامساویهای (۶) مثلا بدست می‌آید:

$$-\frac{\pi}{2}<-\alpha+\beta+\gamma<\pi$$

وبنابراین تساوی (۳) غیرممکن میشود، زیرا $-\alpha+\beta+\gamma$ نمیتواند مساوی مضرب فردی از π شودو بهمین ترتیب تساویهای (۴)، (۵) هم غیرممکن می‌شود. ازنامساوی:

$$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که وقتی α، β و γ زوایائی حاده باشند، شرط (۲) هم تنها بازاء $k=1$ برقرار است. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

یعنی باحاده بودن زوایای α، β و γ شرط لازم وکافی برای وجودتساوی (۱) اینست که مجموع سه‌زاویه مساوی π باشد (یعنی α ، β ، γ زوایای یك مثلث باشند).

۷. مجموع زیررا بصورت ضرب بنویسید:

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}$$

حل: مقادیرزیرهریك ازرادیکالها بازاء هرمقداری ازآوند x مثبت است وبنابراین مقادیرقابل قبول آوند $-\infty<x<\infty$ است. هریك ازرادیکالها راتبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|;$$

$$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|;$$

وبنابراین:

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right).$$

بسته باینکه قوس $\frac{x}{2}$ درچه ربعی ازدایرهٔ مثلثاتی واقع باشد، حالتهای زیر را خواهیم داشت:

a) $4k\pi \leqslant x \leqslant (4k+1)\pi$، (قوس $\frac{x}{2}$ به ربع اول ختم شده است)

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

b) $(4k+1)\pi \leqslant x \leqslant (4k+2)\pi$، (قوس $\frac{x}{2}$ به ربع دوم ختم شده است)

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

c) $(4k+2)\pi \leqslant x \leqslant (4k+3)\pi$، (قوس $\frac{x}{2}$ به ربع سوم ختم شده است)

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=-\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

d) $(4k+3)\pi \leqslant x \leqslant 4(k+1)\pi$، (انتهای قوس $\frac{x}{2}$ در ربع چهارم است)

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

درتمرینات از ۸ تا ۱۱ تبدیلات مختلف مثلثاتی که برای حذف مجهول ازمعادلات لازم است، وجوددارد. دراین تمرینات دستگاه معادلاتی داده‌شده است که به پارامترهائی بستگی دارند. ضمناً درحالت کلی این‌دستگاه بازاء همهٔ مقادیر قابل قبول پارامترها دارای جواب نیست. بایستی شرایط لازم (ودرحالت کلی‌غیرکافی) را برای پارامترها بصورت معادله پیدا کردتادستگاه دارای جواب باشد.

درعمل برای حذف مجهولات بایستی به نکات زیر توجه کرد:

۱) برای اینکه تنها شرایط لازم وجود دستگاه پیداشود ، تغییراتی درمعادلات قابل‌قبول است که در نتیجهٔ آنها مجموعهٔ جوابهای دستگاه منبسط شود (یعنی ممکن است جوابهای خارجی وارد شود) و تغییراتی که منجر به حذف بعضی ازجوابها شوند، قابل قبول نیستند.

۲) تغییر معادلات در اینجهت انجام می‌گیرد که بعنوان نتیجه، معادله‌ای بین پارامترها بدست آید که مستقل از مجهولات باشد و تشکیل اتحاد هم ندهد.

۸. x را ازدستگاه معادلات زیر حذف کنید:

$$\sin x+\cos x=m, \quad \sin^3 x+\cos^3 x=n.$$

حل: داریم:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)=$$
$$=m(1-\sin x\cos x).$$

طرفین معادلهٔ اول را مجذور می‌کنیم:

$$1+2\sin x\cos x=m^2.$$

در نتیجه دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$2\sin x\cos x=m^2-1, \quad m\sin x\cos x=m-n$$

باحذف جملهٔ $\sin x\cos x$ دراین‌دومعادله، رابطهٔ مورد نظر بین‌پارامترها بدست می‌آید:

$$m^3-3m+2n=0 \qquad (1)$$

تبصره: رابطهٔ (۱) رابعنوان **شرط لازم** بدست آوردیم، دراینجادنبال این مطلب که‌پارامترها درچه‌نامساویهائی بایدصدق کنند، نرفتیم. مثلاازمعادله اول بدست میآید:

$$m=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \implies |m|\leqslant\sqrt{2}$$

همچنین دراینمورد دقت نکردیم که مجذور کردن معادله ، ممکن است منجر به جوابهای خارجی شود.

این تبصره را درمورد حل همهٔ تمریناتی که ما برای حذف مجهولات، درزیرخواهیم آورد، باید درنظرداشت.

۹. ازمعادلات زیر φ راحذف کنید:

$$\frac{\cos(\alpha-3\varphi)}{\cos^3\varphi}=\frac{\sin(\alpha-3\varphi)}{\sin^3\varphi}=\mathrm{m}.$$

حل: داریم:

$$\cos(\alpha-3\varphi)=\mathrm{m}\cos^3\varphi; \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-3\varphi)=\mathrm{m}\sin^3\varphi. \qquad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) رابترتیب در $\cos 3\varphi$ ، $\sin 3\varphi$ ضرب وسپس از هم کم می‌کنیم:

$$\cos(\alpha-3\varphi)\cos 3\varphi-\sin(\alpha-3\varphi)\sin 3\varphi=$$

$$=\mathrm{m}(\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi),$$

یا:

$$\cos\alpha=\mathrm{m}(\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi).$$

ازطرف دیگرداریم:

$$\cos 3\varphi=-3\cos\varphi+4\cos^3\varphi,$$

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.$$

وازآنجا:

$$\cos\alpha=-3\mathrm{m}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)+4\mathrm{m}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi). \qquad (3)$$

طرفین معادلات (۱)و(۲) را مجذورکرده وباهم جمع می‌کنیم، بدست میآید:

$$\cos^6\varphi+\sin^6\varphi=\frac{1}{\mathrm{m}^2}, \qquad (4)$$

رابطهٔ (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\cos^4\varphi-\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi=\frac{1}{\mathrm{m}^2}, \qquad (5)$$

ضمناً داریم:

$$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\varphi \quad و \quad \sin^2\varphi\cos^2\varphi=\frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi).$$

بنابراین تساویهای (۳) و(۵) بصورت زیردرمی‌آید:

$$\cos\alpha=\left(-\frac{۹}{٤}-\frac{۳}{٤}\cos ۴\varphi\right)m+\frac{٤}{m}, \qquad (۶)$$

$$\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴\varphi=\frac{۱}{m^۲}\Longrightarrow \cos ۴\varphi=\frac{۸}{۳m^۲}-\frac{۵}{۳}, \qquad (۷)$$

که اگردررابطهٔ (۶) قراردهیم، بدست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{۲-m^۲}{m}$$

۱۰. x را درمعادلات زیر حذف کنید:

$$\cos(x-\alpha)=a \quad , \quad \sin(x-\beta)=b.$$

حل: داریم:

$$\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=a$$

$$\sin x\cos\beta-\cos x\sin\beta=b$$

معادلات مفروض را بترتیب ابتدا در $\sin\beta$ و $\cos\alpha$ و سپس در $\cos\beta$ و $-\sin\alpha$ ضرب وبا هم‌جمع می‌کنیم:

$$\sin x\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha;$$

$$\cos x\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha.$$

که پس از مجذور کردن‌این معادلات وسپس جمع آنها، خواهیم‌داشت:

$$\cos^۲(\alpha-\beta)=a^۲+b^۲-۲ab\sin(\alpha-\beta)$$

۱۱. x و y را ازدستگاه معادلات زیرحذف کنید.

$$\sin x+\sin y=۲a\ ; \qquad (۱)$$

$$\cos x+\cos y=۲b\ ; \qquad (۲)$$

$$tg x+tg y=۲c\ ; \qquad (۳)$$

که درآنها $a^۲+b^۲\neq ۰$ است.

حل: (۱) و(۲) را مجذورمی‌کنیم:

$$\sin^۲x+۲\sin x\sin y+\sin^۲y=۴a^۲;$$

$$\cos^۲x+۲\cos x\cos y+\cos^۲y=۴b^۲;$$

ازجمع وتفریق این دومعادله خواهیم داشت:

$$\cos(x-y)=۲(a^۲+b^۲)-۱; \qquad (۴)$$

$$\cos ۲x+\cos ۲y+۲\cos(x+y)=۴(b^۲-a^۲).$$

معادلهٔ اخیر را تبدیل می کنیم:

$$\cos(x+y)[\cos(x-y)+۱]=۲(b^۲-a^۲)$$

ویا با توجه به‌رابطهٔ(۴):

$$\cos(x+y)=\frac{b^۲-a^۲}{a^۲+b^۲}$$

معادلات (۱) و (۲) رادرهم ضرب می کنیم:

$$\sin x\cos x+\sin y\cos y+\sin(x+y)=۴ab;$$

ولی چون داریم:

$$\sin x\cos x+\sin y\cos y=\frac{۱}{۲}[\sin ۲x+\sin ۲y]=\sin(x+y)\cos(x-y),$$

دراینصورت خواهیم داشت:

$$\sin(x+y)[\cos(x-y)+۱]=۴ab;$$

وبا توجه به(۴):

$$\sin(x+y)=\frac{۲ab}{a^۲+b^۲}$$

اکنون سمت چپ رابطهٔ (۳) را تبدیل می کنیم:

$$tg\,x+tg\,y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=\frac{۲\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=$$

$$=\frac{۲ab}{(a^۲+b^۲)^۲-a^۲}$$

که اگر دررابطهٔ (۳) قراردهیم، رابطهٔ موردنظر بدست میآید:

$$\frac{ab}{(a^۲+b^۲)^۲-a^۲}=c$$

تمرینات۱۲ تا۹۶ مربوط به‌اثبات‌تساویهای‌شرطی‌است، یعنی‌تساویهائی که برای همهٔ مقادیرآوندکه دریك یاچند معادله صدق‌میکنند، صادق‌اند.

۱۲. ثابت کنید تساوی:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

بازاء مقادیری از x که درشرط زیرصدق می کنند.

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b} \qquad (1)$$

درست‌است ($b>0$ ، $a>0$).

حل: تساوی (۱) میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{b}{a}\sin^4 x+\frac{a}{b}\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$$

که پس ازتبدیل چنین میشود:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2 x-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2 x\right)^2=0 \Longrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2 x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2 x$$

وبنابراین:

$$\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}=\lambda$$

که اگر دررابطهٔ (۱) قراردهیم $\lambda=\frac{1}{a+b}$ میشود وبنابراین:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\sin^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^3+\cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^3=\lambda^3=\frac{1}{(a+b)^3}$$

۱۳. ثابت کنید:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c} \qquad (1)$$

که درآن A ، B ، C و a ، b ، c بین صفرو π واقع بوده ودرروابط زیرصدق میکنند :

$$\left.\begin{array}{l}\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

اثبات: درمعادلات (۲) هریك ازروابط با تبدیل‌دوری‌رابطهٔ قبل نسبت به a، b، c و A، B، C بدست میآید. اولین معادله رادرنظرمی گیریم، داریم:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}}$$

$$=\sin a\times\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c}=k\sin a$$

k یعنی ضریب $\sin a$ عبارتی متقارن‌نسبت‌به‌آوندهای a، b، c میباشد که باتبدیل دوری نسبت بآنها تغییر نمی‌کند، بنابراین همهٔ روابط (۱) برابر همین‌مقدار k خواهدشد.

تبصره: علامت جلورادیکال را مثبت اختیار کردیم، چون درفاصلهٔصفر و π آوندهای a، b، c دارای سینوسهای مثبت هستند.

۱۴۰ روابط زیرداده شد:

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c \qquad (1)$$

$$a\cos\beta+b\sin\beta=c, \qquad (2)$$

که‌درآنها $\alpha\neq\beta+2k\pi$ ویکی ازاعداد a یا b هم‌مخالف صفراست. ثابت کنید:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

حل: ازجمع‌وتفریق‌روابط (۱) و(۲) بدست می‌آید:

$$a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=c; \qquad (3)$$

$$-a\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}+b\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}=۰; \qquad (۴)$$

ازشرط $\alpha-\beta\neq ۲k\pi$ نتیجه‌می‌شود که $\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\neq ۰$ استوازرابطهٔ (۴) بدست می‌آید:

$$a\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۵)$$

واگر $a\neq ۰$ فرض کنیم، ازرابطهٔ اخیرخواهیم داشت:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{b}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

ثابت می‌کنیم‌که با شرایط فرض $\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\neq ۰$ است، در حقیقت در صورت عکس خواهیم داشت: $\alpha+\beta=(۲k+۱)\pi$ ودراینصورت‌رابطه(۲) باینصورت درمی‌آید:

$$-a\cos\alpha+b\sin\alpha=c; \qquad (۲)'$$

از(۱) ،(۲)' نتیجه میشود $۲a\cos\alpha=۰$ و چون $a\neq ۰$ است پس $\cos\alpha=۰$ وازآنجا: $\alpha=k_۱\pi+\frac{\pi}{۲}$ ودرنتیجه:

$$\alpha-\beta=۲\alpha-(\alpha+\beta)=۲(k_۱-k)\pi$$

که متناقض‌بافرض‌است. از رابطهٔ (۵) نتیجه میشود:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{b}{a}.$$

وازرابطهٔ (۳) بدست می‌آید:

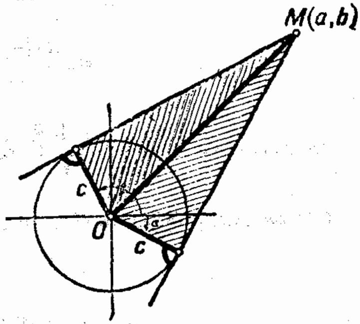
$$\cos^۲\frac{\alpha-\beta}{۲}=\frac{c^۲}{\left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}+b\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)^۲}=\frac{c^۲\sec^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}}{\left(a+b\,tg\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)^۲}=$$

$$=\frac{c^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{\left(a+b\cdot\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

تعبیر هندسی: معادلات

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=c \quad , \quad x\cos\beta+y\sin\beta=c$$

معادلات نرمال خطوط راستی هستند که بردایرهٔ بشعاع c بمرکزمبداء مختصات مماس است. عمودهائی که ازمبداء مختصات برخطوط فرود آیدازلحاظ طول باهم برابرند و با محور طول زوایای α و β میسازند. شرایط(۱) و (۲) نشان می‌دهند که این دوخط در نقطهٔ $M(a,b)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. دو عمودی که از مبداء مختصات براین خطوط رسم شده است، باهم زاویهٔ $\alpha-\beta$ می‌سازند. باتوجه به شکل ۱۱۰ داریم:



ش ۱۱۰

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c}{OM}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

۱۵۰ ثابت کنید که باشرط $A+B+C=\pi$ اتحادهای زیر صحیح است:

$$\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A=\sin^2A;$$

$$\cos^2B+\cos^2C+2\cos B\cos C\cos A=\sin^2A.$$

حل: فرض می کنیم:

$$X=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A-\sin^2A;$$

$$Y=\cos^2B+\cos^2C+2\cos B\cos C\cos A-\sin^2A.$$

این دو رابطه را باهم جمع و تفریق می کنیم:

$$X+Y=2+2\cos A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)-2\sin^2A=$$

$$=2[\cos^2A+\cos A\cos(B+C)]$$

وچون داریم:

$$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$$

دراینصورت: $X+Y=0$

$$Y-X=(\cos^2 B-\sin^2 B)+(\cos^2 C-\sin^2 C)+$$
$$+2\cos(B-C)\cos A=\cos 2B+\cos 2C+2\cos(B-C)\cos A=$$
$$=2\cos(B+C)\cos(B-C)+2\cos(B-C)\cos A=$$
$$=2\cos(B-C)[\cos(B+C)+\cos A]=0$$

و وقتی که $X+Y=0$ و $X-Y=0$ باشد، $X=Y=0$ میشود.

۱۶. ثابت کنیدباشرط:

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}\qquad(e>1)$$

داریم: $$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}=\pm\frac{1+e}{1-e}$$

حل: توجه می‌کنیم که:

$$1+2e\cos\alpha+e^2=(e+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$$

همیشه مثبت است، زیراهرگز تساوی:

$$\sin\alpha=e+\cos\alpha=0$$

برقرارنخواهدبود، ازخاصیت تناسب استفاده میکنیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

که‌دراینصورت پس ازساده‌کردن، خواهیم داشت:

$$\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=\frac{-1-e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}$$

اگردوباره ازهمان خاصیت تناسب استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{(1-e)(1-\cos\beta)}{(1+e)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+e)(1+\cos\beta)}{(1-e)(1-\cos\alpha)}$$

وبنا براین:

$$\frac{۱-\cos\beta}{۱+\cos\beta}\,\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}=\left(\frac{۱+e}{۱-e}\right)^{۲}\Longrightarrow tg^{۲}\frac{\beta}{۲}tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\left(\frac{۱+e}{۱-e}\right)^{۲}$$

وازآنجا رابطهٔ حکم بدست میآید.

۲۸. محاسبهٔ بعضی مجموعها و یا ضربهای مثلثاتی

دراین بند بعنوان‌نمونه، روش‌محاسبهٔ‌حاصل‌جمع‌بعضی رشته‌های محدود وهمچنین محاسبهٔ حاصلضرب عوامل محدودی که بصورت توابع مثلثاتی‌هستند داده شده است.

۱. محاسبه مجموع سینوسها و کسینوسهائی‌که قوسهای‌آنها به تصاعد حسابی باشند.

روش‌اول: مجموع زیررادرنظرمیگیریم:

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+۲h)+\cdots+\cos(a+nh)=$$

$$=\sum_{k=۰}^{n}\cos(a+kh);$$

داریم:

$$\sin\frac{h}{۲}\cos a=\frac{۱}{۲}\left[\sin\left(a+\frac{h}{۲}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{۲}\right)\right];$$

$$\sin\frac{h}{۲}\cos(a+h)=\frac{۱}{۲}\left[\sin\left(a+\frac{۳h}{۲}\right)-\sin\left(a+\frac{h}{۲}\right)\right];$$

. . . .

$$\sin\frac{h}{۲}\cos(a+nh)=\frac{۱}{۲}\left[\sin\left(a+\frac{۲n+۱}{۲}h\right)-\sin\left(a+\frac{۲n-۱}{۲}h\right)\right];$$

اگراین روابط را باهم جمع وسپس طرفین تساوی حاصل‌رابر $\sin\frac{h}{۲}$

تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kh)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)\right].$$

وازآنجا:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kh)=\frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}} \qquad (\Sigma_1)$$

واگر دراین‌رابطه a را به $\frac{\pi}{2}-a$ و h را به $-h$ تبدیل کنیم، بدست میآید:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kh)=\frac{\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}} \qquad (\Sigma_1')$$

روش‌دوم: طبق‌رابطهٔ‌مواور توان kام عددمختلط $z=\cos h+i\sin h$ رامحاسبه ودر عدد $\cos a+i\sin a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\cos a+i\sin a)z^k=(\cos a+i\sin a)(\cos kh+i\sin kh)=$$
$$=\cos(a+kh)+i\sin(a+kh).$$

روابط‌مجهول (Σ_1)،(Σ_1') بترتیب عبارتندازقسمتهای حقیقی‌وموهومی مجموع $n+1$ جملهٔ تصاعد هندسی زیر:

$$(\cos a+i\sin a)(1+z+z^2+\cdots+z^n)=$$
$$=(\cos a+i\sin a)\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

داریم:

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\frac{\cos(n+1)h-1+i\sin(n+1)h}{\sin h-1+i\sin h}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{n+1}{2}h+i\cos\frac{n+1}{2}h}{-\sin\frac{h}{2}+i\cos\frac{h}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}h-i\cos\frac{n+1}{2}h\right)\left(\sin\frac{h}{2}+i\cos\frac{h}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}h+i\sin\frac{n}{2}h\right).$$

که اگر آنرا در $\cos a+i\sin a$ ضرب کنیم، بدست میآید:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)+i\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right).$$

که قسمت حقیقی، مجموع (Σ_1) وضریب i، مجموع (Σ_1') است.

نتیجه: اگر درحالت خاص $a=0$ فرض کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$1+\cos h+\cos 2h+\dots+\cos nh=\frac{\cos\frac{n}{2}h\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}},\quad(\Sigma_1^{\circ})$$

$$\sin h+\sin 2h+\dots+\sin nh=\frac{\sin\frac{n}{2}h\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}},\quad(\Sigma_1^{\circ\circ})$$

تبصره: درنقاط $h=2k\pi$ که در آنجا $\sin\frac{h}{2}$ مفهوم خودرا ازدست میدهد،

تساویهای (Σ_1) و (Σ_1') بنابر اصل ادامهٔ اتصال باز هم صحیح خواهند بود.

مستقیماً هم میتوان ثابت کرد که کسر $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}$ در این نقاط دارای حدی است.

مثلا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}=n+1$$

وبنابراین بازاء $h=0$ هردوطرف (Σ_1) برابر $(n+1)\cos a$ میشود.

۲. ازتقسیم (Σ_1^{**}) بر (Σ_1^{*}) بدست میآید:

$$\frac{\sin h+\sin 2h+\cdots+\sin nh}{1+\cos h+\cos 2h+\cdots+\cos nh}=tg\frac{n}{2}h \qquad (\Sigma_2)$$

۳. مجموع زیررا محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx \qquad (\Sigma_3)$$

داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=0}^{n}\cos kx-1$$

که بااستفاده ازرابطهٔ (Σ_1^{*}) خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\cos\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}-1=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

مثلادرحالتهای خاص داریم:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$= -\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\dots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{m}\sin\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 0$$

۴. مجموعهای زیررا محاسبه کنید:

$$\sin x+\sin 3x+\dots+\sin(2n-1)x=\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x, \quad (\Sigma_4)$$

$$\cos x+\cos 3x+\dots+\cos(2n-1)x=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x. \quad (\Sigma_4')$$

حل: اگر درروابط (Σ_1) و (Σ_1')، $a=x$ و $h=2x$ قرار دهیم و n را به $n-1$ تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\frac{\sin[x+(n-1)x]\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\cos nx\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

۵. مجموع زیررا محاسبه کنید:

$$1-\cos x+\cos 2x-\cos 3x+\dots+(-1)^n\cos nx$$

حل: کافی‌است دررابطهٔ (Σ_1^{*}) قرار دهیم $h=x+\pi$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos kx=\frac{\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

صورت کسر را به‌مجموع تبدیل می کنیم:

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{n+1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{2}+\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right]$$

واز آنجا:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos kx=\frac{(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}x+\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\qquad(\Sigma_5)$$

تبصره. باهمین‌روش میتوان‌مجموع $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin kh$ را نیز محاسبه کرد.

۶. مجموعهای زیررا محاسبه کنید:

$$\sin^2 a+\sin^2(a+h)+\sin^2(a+2h)+\dots+\sin^2(a+nh)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sin^2(a+kh)$$

$$\cos^2 a+\cos^2(a+h)+\dots+\cos^2(a+nh)=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(a+kh).$$

حل: هریك ازجملات را به‌کسینوس قوس‌دوبرابر تبدیل‌می‌کنیم، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin^2(a+kh)=\sum\frac{1-\cos(2a+2kh)}{2}=$$

$$=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum\cos(2a+2kh)$$

وبرای محاسبهٔ مجموع اخیر، کافی‌است دررابطهٔ (Σ_1)، a را به $2a$ و h را به $2h$ تبدیل کنیم، دراینصورت خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(2a+2kh)=\frac{\cos(2a+nh)\sin(n+1)h}{\sin h}$$

و بنابراین:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(a+kh) = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos(2a+nh)\sin(n+1)h}{2\sin h} \quad (\Sigma_6)$$

و درحالت خاص:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos nx \sin(n+1)x}{2\sin x}.$$

با بعضی تبدیلات سادهٔ مثلثاتی می‌توان سمت راست تساوی را دررابطهٔ بالابصورت دیگرهم نوشت:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x} \quad (\Sigma_6^{\circ})$$

مجموع دوم راهم بهمین روش میتوان بدست آورد:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(a+kh) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(2a+nh)\sin(n+1)h}{2\sin h} \quad (\Sigma_6')$$

تبصره: با داشتن یکی از دومجموع بالا میتوان بسادگی دیگری را پیداکرد، زیرا:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(a+kh) + \sum_{k=0}^{n} \cos^2(a+kh) = n+1$$

مثال: دستگاه خطی زیررا حل کنید:

$$x_1 \sin\frac{\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{n} = a_1;$$

$$x_1 \sin\frac{2\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{2\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin(n-1)\frac{2\pi}{n} = a_2;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$x_1 \sin\frac{n-1}{n}\pi + x_2 \sin 2\frac{n-1}{n}\pi + \dots +$$

$$+ x_{n-1} \sin(n-1)\frac{n-1}{n}\pi = a_{n-1}.$$

حل: معادلات مفروض را بترتیب درمضارب زیر ضرب می‌کنیم:

$$\sin k\frac{\pi}{n} \quad , \quad \sin k\frac{۲\pi}{n}, \dots, \sin k\frac{n-۱}{n}\pi$$

وبعدباهم‌جمع می‌کنیم.ضریب x_m درمعادلهٔ اخیر چنین خواهدبود:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \sin k\frac{i\pi}{n} \sin m\frac{i\pi}{n}.$$

اگر $k=m$ باشد، طبق رابطهٔ $(\Sigma_۶^{*})$ بدست میآید:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \sin^۲ i\frac{k\pi}{n} = \frac{n-۱}{۲} - \frac{\cos n\frac{k\pi}{n} \sin\frac{(n-۱)k\pi}{n}}{۲\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{۲}$$

واگر $k \neq m$ باشد، طبق رابطهٔ $(\Sigma_۳)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \sin i\frac{k\pi}{n} \sin i\frac{m\pi}{n} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n-۱} \cos i\frac{k-m}{n}\pi - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n-۱} \cos i\frac{k+m}{n}\pi = ۰$$

بنابراین معادلهٔ نتیجه بصورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{n}{۲}x_k = \sum_{i=۱}^{n-۱} a_i \sin i\frac{k\pi}{n} \Longrightarrow x_k = \frac{۲}{n}\sum_{i=۱}^{n-۱} a_i \sin\frac{ik\pi}{n}.$$

۰۷ مطلوبست محاسبهٔ مجموعهای‌بصورت زیر:

$$\sum_{k=۰}^{n} \cos^p kh \quad , \quad \sum_{k=۰}^{n} \sin^p kh$$ (p عددی است صحیح)

فرض می‌کنیم:

$$S_p' = ۱ + \cos ph + \cos ۲ph + \dots + \cos nph;$$

$$S_p'' = \sin ph + \sin ۲ph + \dots + \sin nph$$

این دو مجموع باکمك روابط $(\Sigma_۱^{*})$ و $(\Sigma_۱^{**})$ بدست میآیند (k را به ph تبدیل کنید):

$$S'_p = \frac{\cos\frac{nph}{2}\sin\frac{(n+1)ph}{2}}{\sin\frac{ph}{2}} \quad ; \quad S''_p = \frac{\sin\frac{nph}{2}\sin\frac{(n+1)ph}{2}}{\sin\frac{ph}{2}}$$

برای محاسبهٔ محاسبهٔ مجموع :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^p kh = 1 + \cos^p h + \cos^p 2h + \cdots + \cos^p kh + \cdots + $$
$$+ \cos^p nh .$$

توانهای p ام کسینوسها را برحسب توابع مثلثاتـی مضارب مینویسیم (به بند ۲۵ مراجعه کنید) :

$$\cos^p kh = \frac{1}{2^{p-1}}[\cos pkh + C_p^1 \cos(p-2)kh +$$
$$+ C_p^2 \cos(p-4)kh + \cdots] ;$$

اگر $k=0$ و ۱ و ۲ و ... و n فرض کنیم و سپس روابط بدست آمده راجمع کنیم ، بدست میآید :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^p kh = \frac{1}{2^{p-1}}[S'_p + C_p^1 S'_{p-2} + C_p^2 S'_{p-4} + \cdots] \quad (\Sigma_7)$$

با همین روش میتوان $\sum_{k=0}^{n} \sin^p kh$ را نیز محاسبه کرد .

اگر در حالت خاص $p=3$ فـرض کنیم ، بایستی مجموع زیـر را محاسبه کنیم :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^3 kh = \sin^3 h + \sin^3 2h + \cdots \sin^3 nh.$$

داریم : $\sin^3 kh = \frac{3}{4}\sin kh - \frac{1}{4}\sin 3kh$

بجای k اعداد ۱ تا n را قرار داده و جمع می کنیم :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2 kh = \frac{3}{4}\sum \sin kh - \frac{1}{4}\sum \sin 3kh =$$

$$= \frac{3\sin\frac{n}{2}h\sin\frac{n+1}{2}h}{4\sin\frac{h}{2}} - \frac{\sin\frac{3n}{2}h\sin\frac{3(n+1)}{2}h}{4\sin\frac{3h}{2}}$$

۸. مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

$$S' = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx \cdot$$

$$S'' = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + n\sin nx \cdot$$

حل: روش اول . مجموع را بصورت زیر مینویسیم:

$$\begin{aligned} S' = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx + \\ + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \cos nx \cdot \end{aligned}$$

k امین سطر عبارتست از مجموع $n-k+1$ کسینوس، که قوسهائی به تصاعد حسابی دارند، این مجموع را طبق رابطهٔ (Σ_1) محاسبه می‌کنیم (a را به kx، h را به x و n را به $n-k$ تبدیل می‌کنیم):

$$\cos kx + \cos(k+1) + \cdots + \cos nx =$$

$$= \frac{\cos\left(kx + \frac{n-k}{2}x\right)\sin\frac{n-k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{n+k}{2}x\sin\frac{n-k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right] \cdot$$

اگر $k=1, 2, \ldots, n$ بگیریم و روابط بدست‌آمده را جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$S' = \frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}x - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(-\frac{1}{2}x+kx\right).$$

حالا مجموع زیر را محاسبه می‌کنیم [با استفاده از رابطهٔ (Σ_4)] :

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(kx-\frac{1}{2}x\right) = \sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}+\cdots+$$

$$+\sin\frac{(2n-1)x}{2} = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

بنابراین :

$$S' = \frac{n\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \qquad (\Sigma_8)$$

با همین روش میتوان مجموع دوم را نیز محاسبه نمود :

$$S'' = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} \qquad (\Sigma'_8)$$

روش دوم . مجموع زیر را در نظر میگیریم :

$$z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}$$

(این‌رابطه درجبر ثابت‌شده‌است). فرض می کنیم: $z=\cos x+i\sin x$،

در اینصورت داریم : $z^k=\cos kx+i\sin kx$

و بنابراین :

$$S'+iS''=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}$$

عبارت سمت راست تساوی را محاسبه می‌کنیم :

a) $z-1=\cos x-1+i\sin x=-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)$;

b) $$\frac{nz^{n+1}}{z-1}=\frac{n[\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x]}{-2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right]}=$$

$$=\frac{n[\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x]\left[\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right]}{-2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-i\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right];$$

c) $z(z^n-1)=-2\sin\frac{nx}{2}(\cos x+i\sin x)\left(\sin\frac{nx}{2}-i\cos\frac{nx}{2}\right)$;

d) $$(z-1)^2=\left[-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\right]^2=$$

$$=-4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+i\sin x);$$

e) $$\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}=\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}-i\cos\frac{nx}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-i\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

و بنابراین :

$$S'+iS''=\frac{n\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$+i\left(\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right).$$

و از آنجا عبارتهای مربوط به S' و S'' بدست میآید .

۹. مجموعهای زیر را محاسبه کنید :

$$S_1=1+a\cos x+a^2\cos 2x+\cdots+a^n\cos nx\ ;$$
$$S_2=\qquad a\sin x+a^2\sin 2x+\cdots+a^n\sin nx\ .$$

حل : مجموع $n+1$ تصاعد هندسی زیر را در نظر میگیریم :

$$1+az+a^2z^2+\cdots+a^nz^n=\frac{a^{n+1}z^{n+1}-1}{az-1}$$

اگر فرض کنیم : $z=\cos x+i\sin x$، در اینصورت خواهیم داشت :

$$S_1+iS_2=\frac{a^{n+1}z^{n+1}-1}{az-1}$$

سمت راست تساوی بالا را محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{a^{n+1}z^{n+1}-1}{az-1}=\frac{a^{n+1}\cos(n+1)x-1+ia^{n+1}\sin(n+1)x}{a\cos x-1+ia\sin x}=$$

$$=\frac{[a^{n+1}\cos(n+1)x-1+ia^{n+1}\sin(n+1)x](a\cos x-1-ia\sin x)}{a^2-2a\cos x+1}.$$

قسمت حقیقی عبارت بدست آمده ، برابر S_1 و ضریب i برابـر S_2 میباشد :

$$S_1=\frac{a^{n+2}\cos nx-a^{n+1}\cos(n+1)x-a\cos x+1}{a^2-2a\cos x+1}\qquad(\Sigma_9)$$

$$S_2=\frac{a^{n+2}\sin nx-a^{n+1}\sin(n+1)x+a\sin x}{a^2-2a\cos x+1}\qquad(\Sigma'_9)$$

در تمرینات از ۱۰ تا ۱۳ نمونه‌های خاصی از محاسبهٔ مجموعها داده شده است :

۱۰. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$\sin^3\frac{h}{3}+3\sin^3\frac{h}{9}+\dots+3^{n-1}\sin^3\frac{h}{3^n}=\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\sin^3\frac{h}{3^k}$$

حل : اتحاد زیر را در نظر میگیریم :

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

و در آن بترتیب $\frac{h}{3^{n-1}}$ ، ... ، $\frac{h}{9}$ و $\frac{h}{3}$ = x میگیریم، خواهیم‌داشت:

$$\sin h=3\sin\frac{h}{3}-4\sin^3\frac{h}{3}$$

$$\sin\frac{h}{3}=3\sin\frac{h}{3^2}-4\sin^3\frac{h}{3^2}$$

$$\sin\frac{h}{3^2}=3\sin\frac{h}{3^3}-4\sin^3\frac{h}{3^3}$$

. . . .

$$\sin\frac{h}{3^{n-1}}=3\sin\frac{h}{3^n}-4\sin^3\frac{h}{3^n}$$

طرفین روابط فوق را بترتیب در ۱ ، ۳ ، 3^2 ، ... ، 3^{n-1} ضرب و سپس با هم جمع می‌کنیم ، پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$\sin h=3^n\sin\frac{h}{3^n}-4\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\sin^3\frac{h}{3^k},$$

و از آنجا :

$$\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\sin^3\frac{h}{3^k}=\frac{1}{4}3^n\sin\frac{h}{3^n}-\frac{1}{4}\sin h\qquad(\Sigma_{10})$$

۱۱. مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

$$S_1=\cos x+C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x+\dots+C_n^n\cos(n+1)x\ ;$$

$$S_2=\sin x+C_n^1\sin 2x+C_n^2\sin 3x+\dots+C_n^n\sin(n+1)x\ .$$

حل: تساوی زیر را درنظر میگیریم:

$$z+C_n^1z^2+C_n^2z^3+\dots+C_n^nz^{n+1}=z(1+z)^n.$$

بازاء $z=\cos x+i\sin x$ این تساوی بصورت زیر در میآید:

$$S_1+iS_2=(\cos x+i\sin x)(\cos x+1+i\sin x)^n\ ;$$

ولی:

$$[(\cos x+1)+i\sin x]^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right].$$

بنابراین:

$$S_1+iS_2=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n+2}{2}x+i\sin\frac{n+2}{2}x\right],$$

و از آنجا:

$$S_1=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x\ ;\quad S_2=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x\ .$$

۱۲. مطلوبست محاسبه مجموع زیر:

$$S=\frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}+\dots+$$

$$+\frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}.$$

حل: داریم:

$$tg(\alpha+\beta)-tg\,\alpha=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\ \cos(\alpha+\beta)}\ ;$$

$$tg(\alpha+2\beta)-tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}\ ;$$

. . . .

$$tg(\alpha+n\beta)-tg[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\sin\beta}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}$$

از جمع این روابط خواهیم داشت :

$$tg(\alpha+n\beta)-tg\,\alpha=S\cdot\sin\beta\ ،$$

و از آنجا :
$$S=\frac{\sin n\beta}{\sin\beta\cos\alpha\cos(\alpha+n\beta)}$$

۱۳. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$S=\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\dots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}$$

حل : مخرجها را بصورت ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}\right).$$

که اگر در مسئلهٔ ۱۲ فرض کنیم $\alpha=\beta=x$ خواهیم داشت:

$$S=\frac{\sin nx}{\sin 2x\cos(n+1)x}$$

۱۴. ثابت کنید :

$$tg\,x+\frac{1}{2}\,tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\,tg\frac{x}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^n}cotg\frac{x}{2^n}-2\,cotg\,2x$$

حل : داریم :

$$2\,cotg\,2\alpha-cotg\,\alpha=-tg\,\alpha$$

اگر در این رابطه α را بترتیب به x ، $\frac{x}{2}$ ، $\frac{x}{4}$ ، . . . تبدیل

کنیم ، تساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$۲cotg۲x - cotgx = -tgx$$

$$۲cotgx - cotg\frac{x}{۲} = -tg\frac{x}{۲}$$

$$۲cotg\frac{x}{۲} - cotg\frac{x}{٤} = -tg\frac{x}{٤}$$

. . . .

$$۲cotg\frac{x}{۲^{n-۱}} - cotg\frac{x}{۲^n} = -tg\frac{x}{۲^n}$$

این تساویها را بترتیب در ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، ... ، $\frac{۱}{۲^n}$ ضرب و سپس جمع می‌کنیم ، بدست میآید :

$$۲cotg\,۲x - \frac{۱}{۲^n}cotg\frac{x}{۲^n} = -\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{۲^k}tg\frac{x}{۲^k} ,$$

و ازآنجا اتحاد مورد نظر بدست میآید .

در مثالهای زیر محاسبهٔ حاصلضربهای توابع مثلثاتی مختلفی داده شده است . ابتدا دو نمونه مثال ساده ذکر شده است وسپس در تمرینات بعدی محاسبهٔ حاصلضربهائی‌که برپایه قضایای اساسی تبدیل عبارتها بصورت ضرب قرار دارند ، آورده شده است .

۱۵. حاصلضرب زیر را محاسبه‌کنید :

$$P = (۲cosx - ۱)(۲cos۲x - ۱)\dots(۲cos۲^{n-۱}x - ۱) =$$

$$= \prod_{k=۰}^{n-۱}(۲cos۲^kx - ۱) .$$

حل : فرض می‌کنیم که $cosx \neq -\frac{۱}{۲}$ باشد ، طرفین تساوی‌بالا را در $(۲cosx+۱)$ ضرب می‌کنیم :

$$(۲cosx+۱)P =$$

$$= (۲cosx+۱)(۲cosx-۱)(۲cos۲x-۱)\dots(۲cos۲^{n-۱}x-۱) . \quad (۱)$$

اتحاد زیر را در نظر میگیریم :

$$(2\cos 2^k x+1)(2\cos 2^k x-1)=4\cos^2 2^k x-1=$$
$$=2(\cos 2^{k+1}x+1)-1=2\cos 2^{k+1}x+1$$

اگراین اتحاد را در موردسمت راست تساوی (۱) بکار ببریم ، بدست میآید :

$$(2\cos x+1)P=2\cos 2^n x+1$$

و باین ترتیب خواهیم داشت :

$$P=\frac{2\cos 2^n x+1}{2\cos x+1}$$

تبصره : اگراصل ادامهٔ اتصال را در نظر بگیریم ، برای نتیجهٔ اخیر شرط $2\cos x\neq -1$ لزومی نخواهد داشت .

۱۶. جاصلضرب زیر را محاسبه‌کنید :

$$P=\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{a}{2^k}+\cos\frac{b}{2^k}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{4}+\cos\frac{b}{4}\right)\cdots\left(\cos\frac{a}{2^n}+\cos\frac{b}{2^n}\right).$$

حل : طرفین رابطه را در $\cos\frac{a}{2^n}-\cos\frac{b}{2^n}$ ضرب می‌کنیم، میشود :

$$\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)\cdots\left(\cos\frac{a}{2^n}+\cos\frac{b}{2^n}\right)\left(\cos\frac{a}{2^n}-\cos\frac{b}{2^n}\right)=$$
$$=\left(\cos\frac{a}{2^n}-\cos\frac{b}{2^n}\right)P$$

اتحاد زیر را در نظر میگیریم :

$$\left(\cos\frac{a}{2^k}+\cos\frac{b}{2^k}\right)\left(\cos\frac{a}{2^k}-\cos\frac{b}{2^k}\right)=\cos^2\frac{a}{2^k}-\cos^2\frac{b}{2^k}=$$
$$=\left(\cos\frac{a}{2^{k-1}}-\cos\frac{b}{2^{k-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

که در اینصورت خواهیم داشت :

$$\left(\cos\frac{a}{2^n}-\cos\frac{b}{2^n}\right)P=(\cos a-\cos b)\frac{1}{2^n}$$

واز آنجا :

$$P=\frac{\cos a-\cos b}{2^n\left(\cos\frac{a}{2^n}-\cos\frac{b}{2^n}\right)}$$

۱۷. حاصلضرب زیرا را محاسبه‌کنید :

$$[1-\cos\varphi][1-\cos(\varphi+\frac{2\pi}{n})]\cdots[1-\cos(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n})]=$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\cos(\varphi+\frac{2k\pi}{n})\right]$$

حل :میدانیم که معادلهٔ :

$$x^n-C_n^2(1-x^2)x^{n-2}+C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4}-\ldots=\cos\alpha$$

برای تعیین‌همهٔ‌مقادیر ممکنهٔ $x=\cos u$ را(که درآن قوس u ازشرط $\cos nu=\cos\alpha$ معین‌میشود) بدست میدهد . فرض می‌کنیم $\alpha=\varphi n$ ،معادله بدست میآید :

$$x^n-C_n^2(1-x^2)x^{n-2}+C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4}-\ldots-\cos n\varphi=0$$

که ریشه‌های آن مقادیر $x=\cos u$ خواهد بود، u ازشرط زیـر معین میشود : $\cos nu=\cos n\varphi;$

این شرط را میتوان باینصورت نوشت (بند ۴۱ را به بینید) :

$$nu=2k\pi\pm n\varphi$$

وازآنجا : $u=\frac{2k\pi}{n}\pm\varphi$

برای $x=\cos u$ ، n میتواند مقادیرمختلف زیر را (درحالت کلی) اختیار کند :

$$x_0 = \cos\varphi\ ;\ x_1 = \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right)\ ;\ x_2 = \cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{n}\right)\ ;\ \ldots\ ;$$

$$x_{n-1} = \cos\left[\varphi + 2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \ldots - \cos n\varphi =$$

$$= 2^{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) =$$

$$= 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[x - \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

اگردراین‌اتحاد $x = 1$ فرض کنیم، حاصلضرب موردنظر بدست میآید:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left[1 - \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \frac{1-\cos n\varphi}{2^{n-1}} \qquad (\pi_{17})$$

۱۸. حاصلضرب زیر را محاسبه کنید :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left[x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right).$$

حل : اگر در رابطهٔ (π_{17}) مسئلهٔ قبل $\varphi = 2x$ فرض کنیم و سمت راست وهمچنین‌هریك از دوجمله‌ایهای عوامل‌ضرب‌سمت چپ را بصورت‌ضرب تبدیل کنیم ، بدست میآید :

$$2^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\sin^2 nx}{2^{n-1}\sin x},$$

و ازآنجا (پس از جذر گرفتن) داریم :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}} \qquad (\pi_{18})$$

۱۹. حاصلضربهای زیر را محاسبه کنید :

$$a)\ \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(x+\frac{k\pi}{n}\right);$$

$$b)\ \prod_{k=1}^{n} \sin\left(x+\frac{2k-1}{2n}\pi\right);$$

$$c)\ \prod_{k=0}^{2n-1} \sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right).$$

حل : a) اگر در رابطهٔ مسئلهٔ قبل x را به $x+\frac{\pi}{2}$ تبدیل کنیم، جملهٔ عمومی ضرب بصورت زیر درمیآید :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$$

وبنابراین :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(n\pi+\frac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m\sin 2mx}{2^{2m-1}} & (n=2m)\\[2ex] \dfrac{(-1)^m\cos(2m+1)x}{2^{2m}} & (n=2m+1)\end{cases}$$

b) اگردر مسئلهٔ قبل x را به $x+\frac{\pi}{2n}$ تبدیل کنیم ، جملهٔ عمومی ضرب باین صورت در میآید :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\sin\left(x+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

و بنابراین :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(x+\frac{2k-1}{2n}\pi\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(x+\frac{3\pi}{2n}\right)\sin\left(x+\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots$$

$$\cdots \sin\left(x+\frac{2n-1}{n}\pi\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}+\frac{n-1}{n}\pi\right)=$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(nx+\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}=\frac{\cos nx}{2^{n-1}}$$

c) عوامل ضرب $\prod_{k=0}^{2n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$ را به‌دو دسته تقسیم می کنیم،

یکی از دسته‌ها را درسطر بالا و دستهٔ دیگر را در سطر پائین مینویسیم :

$$\begin{array}{lllll} \sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right) & \sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) & \cdots & \sin\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right) \\ \sin\left(x+\frac{n\pi}{n}\right) & \sin\left(x+\frac{n+1}{n}\pi\right) & \sin\left(x+\frac{n+2}{n}\pi\right) & \cdots & \sin\left(x+\frac{2n-1}{n}\pi\right). \end{array}$$

عواملی که زیرهم نوشته شده‌اند،قرینهٔ یکدیگرند :

$$\sin\left(x+\frac{n+k}{n}\pi\right)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}+\pi\right)=-\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\ ;$$

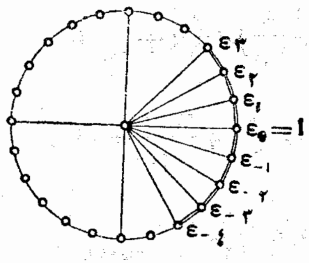
و بنابراین :

$$\prod_{k=0}^{2n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=(-1)^n\left[\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{(-1)^n\sin^2 nx}{2^{2n-1}}$$

۴۰. حاصلضرب زیر را محاسبه کنید :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$



ش ۱۱۱

حل : ریشه‌های معادلهٔ $x^{2n}=1$ را پیدا می‌کنیم . این ریشه‌ها عبارتند از ریشه‌های مختلط واحد ازمرتبهٔ $2n$ که‌ما آنها را باین ترتیب نامگذاری می‌کنیم (شکل ۱۱۱) :

$$\varepsilon_0=1\ ;\ \varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\ ;$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \varepsilon_n=-1\ ;\ \varepsilon_{-1}=\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}\ ;$$

$$\varepsilon_{-2}=\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\ ;\ \ldots$$

دو جمله‌ای $x^{2n}-1$ را به عوامل حقیقی تجزیه می‌کنیم ، برای این منظور عوامل خطی که از تجزیهٔ این دو جمله‌ای بدست میآید دو بدو با هم می‌گیریم :

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{-1})(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_{-2})\ldots$$
$$\ldots(x-\varepsilon_{n-1})(x-\varepsilon_{-n+1})$$

و چون داریم :

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k})=(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n})(x-\cos\frac{k\pi}{n}+$$
$$+i\sin\frac{k\pi}{n})=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\ ;$$

خواهیم داشت :

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)\ \ldots$$

$$\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\sin\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

و از آنجا حاصلضرب مورد نظر بدست میآید :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+$$
$$+x^{2n-4}+\dots+1 \qquad (\pi_{20})$$

۲۱. حاصلضرب زیر را محاسبه کنید :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right).$$

حل: شبیه مسئلهٔ قبل دو جمله‌ای $x^{2n}+1$ را بصورت ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم :

$$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left[x-\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right]\left[x-\right.$$
$$\left.-\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right].$$

و از آنجا :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right)=x^{2n}+1 \qquad (\pi_{21})$$

بهمین ترتیب میتوان روابط زیر را بدست‌آورد :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)=\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}=$$
$$=x^{2n}+x^{2n-1}+\dots+1\ ; \qquad (\pi'_{21})$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)=\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=$$
$$=x^{2n}-x^{2n-1}+\dots+1 \qquad (\pi''_{21})$$

برای بدست‌آوردن‌رابطهٔ (π'_{21}) از تجزیهٔ $x^{2n+1}-1$ و برای (π''_{21}) از تجزیهٔ دوجمله‌ای $x^{2n+1}+1$ استفاده می‌کنیم :

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi+1\right)\ ; \qquad (\pi'''_{21})$$

و بالاخره متذکر میشویم که :

$$\cos\frac{۲k+۱}{۲n+۱}\pi=-\cos\left(\pi-\frac{۲k+۱}{۲n+۱}\pi\right)=-\cos\frac{۲(n-k)}{۲n+۱}\pi\ ;$$

اگر به k مقادیر صفر ، ۱، ۲ ، ... ، $n-۱$ نسبت دهیم، برای ضریب $n-k$ مقادیر n، $n-۱$ ، ... ، ۱ وصفر بدست‌میآیدوبنابراین حاصلضربهای $(\pi'''_{۲۱})$ و $(\pi''_{۲۱})$ با هم برابرند .

۲۲ . صحت تساویهای زیررا تحقیق کنید :

$$\prod_{k=۱}^{n-۱}\sin\frac{k\pi}{۲n}=\sin\frac{\pi}{۲n}\cdot\sin\frac{۲\pi}{۲n}\cdots\sin\frac{(n-۱)\pi}{۲n}=\frac{\sqrt{n}}{۲^{n-۱}}\qquad(\pi_{۲۲})$$

$$\prod_{k=۱}^{n}\sin\frac{k\pi}{۲n+۱}=\sin\frac{\pi}{۲n+۱}\sin\frac{۲\pi}{۲n+۱}\cdots\sin\frac{n\pi}{۲n+۱}=$$

$$=\frac{\sqrt{۲n+۱}}{۲^{n}}\qquad(\pi'_{۲۲})$$

$$\prod_{k=۱}^{n}\sin\frac{(۲k-۱)\pi}{۴n}=\sin\frac{\pi}{۴n}\sin\frac{۳\pi}{۴n}\cdots\sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۴n}=\frac{\sqrt{۲}}{۲^{n}}\ (\pi''_{۲۲})$$

$$\prod_{k=۱}^{n}\cos\frac{(۲k-۱)\pi}{۴n}=\cos\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{۳\pi}{۴n}\cdots\cos\frac{(۲n-۱)\pi}{۴n}=\frac{\sqrt{۲}}{۲^{n}}\ (\pi'''_{۲۲})$$

$$\prod_{k=۱}^{n}\sin\frac{۲k\pi}{۲n+۱}=\cos\frac{۲\pi}{۲n+۱}\cos\frac{۴\pi}{۲n+۱}\cdots\cos\frac{۲n\pi}{۲n+۱}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-۱)^{m}}{۲^{۲m+۱}} & (n=۲m+۱)\\[2ex] \dfrac{(-۱)^{m}}{۲^{۲m}} & (n=۲m)\end{cases}\qquad(\pi^{IV}_{۲۲})$$

حل : برای محاسبهٔ $(\pi_{۲۲})$ در رابطهٔ $(\pi_{۲.})$ ، $x=۱$ قرار میدهیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)=n \implies 2^{2(n-1)}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right]^2=n ,$$

و از آنجا صحت رابطهٔ (π_{22}) ثابت میشود .

بهمین ترتیب میتوان بقیهٔ روابط (π'_{22}) ، (π''_{22}) ، (π'''_{22}) و (π^{IV}_{22}) راثابت کرد. بایستی بترتیب فرض کرد: $x=1$ در رابطهٔ (π'_{21})، $x=1$ در رابطهٔ (π_{21}) ، $x=-1$ در رابطهٔ (π_{21}) و $x=i$ در رابطهٔ (π''_{21}) .

۲۳. ثابت کنید ، وقتی n عددی زوج باشد ، اتحاد زیر صحیح است :

$$\sin nx=n\sin x\cos x\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \qquad (\pi_{23})$$

حل : رابطهٔ زیر را در نظر میگیریم :

$$\sin nx=C_n^1\sin x\cos^{n-1}x-C_n^3\sin^3 x\cos^{n-3}x+$$

$$+C_n^5\sin^5 x\cos^{n-5}x-\dots(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\sin^{n-1}x\cos x \qquad (S_n)$$

یا :

$$\sin nx=\sin x\cos x(C_n^1\cos^{n-2}x-C_n^3\sin^2 x\cos^{n-4}x+\dots$$

$$\dots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}C_n^{n-1}\sin^{n-2}x) .$$

از آنجاکه توانهای زوج کسینوس را میتوان به توانهای زوج سینوس تبدیل کرد، خواهیم داشت :

$$\sin nx=\sin x\cos x\cdot P(\sin^2 x)$$

و اگر $\sin x=z$ فرض کنیم :

$$\sin nx=\sin x\cos x\cdot P(z^2)$$

که در آن :

$$P(z^۲)=C_n^۱(۱-z^۲)^{\frac{n-۲}{۲}}-C_n^۳z^۲(۱-z^۲)^{\frac{n-۴}{۲}}+\cdots+$$

$$+(-۱)^{\frac{n-۲}{۲}}C_n^{n-۱}z^{n-۲}$$

هر مقدار $z=\sin x$ ، که بازاء آن $\sin nx=۰$ ولـی $\sin x\neq ۰$ و $\cos x\neq ۰$ باشد ، ریشهٔ کثیرالجملهٔ $P(z^۲)$ است .

از شرط $\sin nx=۰$ نتیجه میشود :

$$x=\frac{k\pi}{n}\quad\left(k=۰\,;\pm۱\,;\,\pm۲\,:\,\dots\,;\,\pm\frac{n-۲}{۲}\,;\,\frac{n}{۲}\right)$$

بازاء $k=۰$ و $k=\frac{n}{۲}$ ضرایب $\sin x$ و $\cos x$ برابـر صفر میشوند ، درحالیکه بازاء بقیهٔ مقادیر k ، این ضرایب صفر نمیشوند و بنابراین :

$$z=\sin\frac{\pi}{n}\,;\qquad z_۲=\sin\frac{۲\pi}{n}\,;\,\dots\,;\,z_{\frac{n-۲}{۲}}=\sin\frac{(n-۲)\pi}{۲n}\,;$$

$$z_{-۱}=-\sin\frac{\pi}{n}\,;\quad z_{-۲}=-\sin\frac{۲\pi}{\pi}\,;\,\dots;$$

$$z_{-\frac{n-۲}{۲}}=-\sin\frac{(n-۲)\pi}{۲n}\,.$$

$n-۲$ ریشهٔ مختلف بـرای کثیرالجملهٔ $P(z^۲)$ (از درجهٔ $(n-۲$ وجود دارد ، بنابراین خواهیم داشت :

$$P(z^۲)=A(z-z_۱)(z-z_{-۱})\cdots(z-z_{\frac{n-۲}{۲}})(z-z_{-\frac{n-۲}{۲}})=$$

$$=(-۱)^{\frac{n-۲}{۲}}A(z_۱^۲-z^۲)(z_۲^۲-z^۲)\cdots(z^۲_{\frac{n-۲}{۲}}-z^۲)=$$

$$=(-1)^{\frac{n-2}{2}} A z_1^2 z_2^2 \cdots z^2_{\frac{n-2}{2}} \left(1-\frac{z^2}{z_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{z_2^2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{z^2}{z^2_{\frac{n-2}{2}}}\right)=n\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right). \qquad (*)$$

(A ضریب بزرگترین جمله در $P(z^2)$ است و $z_k=-z_{-k}$ و $(z=\sin x$.

در حقیقت :

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \cdots z^2_{\frac{n-2}{2}} = z_1 z_{-1} \cdots z_{\frac{n-2}{2}} z_{-\frac{n-2}{2}}$$

عبارتست از حاصلضرب ریشه‌های $P(z^2)$ مساوی مقدار ثابت تقسیم بر A ، یعنی:

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \cdots z^2_{\frac{n-2}{2}} = \frac{P(0)}{A} = \frac{n}{A}$$

که اگر در رابطهٔ (*) قراردهیم ، اتحاد مورد نظر بدست میاید .

بهمین ترتیب میتوان اتحادهای زیر را ثابت کرد :

$$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right); \qquad (n \text{ عددی است زوج})$$

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right); \qquad (n \text{ عددی است فرد})$$

$$\cos nx = \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right) \; ; \quad (\text{n عددی است فرد})$$

۲۹. زوایای کمکی و تبدیلات مثلثاتی

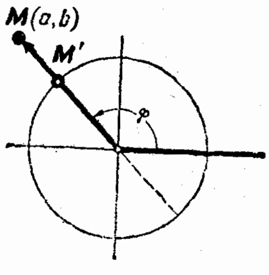
تغییر بوسیلهٔ زاویهٔ کمکی را میتوان در حالت کلی باین ترتیب مشخص کرد: **وقتی‌که عدد مفروض و یا عبارت مفروضی را بوسیلهٔ تابع مثلثاتی آوندی بیان‌کنیم، آوند را زاویهٔ کمکی (یا آوندکمکی) گویند**. از مجموعهٔ همهٔ مقادیر ممکن زاویهٔ کمکی، آنرا انتخاب می‌کنیم که‌مقداری کاملا مشخص باشد (مثلا کوچکترین مقدارمطلق)، توابع مثلثاتی این زاویهٔ انتخابی دقیقاً معین است و در تغییرات بعدی معلوم بحساب میآید.

I. **تبدیل بمختصات قطبی** و این‌تبدیل‌را میتوان باین ترتیب بیان کرد: اگر لااقل یکی‌از اعداد a و b مخالف صفر باشند، در فاصلهٔ $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (یا درفاصلهٔ $-\pi < \varphi \leqslant \pi$) یك مقدار برای φ وجود داردکه بازاءآن داریم:

$$a = r\cos\varphi \; ; \quad b = r\sin\varphi \; ; \qquad (1)$$

که درآن $r = \sqrt{a^2+b^2}$ است.

در حقیقت کافی است روی صفحهٔ مختصات، نقطهٔ $M(a \text{ و } b)$ را پیدا کرد (شکل ۱۱۲) و زاویه‌ای راکه‌بردار OM با محور طول میسازد در نظر گرفت. با معلوم بودن مختصات نقطهٔ M، فاصلهٔ آن ازمبداء مختصات:



ش ۱۱۲

$$r = |OM| = \sqrt{a^2+b^2}$$

و زاویهٔ منفرد φ بین OM و محور ox، (اگر مقدار φ در فاصلهٔ (۲π و ۰] ویا [π و π —) انتخاب‌شود) معین خواهد بود .

دراینصورت $M'(\cos\varphi \text{ و } \sin\varphi)$ نقطهٔ تلاقی نیم‌خط OM با دایرهٔ واحد خواهد بود .

اگر بجای زاویهٔ φ زوایای $\varphi \pm \pi$ انتخاب شود ، رابطهٔ (۱) بصورت زیر درمیآید :

$$a = r\cos\varphi \; ; \; b = r\sin\varphi \qquad (1')$$

که درآن $r = -\sqrt{a^2 + b^2}$ است .

در اینحالت بردار OM درجهت عکس قرار میگیرد . اغلب اتفاق میافتد که زاویهٔ کمکی φ را طبق رابطهٔ زیر معین می‌کنند :

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \; ; \; a \neq 0$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (b > 0) \\ & \qquad ; \; a = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & (b < 0) \end{cases}$$

در این انتخاب همیشه داریم : $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

رابطهٔ (۱) را میتوان باین صورت هم نوشت :

$$a = r\cos\varphi \; ; \; b = r\sin\varphi \; ;$$

ضمناً باید درنظر گرفت :

$$r = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} & (a > 0) \\ -\sqrt{a^2 + b^2} & (a < 0) \end{cases} \; ; \; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \; ;$$

بازاء $a = 0$ ، انتخاب زاویهٔ φ را در بالا ذکر کردیم .

درحقیقت‌وقتی $a \geqslant 0$ باشد، نقطهٔ M' روی نیمدایرهٔ راست قرارمیگیرد

و بعنوان زاویهٔ کمکی مقداری از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ انتخاب‌میشود که OM بامحور طول میسازد . درحالتیکه $a<0$ باشد ، نقطهٔ M' روی نیمدایرهٔ چپ واقع است وزاویهٔ انتخابی ، زاویه‌ای است در همان فاصله ، کـه امتداد OM (از طرف نقطهٔ O) با محور طول میسازد .

تبصـره : وقتی کـه اعداد مفروض b و a ، قسمتهای حقیقی و موهومی عدد مختلط $z=a+ib$ باشد ، تبدیل به مختصات قطبی بمعنای تعیین شکل مثلثاتی عدد مختلط است :

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

II. تبدیل مجموعی‌که بصورت $a\sin\alpha x+b\cos\alpha x$ باشد . بااستفاده از تبدیل به مختصات قطبی طبق رابطهٔ (۱) ، عبارت مفروض بصورت زیـر در میآید :

$$a\sin\alpha z+b\cos\alpha z=r(\cos\varphi\cos\alpha x+\sin\varphi\sin\alpha x)=r\cos(\alpha x+\varphi)\cdot$$

اگر مختصات قطبی نقطهٔ N(b و a) را درنظر بگیریم ، داریم :

$$b=r\cos\psi\ ;\ a=r\sin\psi \text{ و } r=\sqrt{a^2+b^2}$$

و بدست میآوریم :

$$a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=r\cos(ax-\psi)$$

این تبدیل اغلب در فیزیك مورد احتیاج است (بند ۶۶ را ببیند) .

III. نمونه‌های‌مختلفی از تبدیل مجموعهای جبری به‌صورت ضرب. در زیر نمونه‌هائی از زاویهٔ‌کمکی کـه بوسیلهٔ‌آن میتوان مجمـوع جبری را بصورت ضرب درآورد، ذکر شده است :

۱. مجموع $a+b$ داده شده است ، فرض می‌کنیم $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ (و a و b را مخالف صفردر نظر گرفته‌ایم)، در اینصورت باتوجه باینکه $tg\frac{\pi}{4}=1$ میباشد، بدست میآوریم :

$$a+b=a(1+\frac{b}{a})=a(1+tg\alpha)=\frac{\sqrt{2}a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$$

۲. تفاضل $a-b$ را هم میتوان با همین روش تبدیل کرد :

$$a-b=\frac{\sqrt{2}a\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\cos\alpha}$$

(که‌در آن $\alpha=\mathrm{arc}tg\frac{b}{a}$ است) .

۳. اگر a و b هم علامت باشند ، $\frac{b}{a}>0$ خواهد بود و بـرای تبدیل مجموع $a\pm b$ میتوان فرض کرد $\alpha=\mathrm{arc}tg\sqrt{\frac{b}{a}}$، دراینصورت بدست میآید:

$$a+b=a(1+tg^2\alpha)=a\sec^2\alpha\ ;$$
$$a-b=a(1-tg^2\alpha)=a\cos2\alpha\sec^2\alpha$$

۴. نسبت $\frac{a-b}{a+b}$ بـا فرض $\alpha=\mathrm{arc}tg\frac{b}{a}$ بصورت‌زیر درمیآید :

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)$$

۵. تفاضل a^2-b^2، در آن $|b|\leqslant|a|$ باشد ، میتواند با در نظر گرفتن $\alpha=\mathrm{arc}\sin\frac{b}{a}$ باین‌صورت درآید :

$$a^2-b^2=a^2(1-\frac{b^2}{a^2})=a^2(1-\sin^2\alpha)=a^2\cos^2\alpha$$

همچنین میتوانستیم فرض کنیم : $\beta=\mathrm{arc}\cos\frac{b}{a}$ که‌دراینصورت‌داریم:

$$a^2-b^2=a^2\sin^2\beta$$

۶. تفاضل a^2-b^2 ، کـه درآن $|b|\leqslant|a|$ است ، میتوانـد با فـرض

$\beta=\operatorname{arccos}\dfrac{b}{a}$ بصورت زیر نوشته شود :

$$a^2-b^2=b^2\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)=b^2(\sec^2\beta-1)=b^2 tg^2\beta$$

۷. مجموع a^2+b^2 را با فرض $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ میتوان بصورت زیر نوشت :

$$a^2+b^2=a^2\sec^2\alpha .$$

برای تبدیل مجموعهای بغرنجتر میتوان از روشهای کاملا مختلف (که اغلب هم ابتکاری هستند) استفاده کرد و این روشهای متفاوت را هم نمیتوان بعنوان یك نظریهٔ کلی تنظیم کرد. یك مجموع را میتوان گاهی بطرق مختلف بصورت‌ضرب درآورد (و اغلب هم نمیتوان یکی‌را بردیگری ترجیح داد). تبدیل مجموع بصورت ضرب با استفاده از زوایای کمکی، محاسبهٔ یك‌عبارت را بکمك لگاریتم ساده میکند، مقدار زاویهٔ کمکی و خطوط مثلثاتی آنهم بوسیلهٔ جدول لگاریتم محاسبه میشود.

در کتابهای قدیمی که برای‌محاسبات‌لگاریتمی اهمیت فوق‌العاده‌ای‌قائل بودند، تبدیل مجموع بصورت ضرب نقش اساسی داشت، ولی برای تکنیك امروزی محاسبه چنین تبدیلاتی کمترمورد استفاده دارد. مثلا به مسئلهٔ زیر توجه‌کنیم: اگر $\log a$ و $\log b$ معلوم باشد، $\log(a+b)$ را محاسبه‌کنید.

اگر زاویهٔ کمکی $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ را درنظر بگیریم،داریم (به‌مثال ۳ مراجعه کنید) :

$$\log(a+b)=\log a+2\log\sec\alpha$$

مقدار $2\log\sec\alpha$ بکمك مقدار نسبت $\dfrac{b}{a}$ معین میشود. با مفروض بودن $\log a$ و $\log b$ میتوان $\log\dfrac{b}{a}$ را بدست آورد.

$$\log\frac{b}{a}=\log b-\log a$$

و بنابراین خـود نسبت $\frac{b}{a}$ هم معلوم خواهد بود . برای محـاسبات عملی، جداولی تنظیم شده است که بازاء هرمقدار تفاضل $\Delta=\log b-\log a$ ، مقدار $۲\log\sec\alpha$ معین شده است . این جدولهـا که به «لگاریتمهای گوس» مشهورند، دربعضی از جداول لگاریتم ۵ رقمی هم نقل شده‌اند . فرض کنید $\log a=۱/۳۷۵۲۹$ و $\log b=۰/۸۷۴۶۱$ باشد، داریم :

$$\Delta=\log a-\log b=۰/۵۰۰۶۸ ،$$

با معلوم بودن Δ ، بوسیلهٔ جدول میتوان مقدار $۲\log\sec\alpha$ را مساوی ۰/۱۱۹۱۷ پیدا کرد .

و بنابراین : $\log(a+b)=\log a+۰/۱۱۹۱۷=۱/۴۹۴۴۶$

ولی در زمان ما از این روش محاسبه بندرت استفاده میشود .

IV. تبدیل ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم بصورت ضرب : معادلهٔ زیر را در نظر میگیریم :

$$x^۲+۲px+q=۰$$

داریم : $$x=-p\pm\sqrt{p^۲-q}$$

حالت اول : $p^۲\geqslant q$ و $q>۰$ ، در اینصورت ریشه‌ها حقیقی هستند .

اگر فرض کنیم $t=\arcsin\frac{\sqrt{q}}{p}$ داریم : $\sqrt{q}=p\sin t$ و بنابراین :

$$x=-p\pm\sqrt{p^۲-q}=-p\pm p\cos t=-p(۱\mp\cos t)$$

و : $$x_۱=-۲p\sin^۲\frac{t}{۲}\;;\quad x_۲=-۲p\cos^۲\frac{t}{۲}$$

حالت دوم : $q<۰$ ، ریشه‌ها حقیقی هستند وداریم :

$$x=-p\pm\sqrt{p^۲+|q|}$$

اگر فرض کنیم $t=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|q|}}{p}$ داریم : $\sqrt{|q|}=p\,tg\,t$ در اینصورت :

$$x=-p\pm\frac{p}{\cos t}=-p\frac{\cos t\mp 1}{\cos t}=-\sqrt{|q|}\frac{\cos t\mp 1}{\sin t}$$

و :
$$x_1=\sqrt{|q|}\,tg\frac{t}{2}\quad ;\quad x_2=-\sqrt{|q|}\,cotg\frac{t}{2}$$

حالت سوم : اگر $p^2<q$ باشد، ریشه‌ها موهومی هستند وداریم :

$$x=-p\pm i\sqrt{q-p^2}$$

و اگر فرض کنیم $p=\sqrt{q}\cos t$، خواهیم داشت :

$$x=\sqrt{q}(\cos t\pm i\sin t)$$

۷. تبدیلات مثلثاتی : منظورما از تبدیلات مثلثاتی اینست که آوندx از تابع‌مفروض $f(x)$ را بصورت تابع $x=\varphi(t)$ از آوند کمکی t درآوریم. تبدیلات‌مثلثاتی‌اغلب برای‌بیان‌توابع‌**گنگ**بصورت عبارتی‌**گویا**ازتوابع‌**مثلثاتی** آوند کمکی ، بکار میرود .

در محاسبات انتگرالی‌بسیاری از توابع گنگ، بطور وسیع‌از تبدیلات مثلثاتی استفاده میشود . مثلا تابع زیر درنظر میگیریم :

$$R(x\ \text{و}\ \sqrt{a^2-x^2})\qquad\qquad (R)$$

که درآن $a>0$ و $R(u\text{و}v)$ تابعی‌گویا نسبت به‌آوندهای v وu باشد. تابع(R) تنها بازاء مقادیر واقع درفاصلهٔ بستهٔ $-a\leqslant x\leqslant a$ حقیقی است. با توجه به‌مسئلهٔ ۵ (شماره III) فرض می‌کنیم :

$$t=\arccos\frac{x}{a}\Longrightarrow x=a\cos t$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}=a|\sin t|=a\sin t$$

(باید توجه‌داشت که مقدار t درنیمدایرهٔ فوقانی‌واقع است و بنابراین

$\sin t \geqslant 0$ میباشد).

$x = a\cos t$ در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant t \leqslant \pi$ نسبت به آوند t تابعی متصل و یکنوا (نـزولی) است ، تابـع معکوس آن $t = \arccos\frac{x}{a}$ هم در فـاصلهٔ بستهٔ متناظر آن $-a \leqslant x \leqslant a$ تـابعی است نزولـی و متصل (به بند ۳۲ هم مراجعه کنید) .

بهمین ترتیب با روش‌مشابهی میتوان توابع زیر را هم تبدیل نمود. برای تابع بصورت :

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \qquad |x| \geqslant a$$

میتوان فرض کرد $t = \arccos\frac{a}{x}$ یا $x = a\sec t$ ودر اینصورت :

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a|\operatorname{tg} t| = \begin{cases} a\operatorname{tg} t & (a \leqslant x < +\infty) \\ -a\operatorname{tg} t & (-\infty < x \leqslant a) \end{cases}$$

برای عبارت $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$ میتوان فرض کرد $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ که در اینصورت $\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t$ خواهد شد .

چند مثال :

۱. داریم :

$$\text{a)}\quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\text{b)}\quad \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\text{c)}\quad 2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{13}\sin(x - \alpha).$$

در حالت (c) ، زاویهٔ کمکی از شرط $\cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$ و $\sin\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ معین‌شده است، یعنی فرض کردیم : $\alpha=\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$. بااستفاده‌ازجدولهای لگاریتم چهار رقمی داریم :

$$\log\sin\alpha=\log\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}=\bar{۱}/۹۲۰۱\Longrightarrow\alpha\#۵۶^\circ \text{و} ۱۸' ;$$

و باین ترتیب خواهیم داشت :

$$۲\sin x-۳\cos x=\sqrt{۱۳}\sin(x-۵۶^\circ \text{و} ۱۸').$$

در تمرین زیر نمونه‌ای از روشهای ابتکاری تبدیل مجموع بصورت قابل محاسبهٔ لگاریتمی ذکرشده‌است(اغلب درکتابهای قدیمی‌مربوط به مسائل مثلثات به اینگونه تمرینات برخورد می‌کنیم) .

۲. بصورت ضرب تبدیل کنید :

$$S=a^۲+b^۲-۲ab\cos\alpha..$$

حل : روش اول (با فرض $a\neq b$) —

چون داریم : $\cos\alpha=\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ ، خواهیم داشت :

$$S=(a^۲+b^۲)(\sin^۲\frac{\alpha}{۲}+\cos^۲\frac{\alpha}{۲})-۲ab(\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲})=$$

$$=(a+b)^۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}+(a-b)^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}=$$

$$=(a-b)^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\left[۱+\left(\frac{a+b}{a-b}tg\frac{\alpha}{۲}\right)^۲\right].$$

که اگرفرض کنیم: $tg\varphi=\frac{a+b}{a-b}tg\frac{\alpha}{۲}$، بدست میآید:

$$S=(a-b)^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\sec^۲\varphi$$

روش دوم (.با فرض $a>۰$ و $b>۰$) —

چون داریم: $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ بدست میآید :

$$S = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\alpha}{2} = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

و از آنجا که نامساوی $2\sqrt{ab} < a+b$ بر قرار است ، خواهیم داشت :

$$0 < \frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \leqslant 1 \;;$$

اکنون اگر فرض کنیم $\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\varphi$ ، بدست میآوریم :

$$S = (a+b)^2\cos^2\varphi$$

روش سوم (بافرض $a \neq b$) —

داریم :

$$S = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

فرض‌می‌کنیم : $\frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} = tg^2\varphi$ که دراینصورت خواهیم‌داشت:

$$S = (a-b)^2\sec^2\varphi$$

۳. معادلهٔ زیر را با استفاده از جدولهای لگاریتم ۵ رقمی حل کنید:

$$322/4x^2 - 763/8x - 4325/9 = 0$$

حل: داریم (حالت دوم صفحهٔ ۲۳۲) :

$$p = -\frac{763/8}{2\times 322/4} \;;\quad q = -\frac{4325/9}{322/4} \;;\quad t = \mathrm{arc}tg\frac{\sqrt{|q|}}{p}\,(<0);$$

$\frac{t}{2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log|tg\,t| = \frac{1}{2}\log|q| - \log p = \frac{1}{2}\log 4325/9 - \frac{1}{2}\log 322/4 -$$

$$-\log 763/8 + \log 644/8 = 0/49029 \;;$$

و چون $t<0$ است ، پس $t = -72^\circ$ و $4'$ و $47''$ و :

$$\frac{t}{2} = -36^\circ \text{ و } 2' \text{ و } 24''$$

و با استفاده از روابط x_1 و x_2 خواهیم داشت :

$$\log|x_1| = \frac{1}{2}\log|q| + \log\left|tg\frac{t}{2}\right| = 0/422574\ ;$$

$$\log|x_2| = \frac{1}{2}\log|q| - \log\left|tg\frac{t}{2}\right| = 0/701194\ ;$$

وازآنجا $x_1 = -2/6652$ و $x_2 = 5/0343$.

درتمرینات ۴ و ۵ از تبدیل به مختصات قطبی در توابع دومتغیره استفاده شده است .

۴. ثابت کنید :
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

حل : فرض می‌کنیم $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ ، خواهیم داشت :

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| = r^2|\cos^4\varphi + \sin^4\varphi| < 2r^2$$

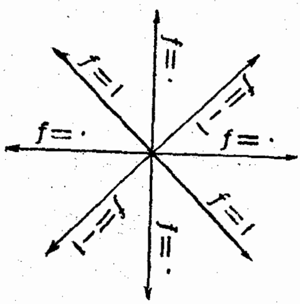
بنابراین نامساوی $\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ صحیح است، بشرطی‌که r (فاصلهٔ نقطهٔ $(x\text{ و }y)$ M تا مبداء مختصات) کوچکتراز $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ باشد.

۵. ثابت کنیدتابع $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ درنقطهٔ $O(0\text{ و }0)$ دارای حدی نیست.

حل : اگر به مختصات قطبی برویم ، داریم :

$$f(x\text{ و }y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$$

بازاء مقادیر مفروض φ ، تابع $f(x\text{ و }y)$ مقداری است ثابت ، یعنی تابع روی هر نیم خط دلخواهی که از مبدأ مختصات بگذرد مقداری است ثابت ، ولی در امتداد نیم خطهای مختلفی که از



ش۱۱۳

نقطهٔ O میگذرد، مقدار $f(x,y)$ مختلف است (شکل ۱۱۳) ، بنابراین (بنابر نظریهٔ مشهور حدود) برای تابع در نقطهٔ (۰ و ۰) O حدی وجود ندارد .

۶. میدانیم :

$$a_1^2+b_1^2=1\ ;\ \ a_2^2+b_2^2=1\ ;\ \ a_1a_2+b_1b_2=0$$

ثابت کنید :

$$a_1^2+a_2^2=1\ ;\ \ b_1^2+b_2^2=1\ ;\ \ a_1b_1+a_2b_2=0$$

حل: زوایای کمکی α و β را با شرایط زیر انتخاب می‌کنیم :

$$\cos\alpha=a_1\ ;\ \ \sin\alpha=b_1\ ;\ \ \cos\beta=a_2\ ;\ \ \sin\beta=b_2\ ;$$

در اینصورت رابطهٔ سوم فرض باین صورت در میآید :

$$a_1a_2+b_1b_2=\cos(\beta-\alpha)=0\ ;$$

و از آنجا :

$$\beta-\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\ ;$$

و بنابراین :

$$a_2=\cos\beta=\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{k+1}\sin\alpha\ ;$$

$$b_2=\sin\beta=\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{k}\cos\alpha\ .$$

و دیگر اثبات روابط حکم مشکل نیست .

۷ . روابط ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم در حالتی‌که سه ریشهٔ حقیقی دارد .

میدانیم که معادلهٔ درجهٔ سوم : $x^3+px+q=0$

(با ضرایب حقیقی) وقتی‌که $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ باشد. دارای سه ریشهٔ حقیقی است و این ریشه‌ها را نمیتوان بوسیلهٔ رادیکالهای حقیقی نسبت به

ضرایب بیان کرد . رابطهٔ کاردان را در نظر میگیریم :

$$\mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$$

که درآن :

$$\mathbf{u}=\sqrt[۳]{-\frac{\mathbf{q}}{۲}+\sqrt{\frac{\mathbf{q}^{۲}}{٤}+\frac{\mathbf{p}^{۳}}{۲۷}}}\ ;$$

$$\mathbf{v}=-\frac{\mathbf{p}}{۳\mathbf{u}}=\sqrt[۳]{-\frac{\mathbf{q}}{۲}-\sqrt{\frac{\mathbf{q}^{۲}}{٤}+\frac{\mathbf{p}^{۳}}{۲۷}}}$$

عبارت زیراولین رادیکال (ریشهٔ سوم) را بصورت مثلثاتی در میآوریم،

فرض می کنیم:

$$-\frac{\mathbf{q}}{۲}=\rho\cos\varphi\ ;\ \frac{\mathbf{q}^{۲}}{٤}+\frac{\mathbf{p}^{۳}}{۲۷}=-\rho^{۲}\sin^{۲}\varphi\ ;$$

و بنابراین :

$$\rho=\sqrt{-\frac{\mathbf{p}^{۳}}{۲۷}}\ ;\quad \cos\varphi=-\frac{\mathbf{q}}{۲\rho}\ ;\ \ \varphi=\mathbf{arc}\cos\left(-\frac{\mathbf{q}}{۲\rho}\right)\ ;$$

داریم : $\mathbf{u}=\sqrt[۳]{\rho}\,(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ و برای $\mathbf{v}$ بایستی مقدار مختلط مزدوج آنرا در نظر گرفت :

$$\mathbf{u}_{۱}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{۳}+\mathbf{i}\sin\frac{\varphi}{۳}\right)\ ;\ \ \mathbf{v}_{۱}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{۲}-\mathbf{i}\sin\frac{\varphi}{۳}\right)\ ;$$

$$\mathbf{u}_{۲}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+۲\pi}{۳}+\mathbf{i}\sin\frac{\varphi+۲\pi}{۳}\right)\ ;$$

$$\mathbf{v}_{۲}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+۲\pi}{۳}-\mathbf{i}\sin\frac{\varphi+۲\pi}{۳}\right)\ ;$$

$$\mathbf{u}_{۳}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+۴\pi}{۳}+\mathbf{i}\sin\frac{\varphi+۴\pi}{۳}\right)\ ;$$

$$\mathbf{v}_{۳}=\sqrt[۳]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+۴\pi}{۳}-\mathbf{i}\sin\frac{\varphi+۴\pi}{۳}\right)\ ;$$

وازآنجا :

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3};\quad x_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3};\quad x_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

۳۰. گویانش

فرض کنید $R(\cos x، \sin x)$ تابع گویائی نسبت به $\cos x$ و $\sin x$ باشد. متذکر میشویم که تابع گویا نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ و $tg\, x$ و $cotg\, x$ اهمیت خاصی ندارد ، زیرا $tg\, x$ و $cotg\, x$ نسبت به کسینوس وسینوس به صورت گویا بیان میشوند .

مثلا توابع زیر نسبت به کسینوس وسینوس گویا هستند :

$$\sin x\cos x;\quad \frac{1}{\cos x-\sin x};\quad \frac{\sin x}{2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x}$$

تعریف . گویانش تابع $R(\cos x، \sin x)$ ، یعنی تبدیل آن به تابع گویائی بصورت $R_1(t)$ که درآن t (آوند واسطه) با رابطهٔ $t=f(x)$ معین شود .

قضیه . برای گویانش هر تابع $R(\cos x، \sin x)$ ، که نسبت بــه $\cos x$ و $\sin x$ گویاست ، آوند واسطه عبارتست از : $t=tg\frac{x}{2}$

اثبات . کافی‌است ثابت‌کنیم که توابع $\cos x$ و $\sin x$ نسبت بــه تانژانت نصف قوس $t=tg\frac{x}{2}$ گویا هستند . در حقیقت داریم :

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

اگر $t = tg\frac{x}{2}$ فرض کنیم، توابع $\cos x$ و $\sin x$ بصورت توابع گویائی از آوند t در میآیند :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad . \qquad (R)$$

این تساویها بازاء همهٔ مقادیر $x \neq (2k+1)\pi$ صحیح‌اند و بازاء $x = (2k+1)\pi$، عبارت $tg\frac{x}{2}$ مفهوم خودرا از دست میدهد. ولی مقدار توابع $\sin x$ و $\cos x$ را در نقاط $x = (2k+1)\pi$ نیزمیتوان با محاسبهٔ حدی بدست آورد . در حقیقت :

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi} |t| = +\infty$$

و :

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi} \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \lim_{|t|\to\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0 = \sin(2k+1)\pi \quad ;$$

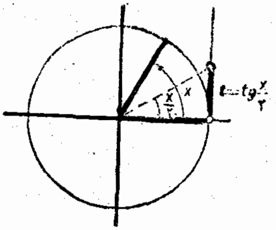
$$\lim_{x\to(2k+1)\pi} \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 = \cos(2k+1)\pi \, .$$

باین ترتیب بابیان $R(\cos x \text{ و } \sin x)$ برحسب t ، تابعی گویا نسبت به t بدست میآوریم .

تبدیل $t = tg\frac{x}{2}$ را تبدیل **عمومی** گویند ، زیرا هرعبارت $R(\cos x \text{ و } \sin x)$ را میتوان بصورت گویائی نسبت به آوند t بیان کرد.

تعبیر هندسی. آوند واسطهٔ t نمایندهٔ پاره‌خطی از محور تانژانتهاست

که بوسیلهٔ نیمساز زاویهٔ x جدا شده است (شکل ۱۱۴) .



ش ۱۱۴

$R(\cos x \text{ و } \sin x)$ تابعی‌است متناوب با دورهٔ تناوب ۲π ، از طرف دیگر:

$$t=tg\frac{x}{۲}\ ;\ \ x=۲\operatorname{arc}tg\, t$$

در فواصل متناظر: $-\pi<x<\pi$ و $-\infty<t<+\infty$ هم علامت و متصل‌اند. در حقیقت تابع $t=tg\frac{x}{۲}$ (که در فاصلهٔ $-\pi<x<\pi$ یکنوا (صعودی) و متصل است) دارای تابع معکوس $x=۲\operatorname{arc}tg\, t$ میباشد (که درفاصلهٔ متناظر $-\infty<t<+\infty$ یکنوا ومتصل است) . اگر توجه کنیم که مقدار تابع $R(\cos x \text{ و } \sin x)$ در نقاط $x=\pm\pi$ میتوانند مقادیرحدی بازاء $t=\pm\infty$ را بدست‌آورد، میتوان گفت که تبدیل‌عمومی یك دورتناوب کامل تابع R را در فاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$) بیان میکند .

تبدیل عمومی دارای خاصیت جالب زیر است ؛ مقدار آوند واسطهٔ $t=tg\frac{x}{۲}$ برحسب $\cos x$ و $\sin x$ بصورت گویا قابل بیان است . درحقیقت با توجه به روابط $(T'_{\frac{\alpha}{۲}})$ و $(T''_{\frac{\alpha}{۲}})$ بند ۲۴ داریم:

$$t=tg\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۱-\cos x}{\sin x}\ .$$

دستگاه توابع :

$$x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}\ ;\quad y=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}\qquad (I)$$

وقتی که t در فاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$) باشد نمایندهٔ معادلهٔ پارامتری یك دایره است . در حقیقت هرمقدار مفروض و حقیقی t متناظر است با یك‌مقدار

φ که درفاصلهٔ $-\pi<\varphi<\pi$ واقع است ودر شرایط زیر صدق میکند:

$$tg\frac{\varphi}{2}=t\ ;\quad \varphi=2\operatorname{arc}tg\,t\ ;$$

در اینصورت نقطهٔ متناظر آن :

$$x=\cos\varphi\ ;\quad y=\sin\varphi$$

روی دایرهٔ واحد قرار دارد . برعکس ، هرنقطه از دایرهٔ واحد که برنقطهٔ (۰ و ۱ —) منطبق نباشد ، بایك مقدار φ واقع در فاصلهٔ (πوπ —) متناظراست ومقدار φ تنها یك مقدار برای $t=tg\frac{\varphi}{2}$ بـدست میدهد . نقطهٔ (۰ و ۱ —) واقع بردایره‌هم از راه حد بدست میآید :

$$\lim_{|t|\to\infty} x=-1\ ;\quad \lim_{|t|\to\infty} y=0$$

مختصات نقاط واقع برهردایره‌ای که بصورت پارامتری داده شده‌باشد، بصورت تابع گویائی نسبت به آوند (پارامتر) **t** بیان میشود .

با کمك معادلهٔ پارامتری (I) میتوان «نقاط گویا» را برمحیط دایرهٔ واحد پیداکرد ، یعنی نقاطی که مختصات آنها اعدادی گویا باشند. درحقیقت هرمقدارگویای t ، با توجه به معادلات (I) ، متناظراست با نقطهٔ $M(x;y)$ از دایرهٔ واحدکه مختصاتش اعدادی گویا هستند ، برعکس ، هرنقطهٔ گویا از دایرهٔ واحد، بجز نقطهٔ (۰ و۱ —) ، با توجه به رابطهٔ ($T'_{\frac{\alpha}{2}}$) متناظر با مقدار گویائی از پارامتر است :

$$t=\frac{y}{1+x}$$

نتایج بالا را میتوان با تعبیرهندسی‌دیگری‌هم بدست‌آورد . اگروترمثلث قائم‌الزاویه‌ای را مساوی واحد درنظر بگیریم ، روابط :

$$a=\frac{2t}{1+t^2}\quad ;\qquad b=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

تمام مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را بما میدهندکه اضلاع مجاور بهزاویهٔ قائمهٔ آن با واحدوتر اندازه گرفته شده باشند . باین ترتیب میتوانیم روابط کلی زیر را برای اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه

(گویا) از یك مثلث قائم‌الزاویه بدست‌آوریم :

$$a=\frac{۲t}{۱+t^۲}c\;;\quad b=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}c$$

وازآنجا: $a:b:c=۲t:(۱-t^۲):(۱+t^۲).$

با اختیار عدد دلخواه وگویائی برای t ، میتوان مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع گویا بدست‌آورد . مثلا بازاء $t=۲$ داریم : $a=٤$ ، $b=۳$ ، $c=۵$ (طبق رابطه، $b<۰$ بدست میآید ، ولی‌درداینجا علامت مطرح نیست ، زیرا صحبت بر سرطول اضلاع است) و بازاء $t=۳$ داریم : $a=۶$ ، $b=۸$ ، $c=۱۰$. بازاء $t=۰$ و $t=۱$ مثلث بیك پاره خط تبدیل میشود.

حالا به حالتهائی میپرداذیم که درآنها میتوان گویانش‌را باتبدیلات ساده‌تری انجام داد .

۱°. اگرعبارت $R(\cos x \,و\, \sin x)$ تنهاشامل‌توانهای زوج $\cos x$ (یا $\sin x$) باشد، میتوان $t=\sin x$ (یا $t=\cos x$) فرض‌کرد . زیرا کافی است‌توجه کنیم‌که هرتوان زوجی ازکسینوس (یاسینوس) نسبت به سینوس (یاکسینوس) گویا است :

$$\cos^{۲k}x=(۱-\sin^۲x)^k=(۱-t^۲)^k\;;$$

و بنابراین :

$$R(\cos^۲x \,و\, \sin x)=R(۱-t^۲ \,و\, t)$$

۲°. اگر صورت ومخرج عبارت $R(\cos x \,و\, \sin x)$ نسبت به $\cos x$ و $\sin x$ جبری باشند و ضمناً تمام جمله‌ها نسبت به $\cos x$ و $\sin x$ از درجهٔ k باشند ، میتوان فرض‌کرد $t=\operatorname{tg}x$ (یا $t=\operatorname{cotg}x$) ، درحقیقت داریم :

$$\sin x=t\cos x\;.$$

که اگردر صورت ومخرج قرار دهیم ، مقسوم علیه مشترك $\cos^{۲k}x$ را پیدا می‌کنند وپس ازساده‌کردن صورت ومخرج به این مقسوم علیه مشترك $R(\cos x \,و\, \sin x)$ بصورت تابعی‌گویا نسبت t در میآید .

تبصره. مقدار تابع را در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، که در آنجا $\operatorname{tg}x$ مفهوم خود را از دست میدهد و $\cos x$ مساوی صفر میشود (و بنابر این

نمیتوان به $\cos x$ ساده کرد)، میتوان بکمك حد عبارت در نقاط $t = \pm\infty$ بدست آورد .

۳° اگر همهٔ جملات صورت و مخرج در عبارت $R(\cos x$ و $\sin x)$ نسبت به $\cos x$ و $\sin x$ ازتوان زوج (یا فرد) باشند میتوان $t = tg\,x$ فرض کرد. درحقیقت در اینحالت اختلاف درجه در صورت و مخرج مساوی عددی زوج است و میتوان آنهاراهم درجه کرد . برای این‌منظور، کافی است جملاتی راکه توان کوچکتر دارند درتوان مناسبی از $\sin x^{2} + \cos^{2} x$ (واحد) ضرب کرد (به مثال ۴ در همین بند مراجعه کنید) .

۴° فرض کنید R عبارت گویائی نسبت به توابع مثلثاتی مضربی از قوس x باشد :

$$R = R(\cos n_1 x \text{ و } \sin n_1 x \text{ و } \cos n_2 x \text{ و } \sin n_2 x \text{ و } \ldots \text{ و } \cos n_k x \text{ و } \sin n_k x);$$

که در آن n_1 ، n_2 و ... و n_k اعدادی صحیح هستند . چون توابع مثلثاتی مضارب یك قوس قابل بیان برحسب توانهای $\cos x$ و $\sin x$ هستند ، R بصورت تابعی گویا نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ درمیاید و گویانش آن بحالتهای قبل بر میگردد .

اگر n_1 ، n_2 و ... n_k اعداد (کسری) گویائی باشند :

$$n_1 = \frac{p_1}{q_1}\;;\quad n_2 = \frac{p_2}{q_2};\quad \ldots\;;\quad n_k = \frac{p_k}{q_k}\,.$$

$x = ny$ فرض‌می‌کنیم ، بطوریکه n کوچکترین مضرب مشترك تمام مخرجهای q_1 و q_2 و ... و q_k باشد . باین‌ترتیب R بصورت تابع مثلثاتی ازآوندهای مضارب y در میاید و بحالت قبل‌تبدیل میشود .

چند مثال.

۱. عبارت زیر را گویاکنید :

$$P = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

حل: داریم :

$$P=\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{1+2t-t^2}$$

۰۲ تابع زیررا گویا کنید :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$$

حل: اگر $t=tg\,x$ فرض کنیم ، داریم :

$$f(x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}=\frac{t}{t-1}$$

۰۳ گویا کنید : $\frac{tg\,x\cos^6 x}{\sin^4 x}$

حل: اگر $t=tg\,x$ فرض کنیم ، داریم :

$$\frac{tg\,x\cos^6 x}{\sin^4 x}=\frac{tg\,x}{tg^4 x\sec^2 x}=\frac{1}{t^3(1+t^2)}$$

۰۴ گویا کنید :

$$S=\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$$

حل: $t=tg\,x$ فرض می‌کنیم :

$$S=\frac{\sin x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{tg\,x(tg^2 x+1)}{tg^3 x+1}=\frac{t(t^2+1)}{t^3+1}$$

۰۵ گویا کنید :

$$P=\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos^4 x}$$

حل: $t=\sin x$ میگیریم ، در اینصورت داریم :

$$P=\frac{1-t^2}{t+(1-t^2)^2}=\frac{1-t^2}{t^4-2t^2+t+1}$$

۰٦ اگر داشته باشیم :

$$\sin x+\sin y=a\ ;\quad \cos x+\cos y=b\ ;$$

$\sin(x+y)$ و $\cos(x+y)$ را محاسبه کنید .

حل: پارامتر گویانش را $t=tg\frac{x+y}{2}$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\sin(x+y)=\frac{2t}{1+t^2}\ ;\qquad \cos(x+y)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;$$

از طرف دیگر داریم :

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{a}{b}\Longrightarrow tg\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}=t$$

و از آنجا :

$$\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}\ ;\qquad \cos(x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\ .$$

۰۷ گویا کنید :

$$Q=\frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{2}+1}$$

حل: اگر فرض کنیم $x=6y$: داریم ·

$$Q=\frac{\sin 2y}{\cos 3y+1}=\frac{2\sin y\cos y}{\cos^3 y-3\cos y\sin^2 y+1}$$

برای گویانش این عبارت بایستی از تبدیل عمومی استفاده کرد ، فرض می‌کنیم :

$$\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \; ; \quad \sin y = \frac{2t}{1+t^2} \quad (t = tg\frac{y}{2} = tg\frac{x}{12})$$

(ادامه‌کار مشکل نیست) .

۳۱. نمونه‌هائی ازجستجوی توابع

۱°. تابع $y = \sin \omega x$

تابــع $\sin \omega x$ $(\omega > 0)$ تابعی است متناوب بـــا دورهٔ تناوب مثبت $l = \frac{2\pi}{\omega}$. در حقیقت l بشرطی دورهٔ تناوب $\sin \omega x$ است که اتحاد زیر را داشته باشیم :

$$\sin \omega(x+l) \equiv \sin \omega x \qquad (1)$$

یا اتحاد زیر :

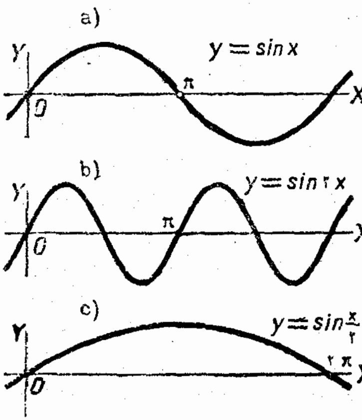
$$\cos(\omega x + \frac{\omega l}{2}) \sin \frac{\omega l}{2} \equiv 0$$

در اتحاد اخیر، عامل اول متحد با صفرنیست و عامل دوم هم مقدار ثابتی است . بنابراین اتحاد (۱) تنها وقتی بر قرار است که $\sin\frac{\omega l}{2} = 0$ ، یا $l = \frac{2k\pi}{\omega}$ باشد . بین مقادیر l ، کوچکترین مقدار مثبت $\frac{2\pi}{\omega}$ است که همان کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت خواهد بود .

منحنی تابع $y = \sin \omega x$ را میتوان با کمك منحنی سینوسی معمولی بدست آورد ، بشرطی که آنرا نسبت به محور عرض باندازهٔ $\frac{1}{\omega}$ منبسط (و یا بطرف محور عرض باندازهٔ ω مرتبه متراکم) کنیم . در حقیقت اگر منحنی

سینوسی (در دستگاه مختصات $x'oy$) $y=\sin x'$ را $\frac{1}{\omega}$ مرتبه منبسط کنیم، و فرض کنیم $x=\frac{1}{\omega}x'$ ، منحنی $y=\sin\omega x$ (دردستگاه xoy) بدست میآید. این تبدیل‌را **تبدیل دورهٔ تناوب** هم گویند. درشکل ۱۱۵ منحنی‌های سینوسی‌داده شده است : a) منحنی سینوسی معمولی . b) بطرف محور عرض ۲مرتبه متراکم‌شده : $y=\sin 2x$ (دورهٔ تناوب $l=\pi$). c) نسبت به محورعرض دومرتبه منبسط شده: $y=\sin\frac{x}{2}$ (دورهٔ تناوب $l=4\pi$).

با انتخاب مناسب ضریب انبساط $\frac{1}{\omega}$ ، میتوان منحنی‌سینوسی بادورهٔ تناوب دلخواه l بدست آورد .



ش ۱۱۵

مثلا بازاء $\omega=\frac{1}{2\pi}$ منحنی سینوسی $y=\sin 2\pi x$ با دورهٔ تناوب ۱ بدست میاید . فواصل یکنوائی تابع $y=\sin\omega x$ در یك فاصلهٔ تناوب باین ترتیب است : در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ از ۱− تا ۱ ترقی و درفاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}\right]$ از ۱ تا ۱− تنزل میکند . حد اکثر وحد اقل مقادیر y چنین‌اند :

$$y_{Max}=1\left(x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\right);\quad y_{Min}=-1\left(x=\frac{2k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{2\omega}\right).$$

اگر واحد اندازه گیری زوایا (یا قوسها) تغییر کند ، دورهٔ تناوب‌هم

دچار تغییر میشود . فرض کنید زاویهٔ e_1 بعنوان واحد اندازه گیری جدید انتخاب شده باشد که k برابر زاویهٔ e ، واحد اندازه گیری قدیم ، باشد :

$$e_1 = ke$$

دراینصورت اگر زاویه‌ای در دستگاه اندازه گیری قدیم باعدد x بیان شده باشد ، در دستگاه اندازه گیری جدید با عدد $x' = \frac{x}{k}$ بیـان میشود .

بنابراین تابع $\sin x$ به تابع $y = \sin kx'$ تبدیل میشود که معـادل با تبدیل دورهٔ تناوب آنست .

مثلا گر بجای رادیان،واحد اندازه گیری را درجه درنظر بگیریم‌داریم:

$$x = \frac{\pi}{۱۸۰} x'$$

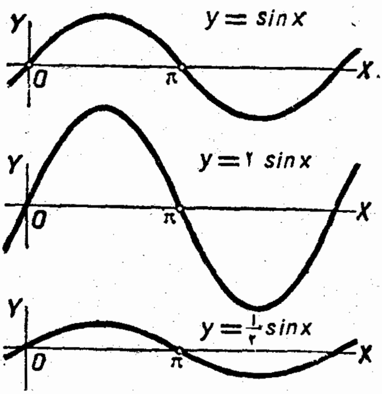
که درآن x و x' اندازه‌های قوس برحسب‌رادیان ودرجه است، باین‌ترتیب:

$$y = \sin x = \sin \frac{\pi}{۱۸۰} x'$$

بنابراین، منحنی‌سینوسی ، در دستگاه اندازه گیری با واحد درجه ، با مقایسهٔ منحنی سینوس معمولی، نسبت به محور عرض $\frac{۱۸۰}{\pi}$ مـرتبه منبسط میشود .

۲° . تابع $y = A\sin x$.

اگر $A > ۰$ باشد، منحنی‌مفروض درهمان فواصل $\sin x$ صعودی‌ونزولی است . حداکثر مقدار $A\sin x$ مساوی A و حداقل آن‌مساوی $-A$ است . منحنی‌آنرا میتوان ازانبساط منحنی $y = \sin x$ نسبت به‌محورطول (A مرتبه) بدست آورد . وقتی که $A < ۰$ باشد ، قرینهٔ منحنی قبلی



ش ۱۱۶

نسبت به محور طول بدست میآید . عدد $|A|$ را **دامنهٔ** منحنی سینوسی گویند و بهمین مناسبت این تبدیل را **تبدیل دامنه‌ای** گویند .

درشکل ۱۱۶ منحنی توابع $y = \sin x$ ، $y = ۲\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ داده شده است .

۳° . تابع $y = \sin(x + \alpha)$.

منحنی این تابع از منحنی سینوسی معمولی با انتقال مبداء مختصات به نقطهٔ $O'(-\alpha$ و $۰)$ بدست‌میآید . عدد α را **فاز اولیه** و این تبدیل را **تبدیل با اختلاف فاز** گویند .

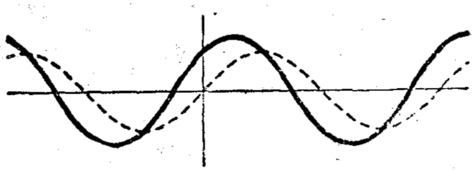
۴° . تابع $y = A\sin(\omega x + \alpha)$.

منحنی این تابع را میتوان ازمنحنی سینوسی معمولی : $Y = \sin X$ بدست‌آورد ، بشرطی‌که تبدیلات زیر راانجام‌دهیم: $X = x' + \alpha$ (تبدیل با اختلاف‌فاز)، $x' = \omega x$ (تبدیل دورهٔ تناوب)، $y = AY$ (تبدیل‌دامنه‌ای)

تابع : $y = a\sin\omega x + b\cos\omega x$

با انتخاب آوند کمکی $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ بصورت زیر درمیآید:

$$y = A\sin(\omega x + \alpha)$$
$$(|A| = \sqrt{a^۲ + b^۲})$$



ش ۱۱۷

در شکل ۱۱۷ منحنی تابع $y = \sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})$ داده شده است (منحنی خط‌چین منحنی سینوسی معمولی است) .

چند مثال

۱. منحنی تابع $y = \cos^۲ x$ را بدست‌آورید.

حل : داریم :

$$y = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲x)$$

تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن مساوی π است . درفاصلهٔ بستهٔ [۰ و $\frac{\pi}{2}$]

از ۱ تاصفر تنزل و درفاصلهٔ بستهٔ [$\frac{\pi}{2}$ و π] از صفر تا ۱ ترقی میکند . منحنی این تابع‌را میتوان از منحنی سینوسی با تبدیلات زیر بدست آورد :

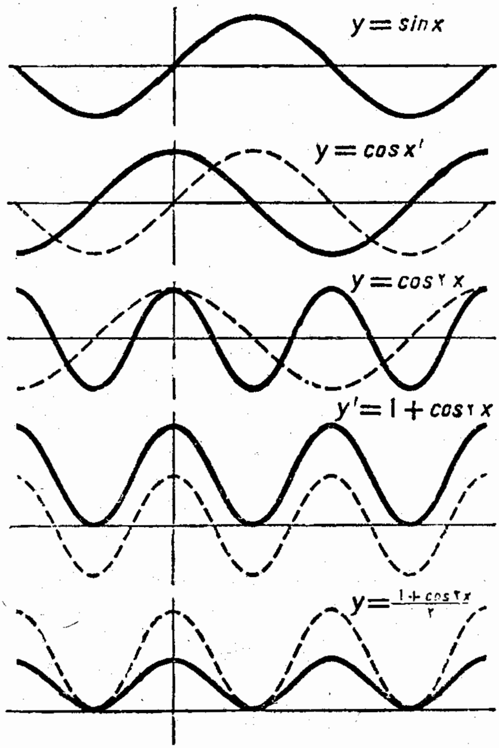
a) $y=\sin X;\quad X=x'+\frac{\pi}{2}$ (تبدیل فاز)

b) $Y=\cos x';\quad x'=2x$. (تبدیل تناوب)

c) $Y'=\cos 2x;\quad y'=y+1$ (انتقال درجهت محورعرض)

d) $y'=\cos 2x+1;\quad y=\frac{1}{2}y'$ (تراکم بطرف محورطول)

این تبدیلات در شکل ۱۱۸ روشن شده است .



شکل ۱۱۸

بهمین ترتیب میتوان منحنی تابع :

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

را رسم کرد ، با این تفاوت که بعد از تبدیل (c) بایستی قرینهٔ آنرا نسبت به محور طول بدست آورد .

۲ . تابع $y = \frac{x}{1 + x^2}$ را جستجو ومنحنی آنرا رسم کنید .

حل : اگر فرض کنیم $x = tg\, t$ (که در آن $t = arctg\, x$ است) ، بدست میآید:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2t$$

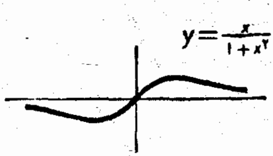
آوند x تابعی صعودی نسبت به t میباشد ، فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ با

با فاصله بستهٔ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$ متناظر است که در آنجا y ازصفر تا $\frac{1}{2}$ ترقی میکند.

فاصلهٔ $1 \leqslant x < +\infty$ متناظر است با فاصلهٔ $\frac{\pi}{4} \leqslant y < \frac{\pi}{2}$ که در آنجا y از

$\frac{1}{2}$ تاصفر تنزل میکند .

باین ترتیب تابع y در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ ازصفر تا $\frac{1}{2}$ ترقی و در فاصلهٔ $1 \leqslant x < +\infty$ از $\frac{1}{2}$ تا صفر تنزل میکند.



ش ۱۱۹

تابع y تابعی است فرد ومنحنی نمایش آن در شکل ۱۱۹ داده شده است.

۳ . تابع $y = \frac{x}{1 - x^2}$ را جستجو کنید .

حل : اگر شبیه تمرین قبل عمل کنیم، داریم :

$$y=\frac{1}{2}tg2t \quad (x=tgt\ ;\ t=arctgx)$$

نتایج مربوط به‌جستجوی تابع رادر جدول زیر خلاصه کرده‌ایم :

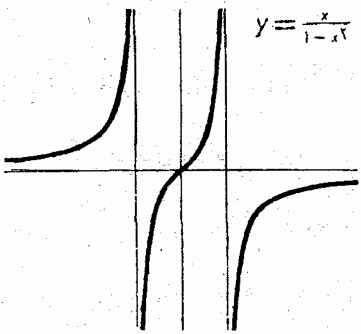
t	0	$<t<$	$\frac{\pi}{4}$	$<t<$	$\frac{\pi}{2}$
$x=tgt$	0	↗	1	↗	$+\infty$
y	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0

تابع فرد است ومنحنی نمایش آن در شکل ۱۲۰ رسم شده است .

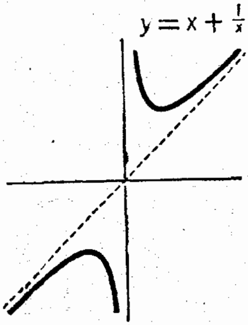
۴ . تابع $y=x+\frac{1}{x}$ را جستجو کنید .

حل : اگر همان تبدیل $x=tgt$ را در نظر بگیریم ، بدست می‌آید :

$$y=\frac{2}{sin2t};$$



ش ۱۲۰



ش ۱۲۱

داریم :

x	0	$<x<$	1	$<x<$	$+\infty$
t	0	↗	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

تابع فرد است ومنحنی نمایش آن (که یك‌هذلولی است) درشکل ۱۲۱ رسم شده است .

تبصره : جستجوی توابعی راکه در مثالهای ۲ و۳ و۴ ذکر کردیم ، میتوان با روش دیگر (باروش خالص جبری) هم انجام‌داد و ماجستجوی تابع را بطریق جبری بخوانندگان توصیه می کنیم .

۰۵ تابع $y=x+\sqrt{1-x^2}$ را جستجو کنید .

حل : تابع در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ معین است ، فرض می کنیم

$x=\sin t$ و $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ یعنی $t=\arcsin x$. باین ترتیب فاصلهٔ بستهٔ

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ متناظر است با فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، داریم :

$$y=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

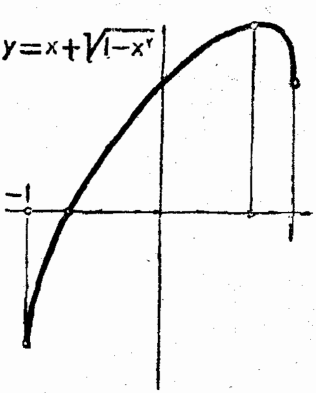
این تابع در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$ از $y=-1$ تا $y=\sqrt{2}$

ترقی و در فاصلهٔ بستهٔ $\frac{\pi}{4} < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ از $\sqrt{2}$ تا ۱ تنزل‌می‌کند.

اگر فواصل متناظر آوند x را بخواهیم ، بدست میآید :

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \;;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 1$$

که در اولین فاصله ، y از ۱ — تا $\sqrt{2}$ ترقی ودر فاصلهٔ دوم از $\sqrt{2}$ تا ۱ تنزل میکند. بازاء $x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ منحنی، محورطول راقطع میکند: $y=0$ منحنی نمایش تابع درشکل ۱۲۲ داده‌شده است .



ش ۱۲۲

تبصره : بسادگی میتوان اثبات کرد (بر اساس خواص معادلات گنگ) که منحنی نمایش این تابع یك نیم بیضی است .

۶ . تابع $y=\cos x+\cos 2x$ را جستجو و منحنی نمایش آنرا رسم کنید .

حل : داریم :

$$y=\cos x+2\cos^2 x-1$$

اگر فرض کنیم $\cos x=t$ ، بدست میآید :

$$y=2t^2+t-1 \qquad (1)$$

در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant \pi$ ، پارامتر t از ۱ تا ۱ — تنزل و در فاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ از ۱ — تا ۱ ترقی میکند . سه جملهای (۱) رادر فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant t\leqslant 1$ مورد بررسی قرار میدهیم ، ریشههای این سهجملهای $t_1=\frac{1}{2}$ و $t_2=-1$ میباشد وداریم :

$$y=\frac{1}{2}\left[(2t+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}\right]$$

بازاء $t=-\frac{1}{4}$ مقدار سه جملهای می‌نیمم میشود : $y_{Min}=-\frac{9}{8}$

سه جملهای در فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant t\leqslant -\frac{1}{4}$ از صفر تا $-\frac{9}{8}$ تنزل و در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1$ از $-\frac{9}{8}$ تا ۲ ترقی‌میکند . تابع مفروض‌زوج‌است و بنابراین‌کافی است آنرا تنها در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant \pi$ مورد مطالعه قرار دهیم . این فاصله با فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant t\leqslant 1$ متناظر است . در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant \arccos(-\frac{1}{4})$ ، آوند واسطهٔ t از ۱ تا $-\frac{1}{4}$ و y از۲ تا $-\frac{9}{8}$ تنزل میکند، در فاصلهٔ بستهٔ $\arccos(-\frac{1}{4})\leqslant x\leqslant \pi$ ، آوند t از $-\frac{1}{4}$

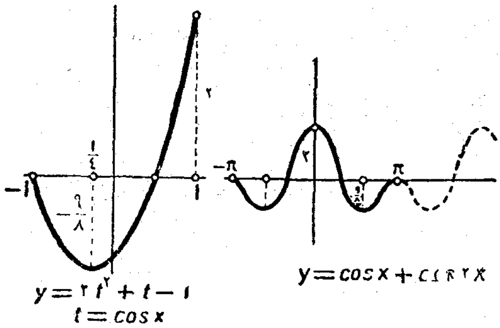
تا ۱− تنزل و y از $-\frac{9}{8}$ تا صفر ترقی میکند . در فاصلهٔ بستهٔ:

$-\pi \leqslant x \leqslant 0$ (با توجه باینکه تابع مفروض زوج است) ، داریم :

در فاصلهٔ بستهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant -\arccos(-\frac{1}{4})$ ، y از صفر تا $-\frac{9}{8}$ تنزل میکند .

در فاصلهٔ بستهٔ $-\arccos(-\frac{1}{4}) \leqslant x \leqslant 0$ ، y از $-\frac{9}{8}$ تا ۲ ترقی میکند .

در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant \pi$ عرض y در نقاط $x = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ و $x = \arccos(-1) = \pi$ برابر صفر میشود . تابع مورد نظر متناوب است و دورهٔ تناوب آن‌مساوی است با 2π و درنتیجه فاصلهٔ بستهٔ $[-\pi$ و $\pi]$ يك دور تناوب‌کامل آنرا بدست میدهد .



ش ۱۲۳

منحنی نمایش‌تابع در شکل ۱۲۳ داده شده است . مقدار : $\arccos(-\frac{1}{4}) \approx 1/82 (\approx 104^\circ)$ را از جدول پیداکرده‌ایم .

۷ . منحنی نمایش تابع $y = f(x) = \sin x + \sin 3x$ را رسم‌کنید.

حل : تابع فرد است و دورهٔ تناوبی مساوی 2π دارد .

منحنی تابع نسبت بخط $x = \frac{\pi}{2}$ متقارن است، زیرا داریم:

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) + \sin(3\pi - 3x) = \sin x + \sin 3x = f(x)$$

و بنابراین‌کافی است منحنی رادر فاصلهٔ بستهٔ $\cdot\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ رسم نمائیم. در دو انتهای این فاصله، تابع بسمت صفر میل میکند: $f(\cdot)=f(\frac{\pi}{۲})=\cdot$.

اگر فرض‌کنیم $t=\sin x$، خواهیم داشت:

$$y=۴\sin x-۴\sin^{۳}x=۴t(۱-t^{۲})$$

کثیرالجملهٔ $P(t)=t(۱-t^{۲})$ در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۰] دارای ماکزیمم است:

$$P(\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۹};\ (t=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{بازاء})$$

در فاصلهٔ بستهٔ $\cdot\leqslant t\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، کثیرالجملهٔ $P(t)$ صعودی است (از صفر تا $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$) و در فاصلهٔ بستهٔ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\leqslant t\leqslant ۱$ نزولی است (از $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ تاصفر)٭.

بنابرآنچه گفته شد، تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $\cdot\leqslant x\leqslant\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ از صفر تا $\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ ترقی ودر فاصلهٔ بستهٔ $\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۳}}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ از $\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ تا صفر تنزل میکند.

٭ کثیرالجملهٔ $P(t)$ رامیتوان هم با استفاده ازمحاسبات مربوط به‌مشتق مورد مطالعه قرار داد وهم بـاروشهـای مقدمـاتی. درحقیقت:

$$P(t)=(t^{۲})^{\frac{۱}{۲}}(۱-t^{۲})$$

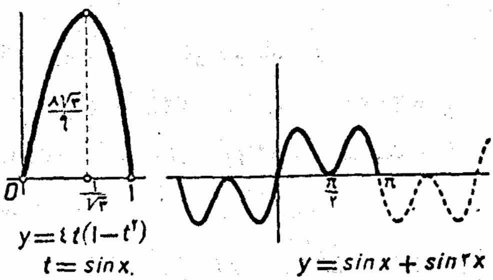
ماکزیمم این تابع وقتی است‌که داشته باشیم: $۲t^{۲}=۱-t^{۲}$ وازآنجا $t=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

تفاضل زیر را تشکیل میدهیم:

$$\Delta=P(t_{۲})-P(t_{۱})=(t_{۲}-t_{۱})(۱-t_{۱}^{۲}-t_{۱}t_{۲}-t_{۲}^{۲});$$

اگر $\cdot\leqslant t_{۱}<t_{۲}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، $\Delta>\cdot$ واگر $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\leqslant t_{۱}<t_{۲}\leqslant ۱$ باشد $\Delta<\cdot$ خواهدبود، بنابراین $P(t)$ در فاصلهٔ بستهٔ $\left[\cdot\ \text{و}\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right]$ صعودی‌ودرفاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{و}\ ۱\right]$ نزولی است.

منحنی تابع در شکل ۱۲۴ رسم شده است (مقدار $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \approx ۰٫۶۱ \approx ۳۵^\circ$ را از جدول معین می کنیم) .



ش ۱۲۴

۳

توابع معکوس مثلثاتی

۳۲. تابع قوس

آرك سينوس . درموردتابع $y = \sin x$، وقتی که $-\infty < x < \infty$ باشد، نمیتوان تابع معکوس را بدست آورد . زیرا برای تابع $\sin x$ ، مقدار m متناظر با بی‌نهایت مقدار آوند است و بنابراین با فرض $y = m$ نمیتوان تنهایك مقدار برای x در نظر گرفت . تابع معکوس وقتی ممکن است که $y = \sin x$ برای هر مقدار دلخواه x در نظر گرفته نشود ، بلکه در فاصلهٔ دلخواهی که سینوس یکنواست مورد مطالعه باشد .

فواصلی که درآنجا سینوس یکنواست عبارتند از :

$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ که در آن $\sin x$ از ۱— تا ۱+ صعودی است و

$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ که در آن $\sin x$ از ۱ تا ۱— نزولی است

(به بند۱۷ مراجعه کنید) . این‌فواصل بسته، رویهم فاصلهٔ ($-\infty$ و $+\infty$) یعنی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را تشکیل میدهند . درهریك از این فواصل بسته ، تابع $y = \sin x$ دارای تابع معکوس میباشد .

تابع $y = \sin x$ را در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ در نظر میگیریم ، میدانیم (به‌بند ۱۴صفحهٔ ۶۷ مراجعه کنید) که بازاء هرمقدار y که در شرط $-1 \leqslant y \leqslant 1$ صدق کند ، تنها یك مقدار قوس $x = \arcsin y$ در فاصلهٔ بستهٔ

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ وجود دارد که سینوس آن مساوی y است ✿. بنابراین تابع

معکوس $y=\sin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ با رابطهٔ زیر بیان میشود:

$$x=\arcsin y; \qquad (-1\leqslant y\leqslant 1)$$

وقتی که تابع معکوس $\sin x$ را در فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ معلوم باشد، میتوان (با کمك روابط تبدیل) تابع معکوس سینوس را در هرفاصله‌ای که یکنواست بدست آورد. در حقیقت، قوس $2k\pi+\arcsin y$ سینوسی مساوی y دارد:

$$\sin(2k\pi+\arcsin y)=\sin(\arcsin y)=y$$

بنابراین: $x=2k\pi+\arcsin y$

تابع معکوس $y=\sin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ میباشد.

قوس $2k\pi+(\pi-\arcsin y)$ سینوسی مساوی y دارد:

$$\sin[2k\pi+(\pi-\arcsin y)]=\sin(\pi-\arcsin y)=$$
$$=\sin(\arcsin y)=y$$

و بنابراین: $x=2k\pi+(\pi-\arcsin y)$

✿) بجاست یادآوری کنیم که هم دراینجا وهم بعداً، تنها بمناسبت سهولت و اختصار اصطلاح هندسی را بکار میبریم. در حالیکه به $x=\arcsin y$: قوس میگوئیم، باید در نظر داشت که x بمناسبت تعبیری که از آوند آن انتظار داریم میتواند مفاهیم مختلفی را بیان کند. وقتیکه توابع مثلثاتی راکه آوندعددی دارند مورد مطالعه قرار میدهیم، x عدد است نه قوس (در نظریهٔ هندسی، این عدد اندازهٔ قوس برحسب رادیان است نه خود قوس)، همچنین وقتیکه از توابع صحبت می‌کنیم بازهم میتوان همین تعبیر را پذیرفت. ولی در مواردی که آوندتابع مثلثاتی بعنوان یك زاویه یاقوس درنظرگرفته میشود $\arcsin y$ هم بایستی متناظراً بعنوان زاویه یا قوس بحساب آید.

تابع معکوس $y = \sin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $\left[2k\pi+\frac{3\pi}{2} \text{ و } 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ است .

باین ترتیب‌در حالت خاص، $x = \pi - \arcsin y$ تابع معکوس‌سینوس در فاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{3\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ است .

از آنچه گفته شد نتیجه میشود که‌کافی است تابع $y = \arcsin x$ را محدود کرد (برای سهولت‌کار وهمانطور که معمول است‌جای x و y را باهم عوض کرده‌ایم) .

تابع $\arcsin x$ داری خواص زیر است :

۱° . تابع $y = \arcsin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ معین است ، زیرا مجموعهٔ مقادیر سینوس در این فاصله واقع‌اند .

۲° . تابع $y = \arcsin x$ درفاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ صعودی است . زیرا اولا وقتی‌که تابع معکوس آن $x = \sin y$ در فاصلهٔ‌بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2} \text{ و } -\frac{\pi}{2}\right]$ صعودی است تابع $\arcsin x$ هم صعودی خواهد بود . ثانیاًهر مقدار دلخواه m که در فاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2} \text{ و } -\frac{\pi}{2}\right]$ اختیار شود، در تابع $\arcsin x$ متناظر با نقطهٔ $x = \sin m$ است . **باین ترتیب مجموعهٔ مقادیر آرك‌سینوس فاصلهٔ بستهٔ $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ میباشد .**

۳° . $\arcsin x$ تابعی فرداست .

اثبات : چون $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ است ، بنابراین خواهیم داشت :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

و سپس : $\sin(\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$

بنابراین قوسهای $\arcsin(-x)$ و $-\arcsin x$ هر دو سینوسی

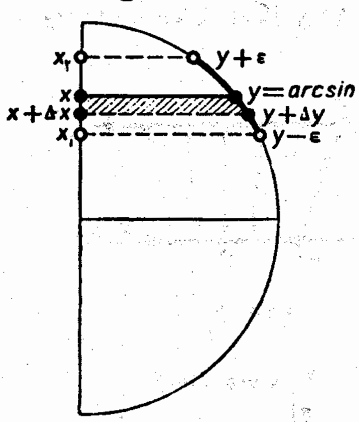
مساوی $-x$ دارندوهردودرفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ واقع و بنابراین با هم

مساوی‌اند :
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

۴° : $y = \arcsin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $-1 < x < 1$ متصل است .

اثبات . این‌خاصیت را میتوان باهمان روش‌که برای تابع سینوس‌عمل کردیم ، اثبات‌کرد (به‌صفحهٔ ۱۰۹ مراجعه‌شود). اگر x_1 و x_2 تصاویر انتهای قوسهای $y-\varepsilon$ و $y+\varepsilon$ بر قطر قائم باشند ، نمو قوس Δy از لحاظ قدرمطلق میتواند کوچکتر از ε باشد :

$|\Delta y| < \varepsilon$ است بشرطی‌که $|\Delta x| < \delta$ باشد که در آن δ رامیتوان از بین $x - x_1$ و $x_2 - x$، آنکه کوچکتر است، انتخاب‌نمود(شکل ۱۲۵).



ش ۱۲۵

وقتی‌که نقطهٔ x بر یکی از دو انتهای فاصلهٔ بستهٔ $[-1, 1]$ منطبق باشد ، بایستی حد یکطرفی این انتها انتخاب شود .

تبصره. پیوستگی‌تابع $y = \arcsin x$ را از نظریهٔ کلی آنالیز ریاضی دربارهٔ پیوستگی تابع معکوس یك تابع یکنوا هم میتوان نتیجه‌گرفت .

از آنچه‌گفته شد نتیجه میشودکه توابع معکوس :

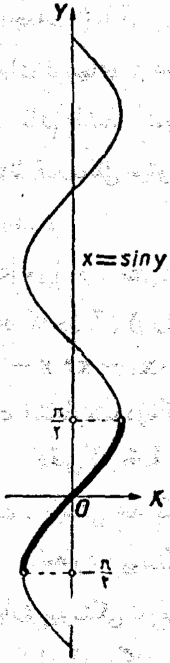
$$y = \arcsin x \; ; \; x = \sin y$$

بطور هم شکل (هومئومورف Homeomorhpe) ✿ در فواصل زیر متناظر ند .

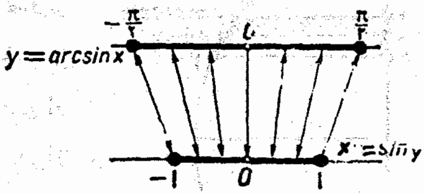
✿) دو تابع را وقتی هم‌شکل‌گویندکه درفواصل متناظر هم‌علامت باشند ودر هرفاصله‌ای که یکی متصل است دیگری‌هم متصل باشد .

$$-1<x<1 \;;\; -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$ (شکل ۱۲۶)

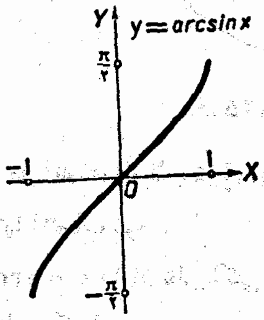
برای رسم منحنی تابع $y=\arcsin x$ ، منحنی تابع $x=\sin y$ را رسم می‌کنیم (یعنی منحنی سینوسی حول محور oy را) (شکل ۱۲۷) قسمتی از این منحنی که عرضهای آنها واقع در فاصلهٔ ($-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$) باشند ، منحنی آرک سینوس را خواهد داد (شکل ۱۲۸) .



ش ۱۲۷



ش ۱۲۶



ش ۱۲۸

آرک‌کسینوس . تابع $y=\cos x$ در فواصل بستهٔ $[2k\pi و (2k+1)\pi]$ (که درآنجا از ۱ تا ۱ — نزولی است) و $[(2k-1)\pi و 2k\pi]$ (که درآنجا از ۱ — تا ۱ + صعودی است) یکنواست (به بند ۱۷ مـراجعه کنید) . این فواصل رویهمرفته حوزه‌ای را که سینوس معین است (یعنی مجموعـهٔ همهٔ اعداد حقیقی) مشخص میکنند . درهریك از این فواصل تابع $y=\cos x$ دارای تابع معکوس است .

تابع $y=\cos x$ را در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi$ درنظر میگیریم . وقتی‌که $-1\leqslant y\leqslant 1$ باشد ، در فاصلهٔ بستهٔ $[0 , \pi]$ قوس‌منفرد $\arccos y$ وجوددارد که‌کسینوس آن‌مساوی x است . بنابراین تابع معکوس $y=\cos x$ در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi$ با رابطهٔ زیر بیان میشود :

$$x=\arccos y; \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

وقتی‌که تابع معکوس کسینوس رادر فاصلهٔ بستهٔ $[0 , \pi]$ بدانیم،میتوان (بر اساس خواص معلوم کسینوس) تابع معکوس آنرا در هر فاصلهٔ دلخواهی که یکنواست پیداکرد. درحقیقت قوس $2k\pi+\arccos y$ ، کسینوسی‌مساوی y دارد ودر فاصلهٔ بستهٔ $[2k\pi , (2k+1)\pi]$ واقع است، بنابراین :

$$x=2k\pi+\arccos y$$

تابع معکوس $y=\cos x$ در فاصلهٔ بستهٔ زیر است :

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$$

قوس $2k\pi-\arccos y$ هم‌کسینوسی مساوی y دارد و در فاصلهٔ بستهٔ $[(2k-1)\pi , 2k\pi]$ واقع است و بنابراین :

$$x=2k\pi-\arccos y$$

تابع معکوس $y=\cos x$ در این فاصلهٔ بسته است . باین ترتیب کافی است (با تبدیل x و y بیکدیگر) تابع‌زیر را مورد مطالعه قرار دهیم :

$$y=\arccos x$$

تابع $y=\arccos x$ دارای خواص زیـــر است (این‌خواص را میتوان کاملا شبیه آرك سینوس بدست آورد :)

۱°. حوزه‌ای‌که تابع $y=\arccos x$ معین است ، عبارتست از فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$

۲° . در فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ تابع $y=\arccos x$ از صفر تا π نزولی است .

۳°. تساوی زیر همیشه بر قرار است :

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

اثبات : قوس $\arccos(-x)$ ، طبق تعریف آرك کسینوس در فاصلهٔ بستهٔ $[0, \pi]$ واقع است . قوس $\pi - \arccos x$ هم در همین فاصلهٔ محدود است : این مطلب از نامساویهای $0 \leqslant \arccos y \leqslant \pi$ نتیجه میشود ؛ هردوقوس دارای یك کسینوس هستند :

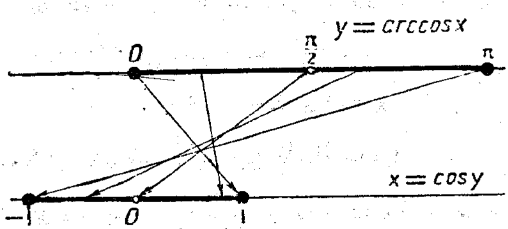
$$\cos[\arccos(-x)] = -x \; ; \; \cos(\pi - \arccos x) =$$
$$= -\cos(\arccos x) = -x \; ;$$

و بنابراین اینقوسها برابرند .

۴°. تابع $y = \arccos x$ در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ — متصل است . ضمناً توابع معکوس :

$$y = \arccos x \text{ و } x = \cos y$$

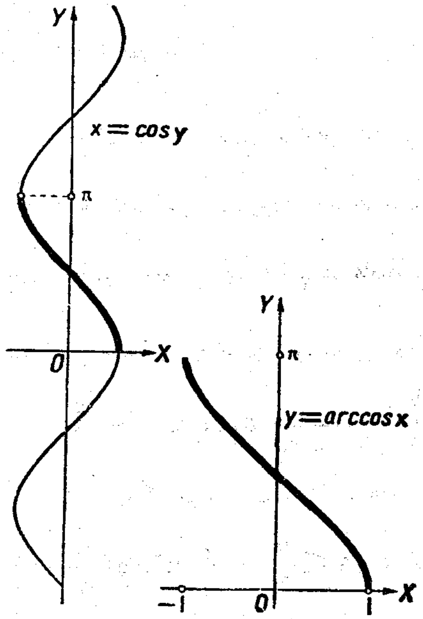
در فواصل متناظر $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 \leqslant y \leqslant \pi$ همشکل هستند (شکل ۱۲۹) .



ش ۱۲۹

برای رسم منحنی نمایش تابع $y = \arccos x$ کافی است قوس سینوسی از معادله $x = \cos y$ رسم کرد (شکل ۱۳۰) .

آرك‌تانژانت. نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k عددی است دلخواه و صحیح) مجموعهٔ اعداد حقیقی را به فواصلی تقسیم می‌کنند که در هریك از آنها ، تانژانت‌از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند . بنابراین در هر یك از فواصل $\left(k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ و } k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ، تابع $y = tg\, x$ دارای تابع معکوس است .



ش ۱۳۰

بازاء هرمقداردلخواه وحقیقی y ، در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ تنها یك‌قوس $\mathrm{arc}tg\,y$ وجود دارد که تانژانت آن‌مساوی y است . بنابراین تابع‌معکوس $y = tg\,x$ در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ بارابطهٔزیر مشخص میشود :

$x = \mathrm{arc}tg\,y$
$(-\infty < y < +\infty)$

بامعلوم‌بودن تابع‌معکوس تانژانت در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، میتوان‌تابع معکوس را در هر فاصله‌ای‌که تانژانت یکنواست ، مشخص‌کرد . در حقیقت قوس $k\pi + \mathrm{arc}tg\,y$ تانژانتی مساوی y دارد و در فاصلهٔ $\left(k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ و } k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ واقع است و بنابراین :

$$x = k\pi + \mathrm{arc}tg\,y$$

تابع معکوس $y = tg\,x$ در فاصلهٔ $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ میباشد.

تابع $y = \mathrm{arc}tg\,x$ دارای خواص زیر است :

۱°. حوزه‌ای که تابع $y = \mathrm{arc}tg\,x$ معین‌است، عبارتست از مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی ، یعنی فاصله $-\infty < x < +\infty$ ، زیرا مجموعهٔ‌مقادیر تانژانت درهمین فاصله است .

۲°: در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ ، تابع $y = \mathrm{arc}tg x$ از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ ترقی میکند.

درحقیقت، اولاتابع معکوس آن $x = tg y$ در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ صعودی و بنابراین تابع $\mathrm{arc}tg x$ هم صعودی خواهد بود، ثانیاً بازاء هر مقدار دلخواه حقیقی m واقع در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\right)$ تابع $\mathrm{arc}tg x$ متناظر با نقطهٔ $x = tg m$ خواهد بود وبالاخره :

$$\text{حد}_{x \to +\infty} \mathrm{arc}tg x = \frac{\pi}{۲} \; ; \; \text{حد}_{x \to -\infty} \mathrm{arc}tg x = -\frac{\pi}{۲}$$

زیرا اگر فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ ، عدد دلخواهی باشد ، برای هر مقدار $x > tg\left(\frac{\pi}{۲} - \varepsilon\right)$ داریم : $\frac{\pi}{۲} - \varepsilon < \mathrm{arc}tg x < \frac{\pi}{۲}$ و بنابراین :

$$\text{حد}_{x \to \infty} \mathrm{arc}tg x = \frac{\pi}{۲}$$

۳° $\mathrm{arc}tg x$ تابعی است فرد :

$$\mathrm{arc}tg(-x) = -\mathrm{arc}tg x$$

(اثبات فرد بودن آرك تانژانت کاملا شبیه اثبات فرد بودن تابع آرك سینوس است) .

۴° : تابع $y = \mathrm{arc}tg x$ در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ تابعی است متصل.

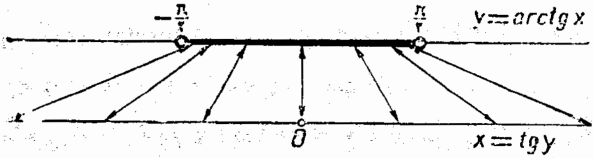
اثبات متصل بودن آرك تانژانت را میتوان شبیه اثبات متصل بودن آرك سینوس انجام داد ؛ همچنین میتوان از نظریهٔکلی آنالیز درمورد اتصال توابع معکوس استفاده کرد .

از آنچه گفته شد نتیجه میشود که دو تابع معکوس :

$$y = \mathrm{arc}tg x \; ; \; x = tg y$$

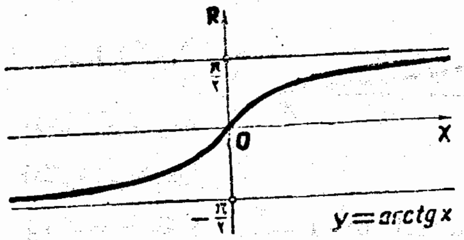
در فواصل متناظر $-\infty<x<+\infty$ و $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$

همشکل‌اند (شکل ۱۳۱) .



ش ۱۳۱

برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=arctg\,x$ ، منحنی $x=tg\,y$ را رسم می‌کنیم وقسمتی را که در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ واقع است انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۳۲) .



ش ۱۳۲

آرك‌کتانژانت . مطالعهٔ خواص اساسی آرك‌کتانژانت را میتوان کاملا شبیه آرك تانژانت انجام داد و بهمین مناسبت ما تنها بذکرخواص اساسی آن اکتفا می‌کنیم .

تابع $y=arccotg\,x$ تابع معکوس $x=cotg\,y$ در فاصلهٔ $0<y<\pi$ است .

تابع $y=k\pi+arccotg\,x$ تابع معکوس $x=cotg\,y$ در فاصلهٔ $k\pi<y<(k+1)\pi$ میباشد .

۱°.حوزه‌ای که در آن تابع $y=arccotg\,x$ معین است ، عبارتست‌از فاصلهٔ $-\infty<x<+\infty$

۲°. در فاصلهٔ $-\infty<x<+\infty$ ، تابع $y=arccotg\,x$ از π تا صفر تنزل میکند و داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} arccotg\,x=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty} arccotg\,x=\pi$$

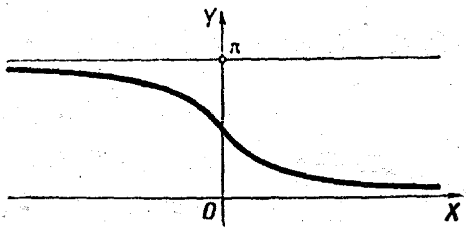
۳°. تساوی زیر برقرار است :

$$\text{arc}\,cotg(-x) = \pi - \text{arc}\,cotg\,x$$

۴°. تابع $y = \text{arc}\,cotg\,x$ در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ متصل است.

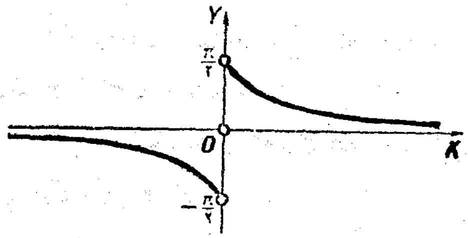
دو تابع معکوس $y = \text{arc}\,cotg\,x$ و $x = cotg\,y$ در فواصل متناظر $-\infty < x < +\infty$ و $0 < y < \pi$ همشکل هستند.

منحنی نمایش تابع $y = \text{arc}\,cotg\,x$ همان منحنی تابع $x = cotg\,y$ در فاصلهٔ $0 < y < \pi$ میباشد (شکل ۳۳) .



ش ۱۳۳

تبصره: در بعضی از کتابهای درسی سابق مقدار $\text{arc}\,cotg\,x$ را در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ انتخاب میکردند ، انگیزهٔ این کار دراین بود که در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ ، کتانژانت میتواند مساوی هرمقدار دلخواهی باشد . ولی این انتخاب بهرحال کار راه شکل‌تر میکند ، زیرا درفاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ نقطه ای وجود داردکه در آنجا کتانژانت منفصل است و اگر مقدار آرک کتانژانت را در این فاصله اختیار کنیم، تابع $\text{arc}\,cotg\,x$ منفصل خواهد بود . منحنی این تابع درشکل ۱۳۴ داده شده است .

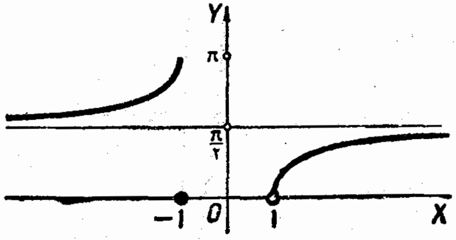


ش ۱۳۴

ما دیگر دربارهٔ توابع $\text{arc sec}\,x$ و $\text{arc}\,cosec\,x$ ، که کمتر مورد استعمال دارند، بحثی نمی‌کنیم ومطالعهٔ خواص آنهارا بعهدهٔ

خواننده میگذاریم. فقط نکتهٔ زیررا یادآوری می کنیم : مقدار آرک سکانت و آرک کسکانت بترتیب در فواصل بستهٔ [۰ و π] و [$-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$] انتخاب‌میشوند.

توابع $\operatorname{arc\,sec}x$ و $\operatorname{arc\,cosec}x$ برای مقادیری از آوند که کوچکتر از واحد نباشند ، معین هستند و بنابراین حوزه‌ای که این توابع در آنجا معین هستند از دو قسمت تشکیل شده است: $-\infty < x \leqslant -1$ و $1 \leqslant x < +\infty$. شکل ۱۳۵ نمایش تابع $y=\operatorname{arc\,sec}x$ وشکل ۱۳۶ نمایش تابع $y=\operatorname{arc\,cosec}x$ میباشد .

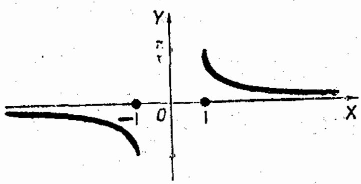


ش ۱۳۵

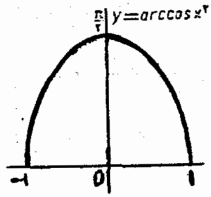
توابعی راکه دراین بندمورد مطالعه قرار دادیم :

$\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg}x$; $\operatorname{arccotg}x$

توابع معکوس مثلثاتی ویا بطورخلاصه توابع قوس میگویند .



ش ۱۳۶



ش ۱۳۷

چند مثال :

۱. مطلوبست بررسی تابع زیر :

$$y=\arccos x^2$$

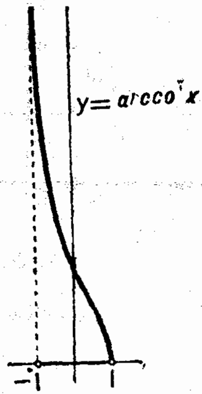
حل : فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ حوزه‌ای را مشخص میکندکه تابع‌معین است ، تابع مفروض زوج است ودر فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ از $\frac{\pi}{2}$ تا صفر نزولی

و در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1-$ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ صعودی است (شکل ۱۳۷).

۲ . تابع زیر را بررسی کنید :

$$y = \arccos^{2} x$$

حل : داریم : $y = u^{2}$ که درآن $u = \arccos x$. در فاصلهٔ بستهٔ $[-1 \text{ و } 1]$ ، آوند u از π تاصفر نزولی و y از π^{2} تا صفر نزولی است (شکل ۱۳۸)



ش ۱۳۸

۳. مطلوبست بررسی تابع :

$$y = \arcsin \frac{1}{x}$$

حل : $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ حوزه‌ای را مشخص میکندکه درآنجا تابع معین است ، از آنجا $|x| \geqslant 1$ ، بنابراین حوزه‌ای که تابع معین است، ازدوقسمت تشکیل شده است : $-\infty < x \leqslant -1$ و $1 \leqslant x < +\infty$

تابع مفروض فرد است ، وقتی که $1 \leqslant x < +\infty$ باشد ، آوند واسطهٔ $\frac{1}{x}$ از ۱ تاصفر نزولی و y از $\frac{\pi}{2}$ تا صفر نزولی است و وقتی که $-\infty < x \leqslant 1$ باشد ، تابع ازصفر تا ۱ – نزولی است (شکل ۱۳۶ را به‌بینید) .

۴. تابع $y = \log \operatorname{arctg} x$ را بررسی کنید (مبنای لگاریتم رابزرگتر از واحد بگیرید) :

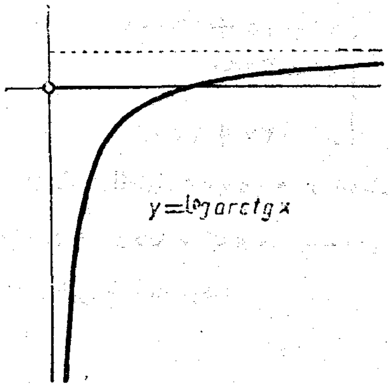
حل : حوزه‌ای که تابع معین است باشرط $\operatorname{arctg} x > 0$ بدست میآید و ازآنجا $0 < x < +\infty$ خواهد بود . در فاصلهٔ $0 < x < +\infty$ ، آرك تانژانت ازصفر تا $\frac{\pi}{2}$ و y از $-\infty$ تا $\log \frac{\pi}{2}$ صعودی است و منحنی محور

طول را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ قطع میکند (شکل ۱۳۹) .

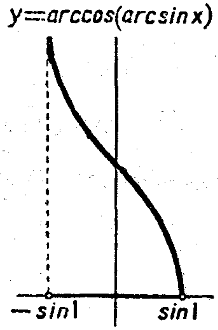
۵. تابع زیر را بررسی کنید :

$$y=\arccos(\arcsin x)$$

حل : از شرط $-1\leqslant \arcsin x\leqslant 1$ حوزه‌ای بدست میآید که در آنجا تابع معین است واز آنجا $-\sin 1\leqslant x\leqslant \sin 1$ ، درفاصلهٔ بستهٔ $[-\sin 1 \text{ و } \sin 1]$ آوند واسطهٔ $\arcsin x$ از -1 تا 1 صعودی و y از π تاصفر نزولی است (شکل ۱۴۰) .



ش ۱۳۹



ش ۱۴۰

۶ . تابع زیر را بررسی کنید : $y=(\arcsin x-1)^2$

حل : تابع در فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ معین است . فرض می‌کنیم $u=\arcsin x-1$. در فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant x<\sin 1$ آوند u از $-\frac{\pi}{2}-1\approx -2{/}57$ تاصفرصعودی و y از $(-2{/}57)^2\approx 6{/}60$ تاصفر نزولی است ودر فاصلهٔ بستهٔ $\sin 1\leqslant x\leqslant 1$ آوند u ازصفر تا $\frac{\pi}{2}-1\approx 0{/}57$ و y ازصفر تا $(0{/}57)^2\approx 0{/}32$ صعودی است (شکل ۱۴۱) .

۷ . تابع $y=\arcsin(x^2-3x+1)$

را بررسی کنید .

حل . حوزه‌ای که تابع معین است، از

شرط زیر بدست میآید :

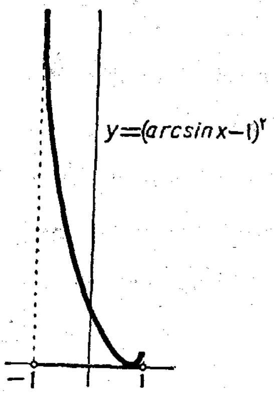
$$|x^2-3x+1|\leqslant 1;$$

و از آنجا دستگاه نامعادلات درجه

دوم زیر بدست میآید :

$$\begin{cases} x^2-3x+1\leqslant 1 \\ x^2-3x+1\geqslant -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-3x\leqslant 0 \\ x^2-3x+2\geqslant 0 \end{cases}$$



ش ۱۴۱

از نامعادلهٔ اول $0\leqslant x\leqslant 3$ و از نامعادلهٔ دوم یکی ازدو جواب $-\infty<x\leqslant 1$ و $2\leqslant x<+\infty$ بدست میآید . درنتیجه جوابهای مشترک دو نامعادله چنین خواهد بود :

$$0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ 2<x\leqslant 3$$

داریم : $y=\arcsin u$ که در آن :

$$u=x^2-3x+1=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$$

نتایجی را که میتوان بدست آورد درجدول زیر مشخص کرده‌ایم :

x	0	$<x<$	1	⋯	2	$<x<$	3
$u=x^2-3x+1$	1	↘	-1	⋯	-1	↗	1
$y=\arcsin u$	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$	⋯	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

منحنی تابع درشکل ۱۴۲ رسم شده است .

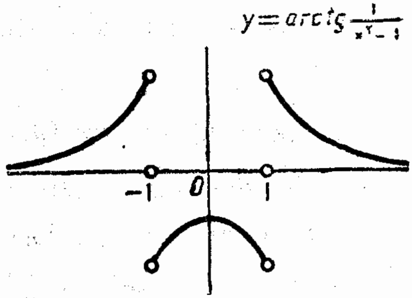
۸ ● مطلوبست بررسی تابع : $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$

حل : تابع در سه فاصلهٔ زیر معین است :

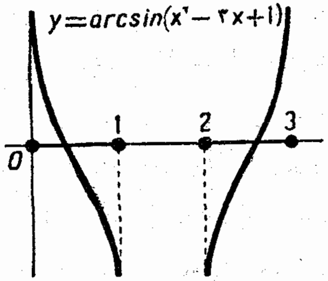
$$-\infty < x < 1 \; ; \; -1 < x < 1 \; ; \; 1 < x < +\infty$$

وبا توجه باینکه تابع زوج است، کافی‌است‌تابع‌را تنها درد؛ فاصلهٔزیر جستجو کنیم :

$$0 \leqslant x < 1 \; ; \; 1 < x < +\infty$$



ش ۱۴۳



ش ۱۴۲

داریم :

x	0	$<x<$	1	$<x<$	∞
$u=\dfrac{1}{x^2-1}$	-1	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	0
$y=\operatorname{arctg} u$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}$ $-\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

منحنی نمایش تابع در شکل ۱۴۳ رسم شده است .

۳۳ . اعمال مثلثاتی روی توابع قوس

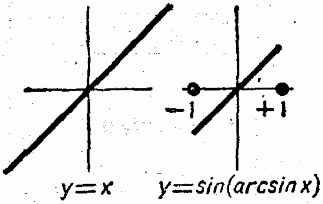
با انجام هرعمل مثلثاتی روی تابع. قوس ، یك عبارت جبری بدست میآید . در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leq x \leq 1$ داریم :

$$\sin(\operatorname{arc\,sin} x) = x \; ; \; \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x \qquad (۱)$$

ردر فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$:

$$tg(\operatorname{arc\,tg} x) = x \; ; \; cotg(\operatorname{arc\,cotg} x) = x \qquad (۲)$$

تساویهای (۱) برای همهٔ مقادیرحقیقی x برقرار نیستند و باین‌ترتیب بازاء $|x| > 1$ عبارت $\operatorname{arc\,sin} x$ و بنابراین $\sin(\operatorname{arc\,sin} x)$ مفهوم‌خود را ازدست میدهد، تساویهای (۱) اتحادهائی هستندکه‌در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leq x \leq 1$ صحیح‌اند . درشکل ۱۴۴ اختلاف بین توابع $y = x$ و $y = \sin(\operatorname{arc\,sin} x)$ بخوبی روشن است . $y = x$ نمایش نیمساز ربع اول وسوم دستگاه‌محورهای مختصات است ، در حالیکه $y = \sin(\operatorname{arc\,sin} x)$ پاره خطی از این نیمساز است . تساویهای (۲) بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x صحیح‌اند .هریك از تساویهای (۱) و(۲) را میتوان اتحادهائی باین مفهوم دانست‌که بازاء مقادیری از x برقرار است‌که هم سمت راست تساوی وهم سمت‌چپ تساوی معین باشد .

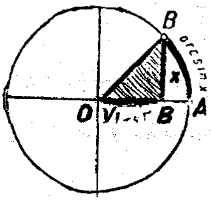


ش ۱۴۴

در زیر تمام حالتهائی راکه میتوان روی توابع قوس ، اعمال مثلثاتی انجام داد ذکر می‌کنیم .

۱ . در رابطهٔ $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ (بیان کسینوس برحسب سینوس) فرض می‌کنیم : $\varphi = \arcsin x$ ، دراینصورت بدست میآوریم :

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2}$$



ش ۱۴۵

علامت جلو رادیکال را باید + گرفت ، زیرا قوس $\varphi = \arcsin x$ روی نیمدایرهٔ بستهٔ راست قرار داد $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ که‌درآنجا کسینوس منفی نیست و بنابراین داریم :

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

تعبیر هندسی (شکل ۱۴۵) . عدد x عبارتست از اندازهٔ خط سینوس BB_1 اززاویهٔ $AOB = \arcsin x$ ، و اندازهٔ پاره‌خط OB_1 مقدار کسینوس این زاویه است : $\cos AOB = OB_1$.

بنابر قضیهٔ فیثاغورث داریم : $OB_1 = \sqrt{1-BB_1^2} = \sqrt{1-x^2}$

و ازآنجا :

$$\cos(AOB) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

۲ . بهمین ترتیب بدست میآید :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$$

با توجه به نامساوی $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ داریم : $\sin(\arccos x) \geqslant 0$

و بنابراین علامت جلو رادیکال را بایستی مثبت اختیار کرد .

تعبیر هندسی این رابطه هم شبیه حالت قبل انجام میگیرد .

۳ . از رابطهٔ $tg\varphi = \frac{1}{cotg\varphi}$ نتیجه میشود :

$$tg(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{cotg(\operatorname{arccotg} x)} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

۴ . داریم :

$$tg(\arcsin x)=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۵ . در رابطهٔ $\sin\varphi=\pm\frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$ (بیان‌سینوس برحسب‌تانژانت)

فرض می‌کنیم : $\varphi=\operatorname{arctg}x$. از آنجاکه در نیمدایـرهٔ راست سینوس و تانژانت هم‌علامت هستند، علامت جلو رادیکال را باید $+$ گرفت . بنابراین:

$$\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

در جدول زیر خلاصهٔ روابطی راکه در نتیجهٔ اعمال ساده روی توابع قوس بدست میآید ، آورده‌ایم . درستی این روابط را میتوان بسادگی وشبیه نمونه‌های قبل باثبات رساند :

$\sin(\arcsin x)=x$	$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x)=x$
$\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\operatorname{arccotg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arccotg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$tg(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$cotg(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$tg(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$cotg(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$tg(\operatorname{arctg}x)=x$	$cotg(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x}$
$tg(\operatorname{arccotg}x)=\frac{1}{x}$	$cotg(\operatorname{arccotg}x)=x$

در زیر اعمال مختلف تبدیل ذکر شده است .

۱ . تبدیل عبارت $\sin(2\arcsin x)$.

با استفاده از رابطهٔ $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ داریم :

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

۲ . بهمین ترتیب صحت اتحادهای زیر هم روشن میشود :

$$\cos(2\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$tg(2\,\mathrm{arctg}\,x) = \frac{2\,tg(\mathrm{arctg}\,x)}{1 - tg^2(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

۳ . با استفاده از قضایای مجموع بدست میاید :

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) +$$
$$+ \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

۴ . بسادگی میتوان اتحادهای زیررا هم اثبات کرد :

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)};$$

$$\sin(\arccos x + \arcsin y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + xy;$$

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2};$$

$$tg(\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,y) = \frac{x+y}{1-xy};$$

$$g(\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arctg}\,y) = \frac{x-y}{1+xy};$$

$$tg(\arcsin x + \arcsin y) = \frac{\sin(\arcsin x + \arcsin y)}{\cos(\arcsin x + \arcsin y)} =$$

$$= \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}$$

۵ . اگر در روابط :

$$\sin 2\varphi = \frac{2\,tg\varphi}{1+tg^2\varphi} \quad \text{و} \quad \cos 2\varphi = \frac{1-tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}$$

فرض کنیم : $\varphi = \mathrm{arctg}\,x$ بدست میاید :

$$\sin(۲\,\mathrm{arctg}\,x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}\ ;\quad \cos(۲\,\mathrm{arctg}\,x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$$

۶ . تبدیل $\cos(\frac{۱}{۲}\arccos x)$.

در رابطهٔ $\cos\frac{\varphi}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱+\cos\varphi}{۲}}$ فرض‌می کنیم: $\varphi=\arccos x$، داریم:

$$\cos(\frac{۱}{۲}\arccos x)=\sqrt{\frac{۱+x}{۲}}$$

علامت جلو رادیکال را از آنجهت مثبت گرفتیم که قوس $\frac{۱}{۲}\arccos x$ در ربع اول واقع است، بنابراین سمت چپ‌تساوی غیر منفی است .

۷ . همچنین اگر در رابطهٔ :

$$\sin\frac{\varphi}{۲}=\pm\left(\frac{\sqrt{۱+\sin\varphi}-\sqrt{۱-\sin\varphi}}{۲}\right)\ (S'_{\frac{\alpha}{۲}})$$

فرض کنیم : $\varphi=\arcsin x$ بدست میاوریم :

$$\sin(\frac{۱}{۲}\arcsin x)=\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{۲}$$

علامت سمت راست تساوی را + گرفتیم ، زیرا بازاء $x>۰$ علامت سمت‌چپ تساوی مثبت وبازاء $x<۰$ ، منفی است .

با همین روش تساوی زیر هم بدست میآید :

$$\cos(\frac{۱}{۲}\arcsin x)=\frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{۲}$$

۸ . میخواهیم روابط تبدیل عبارتهائی بصورت :

$$\cos(n\arccos x)\ \text{و}\ \sin(n\arcsin x)\ \text{و}\ \ldots$$

را، که درآن n عددی است صحیح ، پیداکنیم روابط زیر(به بند ۲۳مراجعه کنید) را در نظر میگیریم :

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \dots \quad (C_{n\alpha})$$

و :

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha +$$
$$+ C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \sin^5\alpha - \dots \quad (S_{n\alpha})$$

اگر در رابطهٔ $(S_{n\alpha})$ فرض کنیم $\alpha = \arcsin x$، با استفاده از تساوی $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ بدست میآوریم :

$$\sin(n \arcsin x) = C_n^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} x - C_n^3 (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} x^3 + \dots$$

بهمین ترتیب اگر در رابطهٔ $(C_{n\alpha})$ فرض کنیم $\alpha = \arccos x$ خواهیم داشت :

$$\cos(n \arccos x) = x^n - C_n^2 (1-x^2) x^{n-2} +$$
$$+ C_n^4 (1-x^2)^2 x^{n-4} - \dots$$

بنابراین تابع $\cos(n \arccos x)$، که در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] معین است ، در همین فاصله بوسیلهٔ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n قابل بیان‌است . این عبارتها را کثیرالجمله‌های چبیشف (ریاضی دان بزرك روس) گویند (بند ۳۸ را به‌بینید) .

۹ . تبدیل $tg(n \operatorname{arctg} x)$. این تابع بازاء مقادیر صحیح n تابعی است گویا ، درحقیقت داریم :

$$tg\, n\alpha = \frac{C_n^1 \sin\alpha \cos^{n-1}\alpha - C_n^3 \sin^3\alpha \cos^{n-3}\alpha + \dots}{\cos^n\alpha - C_n^2 \sin^2\alpha \cos^{n-2}\alpha + \dots} =$$

$$= \frac{C_n^1\, tg\alpha - C_n^3\, tg^3\alpha + \dots}{1 - C_n^2\, tg^2\alpha + C_n^4\, tg^4\alpha - \dots} \quad (T_{n\alpha})$$

که اگر در این رابطه $\alpha = \mathrm{arc}tg\,x$ فرض کنیم ، بدست میآید :

$$tg(n\,\mathrm{arc}tg\,x) = \frac{C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \cdots}{1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \cdots}$$

۳۴. روابط بین توابع قوس

روابط نوع اول . روابط نوع اول به روابطی از توابع قوس گفته میشود که ناشی از روابط بین توابع مثلثاتی قوسهای متمم است .

قضیه . بازاء هرمقدار مفروض x اتحادهای زیر برقرار است :

$$\mathrm{arc}\sin x + \mathrm{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

$$\mathrm{arc}tg\,x + \mathrm{arc}cotg\,x = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

اثبات . درحقیقت قوسهای $\mathrm{arc}\sin x$ و $\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\cos x$ دارای یك سینوس هستند :

$$\sin(\mathrm{arc}\sin x) = x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\cos x\right) = \cos(\mathrm{arc}\cos x) = x$$

هر دو قوس در شرط $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ صدق میکنند، زیرا داریم :

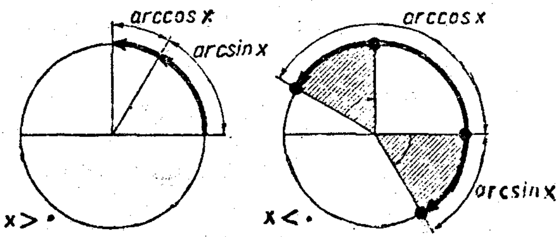
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{arc}\sin x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \mathrm{arc}\cos x \leqslant \pi \end{cases}$$

و از آنجا :
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

و بنابراین این قوسها برابرند :

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$$

بهین ترتیب اتحاد (۲) هم ثابت میشود . درشکل ۱۴۶ تجسم هندسی تساوی (۱) داده شده است .



ش ۱۴۶

روابط نوع دوم . روابط نوع دوم به روابطی بین توابع قوس گوئیم که ناشی از ارتباط بین‌مقادیر توابع مثلثاتی مختلف یك آوند است . بوسیلهٔ روابط نوع دوم میتوان یك تابع قوس را بدیگری (نسبت بهمان آوند) تبدیل کرد .

حالت I . مقدار دو تابع قوس واقع بر یك نیمدایره .

فرض کنید قوسی راکه واقع در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right)$ باشد، موردمطالعه قرار دهیم . این قوس متناظر با مقدار کاملا معینی برای سینوس وکسینوس است و بنابراین میتوان آنرا ، هم بصورت آرك سینوس و هم بصورت آرك تانژانت ، بیان کرد . مثلا :

$$\frac{\pi}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}1\ ;\ -\frac{\pi}{6}=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

و شبیه آن :

$$\frac{3\pi}{4}=\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{arc}\cot g(-1)\,.$$

در زیر روابط کلی تبدیل یك تابع قوس را به تابع دیگر ، که مقادیر آنها برروی یك نیمدایره واقع است (نیمدایرهٔ راست و یا نیمدایرهٔ بالا) ذکر می‌کنیم .

۰۱ بیان $\operatorname{arc}\sin x$ برحسب آرك تانژانت .

فرض کنید $y=\operatorname{arc}\sin x$ ، در اینصورت :

$$tg(\operatorname{arc}\sin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (*)$$

که درآن $|x|<1$ میباشد .

قوس $\operatorname{arc}tg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ، تانژانتی برابر $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ دارد ودرفاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ واقع است . با توجه به رابطهٔ (*) ، قوس $\operatorname{arc}\sin x$ هم در همین فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$ تانژانتی برابر همان مقدار دارد . بنابراین در فاصلهٔ (۱ و ۱ −) داریم :

$$\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}tg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1)$$

۰۲ بیان $\operatorname{arc}tg\,x$ برحسب آرکسینوس .

با توجه به رابطهٔ : $\sin(\operatorname{arc}tg\,x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

در فاصلهٔ (∞ + و ∞ −) خواهیم داشت :

$$\operatorname{arc}tg\,x=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (2)$$

۰۳ بیان آرك کسینوس برحسب آرك کتانژانت.

از تساوی $cotg(\mathbf{arc}\,cos\,\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$ نتیجه میشود:

$$\mathbf{arc}\,cos\,\mathbf{x}=\mathbf{arc}\,cotg\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \quad (3)$$

حالت II . حالا دو تابع قوس را که در فواصل مختلف انتخاب‌میشوند مورد مطالعه قرار میدهیم (مثلا آرک‌سینوس و آرک‌کسینوس ، آرک‌کسینوس و آرک تانژانت وغیره) . اگر مقدار آوند ازیک‌تابع قوس (یعنی مقدار تابع مثلثاتی) مثبت باشد، دراینصورت مقدار متناظر تابع قوس (قوس) در ربع‌اول خواهد بود وهر قوس واقع در ربع اول را میتوان بکمك تابع قوس **دلخواه** بیان کرد ، مثلا :

$$\frac{\pi}{6}=\mathbf{arc}\,sin\frac{1}{2}=\mathbf{arc}\,cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{arc}\,tg\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{arc}\,cotg\sqrt{3}\,.$$

باین ترتیب **هریك از توابع قوس راکه دارای آوند مثبت باشند ، میتوان بوسیلهٔ هرتابع قوس دیگر بیان‌کرد .**

مقدار هر تابع قوس با آوند منفی‌که بیکی از فواصل $-\frac{\pi}{2}$ تاصفر و یا $\frac{\pi}{2}$ تا π متعلق باشد ، نمیتواند بصورت تابع قوسی‌که به فاصله‌ای مخالف با آن تعلق دارد ، تبدیل شود .

مثلا ، قوس $\mathbf{arc}\,cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$ نمیتواند بصورت آرك سینوس بیان شود . دراینحالت :

$$\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\pi-\mathbf{arc}\,sin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

در زیر روابط کلی تبدیل بعضی توابع قوس به توابع قوس دیگر ، که مقدار آنها در نیمدایره‌های **مختلف** انتخاب شده است ذکر می‌کنیم .

۴. بیان آرك سینوس برحسب آرك کسینوس .

فرض کنید $y=\arcsin x$ ، اگر $0\leq x\leq 1$ باشد $0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ خواهد بود

قوس y ، کسینوسی مساوی $\sqrt{1-x^{2}}$ دارد و بنابراین :

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^{2}}$$

این تساوی بازاء $-1\leq x\leq 0$ صادق نیست ، زیرا دراینحالت :

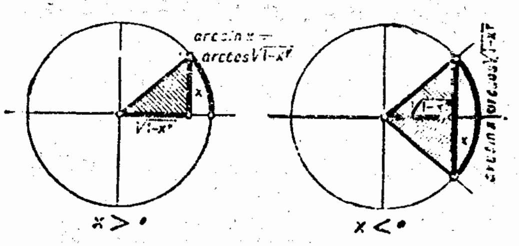
$$-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq 0,$$

و برای تابع $\arccos\sqrt{1-x^{2}}$ داریم :

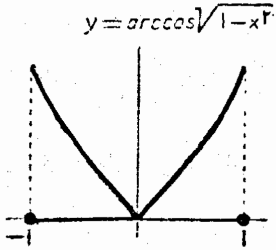
$$0<\arccos\sqrt{1-x^{2}}\leq\frac{\pi}{2},$$

زیرا آوند آرك کسینوس ریشهٔ حسابی $\sqrt{1-x^{2}}$ یعنی عددی غیر منفی است .

این بحث را از روی‌شکل ۱۴۷ هم میتوان نتیجه گرفت .



ش ۱۴۷



ش ۱۴۸

برای مقادیر منفی x داریم $x<0$ و $-x>0$ و بنابراین :

$$\arcsin x=-\arcsin(-x)=-\arccos\sqrt{1-x^{2}}$$

باین ترتیب بطور خلاصه داریم :

$$\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^{2}} & (0\leq x\leq 1)\\ -\arccos\sqrt{1-x^{2}} & (-1\leq x\leq 0)\end{cases}\qquad (۴)$$

در شکل ۱۴۸ منحنی نمایش تغییرات تابع $\arccos\sqrt{1-x^{2}}$ رسم شده‌است

که در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] معین‌است. رابطهٔ (۴)رابطریق زیرهم میتوان نوشت :

$$\arccos\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\arcsin x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\arcsin x & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$$

۰۵ با استدلال مشابهی میتوان‌ثابت‌کرد که وقتی $0\leqslant x\leqslant 1$ باشد،داریم:

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2};$$

و اگر $-1\leqslant x\leqslant 0$ باشد داریم :

$$\arccos x=\pi-\arccos(-x)=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

و باین ترتیب :

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}\qquad(5)$$

۰۶ از رابطهٔ :

$$\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

بازاء $x\geqslant 0$ داریم :

$$\operatorname{arctg} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

و اگر $x<0$ باشد :

$$\operatorname{arctg} x=-\operatorname{arctg}(-x)=-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

و باین ترتیب :

$$\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x\geqslant 0)\\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x\leqslant 0)\end{cases}\qquad(6)$$

۰۷ وقتی که $0<x\leqslant 1$ باشد $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

خواهد بود .

بازاء $-1 \leqslant x < 0$ داریم :

$$\operatorname{arc}\cos x = \pi - \operatorname{arc}\cos(-x) = \pi - \operatorname{arc}tg \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} =$$

$$= \pi + \operatorname{arc}tg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

و باین ترتیب :

$$\operatorname{arc}\cos x = \begin{cases} \operatorname{arc}tg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqslant 1) \\ \pi + \operatorname{arc}tg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (-1 \leqslant x < 0) \end{cases} \qquad (7)$$

با ادامهٔ روش استدلال فوق میتوان صحت‌تساویهای زیر را نتیجه‌گرفت :

۸.

$$\operatorname{arc}tg x = \begin{cases} \operatorname{arc}cotg \frac{1}{x} & (x > 0) \\ \operatorname{arc}cotg \frac{1}{x} - \pi & (x < 0) \end{cases} \qquad (8)$$

وقتی‌که $x > 0$ باشد تساوی (۸) بسادگی بدست میآید و اگر $x < 0$ باشد داریم :

$$\operatorname{arc}tg x = -\operatorname{arc}tg(-x) = -\operatorname{arc}cotg \frac{1}{-x} = -\left(\pi - \operatorname{arc}cotg \frac{1}{x}\right)$$

۹.

$$\operatorname{arc}\sin x = \begin{cases} \operatorname{arc}cotg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqslant 1) \\ \operatorname{arc}cotg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi & (-1 \leqslant x < 0) \end{cases} \qquad (9)$$

۱۰.

$$\operatorname{arc}cotg x = \begin{cases} \operatorname{arc}\sin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x > 0) \\ \pi - \operatorname{arc}\sin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x < 0) \end{cases} \qquad (10)$$

۱۱.

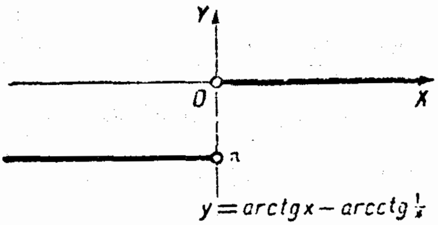
$$\operatorname{arc}cotg x = \begin{cases} \operatorname{arc}tg \frac{1}{x} & (x > 0) \\ \pi + \operatorname{arc}tg \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases} \qquad (11)$$

چند مثال .

۱ تابع $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ را مورد مطالعه قرار دهید.

حل : این تابع بازاء همهٔ مقادیر x باستثنای $x = 0$ معین است (بازاء $x = 0$ جملهٔ دوم مفهوم خود را از دست میدهد) . با استفاده از روابط (۸) ، بدست میآید :

$$y = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -\pi & (x < 0) \end{cases}$$



ش ۱۴۹

در شکل ۱۴۸ نمایش تغییرات این تابع داده شده است .

۲. تابع $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$ را بررسی کنید .

حل : جملهٔ اول بازاء مقادیر $0 \leqslant x \leqslant 1$ معین است ، جملهٔ دوم هم بازاء این مقادیر معین خواهد بود .

جملهٔ اول‌راطبق رابطهٔ (۴)تبدیل می‌کنیم. ازآنجا که $0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1$ میباشد، بدست میآید :

$$\arcsin\sqrt{1-x} = \arccos\sqrt{1-(1-x)} = \arccos\sqrt{x} ،$$

و از آنجا :

$$y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x} = \arccos\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$

در فاصلهٔ بستهٔ $[0 , 1]$.

۳. تابع زیر را بحث کنید :

$$y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

حل : مقادیر جلو علامت‌تابع قوس ازلحاظ قدر مطلق بزرگترازواحد

نیستند و بنابراین تابع بازاء همهٔ مقادیر x معین است . جملهٔ اول را طبق رابطهٔ (۵) تبدیل می‌کنیم :

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}=$$

$$=\arccos\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\arccos|\xi|=\begin{cases}\arccos\xi & (\xi\geqslant 0)\\ \pi-\arccos\xi & (\xi<0)\end{cases}$$

و بنابراین :

$$y=\begin{cases} & (x\geqslant 0)\\ \pi-2\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

۳۵. انجام اعمال معکوس مثلثاتی روی توابع مثلثاتی.

برای تبدیل عبارتهائی از نوع :

$$\arcsin(\sin x);\ \arccos(\cos x)\ ;\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)\ ;\ \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}x)$$

بایستی توجه کرد که آوند x در کدام ربع دایره و مقدار تابع قوس مفروض در چه فاصله‌ای، قرار دارد . مثلا عبارت اول را در نظر میگیریم :

$$y=\arcsin(\sin x)$$

طبق تعریف آرك سینوس ، y عبارتست از قوسی واقع بر نیمدایرهٔ راست (بسته) ، که سینوس آن برابر با $\sin x$ است :

$$\sin y = \sin x \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

تابع $\mathbf{arc}\sin(\sin x)$ در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ معین است ، زیرا بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x ، مقدار آوند واسطهٔ $u = \sin x$ در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant u \leqslant 1$ واقع است . بازاء مقادیر حقیقی و دلخواه x ، مقدار y (در حالت کلی) با مقدار x فرق دارد .

مثلا بازاء $x = \frac{\pi}{6}$ داریم :

$$y = \mathbf{arc}\sin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = x;$$

ولی بازاء $x = \frac{5\pi}{6}$ داریم :

$$y = \mathbf{arc}\sin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \mathbf{arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq x .$$

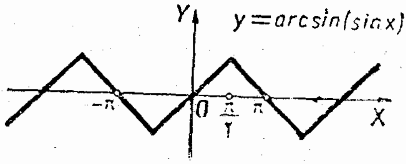
از آنجا که سینوس متناوب است، تابع $\mathbf{arc}\sin(\sin x)$ هم دورهٔ تناوبی مساوی 2π دارد ، بنابراین کافی است آنرا در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{3}\right]$ مورد مطالعه قرار دهیم .

اگر مقدار x در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ واقع باشد، داریم $y = x$ یعنی در این فاصله نمایش تغییرات تابع بر نیمساز ربع اول وسوم منطبق است.

در حالتیکه x در فاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2}\right]$ واقع باشد ، قوس $\pi - x$ در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ واقع خواهد بود وچون داریم $\sin(\pi - x) = \sin x$ خواهیم داشت : $y = \pi - x$. در اینحالت نمایش تغییرات تابع بر خط $y = \pi - x$ واقع است . وقتی که مقدار x در فاصلهٔ بستهٔ $\left[\frac{3\pi}{2} \text{ و } \frac{5\pi}{2}\right]$ واقع

باشد ، با استفاده از تناوب تابع و یا بطورمستقیم بدست میآید :

$$y = x - ۲\pi$$



ش ۱۵۰

و اگر مقدار x در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲} \text{ و } -\frac{۳\pi}{۲}\right]$ باشد:

$$y = -\pi - x$$

همچنین اگر x در فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } -\frac{۵\pi}{۲}\right]$ باشد :

$$y = x + ۲\pi$$

و بطورکلی اگر داشته باشیم : $۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$، داریم:

$$y = x - ۲k\pi$$

و اگر داشته باشیم : $۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$:

$$y = (\pi - x) + ۲k\pi$$

نمایش تغییرات تابع $y = \arcsin(\sin x)$ در شکل ۱۵۰ داده شده‌است که عبارتست از خط شکسته‌ای با بی‌نهایت قطعه خط راست .

حال تابع $y = \arccos(\cos x)$ را مورد مطالعه قرار میدهیم .

طبق تعریف آرك کسینوس داریم :

$$\cos y = \cos x \quad \text{و} \quad ۰ \leqslant y \leqslant \pi$$

تابع بازاء مجموعهٔ اعداد حقیقی معین است ودورهٔ تناوبی برابر با ۲π دارد . اگر مقدار x در فاصلهٔ بستهٔ $[\pi \text{ و } ۰]$ واقع‌باشد، داریم $y = x$ و اگر مقدار x در فاصلهٔ بستهٔ $[۲\pi \text{ و } \pi]$ واقع باشد ، قوس $۲\pi - x$ در فاصلهٔ بستهٔ $[\pi \text{ و } ۰]$واقع خواهدبود وچون‌داریم $\cos(۲\pi - x) = \cos x$ ، خواهیم‌داشت:

$$\arccos(\cos x) = ۲\pi - x$$

و بنابراین در فاصلهٔ بستهٔ [π و ۲π] داریم :

$$y=۲\pi-x$$

وقتی که مقدار x درفاصلهٔ بستهٔ [۲π و ۳π] واقع باشد $y=x-۲\pi$

و وقتی که x در فاصلهٔ بستهٔ [۳π و ۴π] واقع باشد $y=۴\pi-x$ خواهد بود.

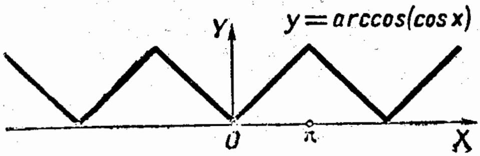
بطور کلی اگر $۲k\pi\leqslant x\leqslant(۲k+۱)\pi$ باشد، داریم :

$$y=x-۲k\pi$$

و اگر $(۲k-۱)\pi< x\leqslant ۲k\pi$ باشد، داریم :

$$y=-x+۲k\pi$$

نمایش تغییرات تابع $y=\arccos(\cos x)$ عبارتست از یك خط شکستهٔ بی‌پایان (شکل ۱۵۱).



ش ۱۵۱

اکنون به تابع $y=\operatorname{arctg}(tg\,x)$ می‌پردازیم :

طبق تعریف آرك تانژانت داریم :

$$tg\,y=tg\,x \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{۲}<y<\frac{\pi}{۲}$$

عبارت $\operatorname{arctg}(tg\,x)$ بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x ، باستثنای $x=\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ ، دارای مفهوم است . بنابراین تابع درمجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر معین است :

$$\ldots\left(-\frac{۳\pi}{۲}\ \text{و}\ -\frac{\pi}{۲}\right)\ \text{و}\ \left(-\frac{\pi}{۲}\ \text{و}\ \frac{\pi}{۲}\right)\ \text{و}\ \left(\frac{\pi}{۲}\ \text{و}\ \frac{۳\pi}{۲}\right)\ \text{و}\ \ldots\ \text{و}$$

$$\left(-\frac{\pi}{۲}+k\pi\ \text{و}\ \frac{\pi}{۲}+k\pi\right)$$

تابع متناوب است و دورهٔ تناوبی مساوی π دارد . داریم :

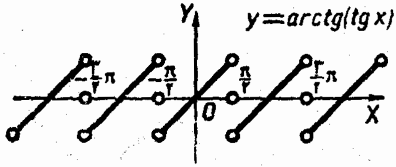
$$y=x \quad ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$$

$$y=x-\pi \quad ; \quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2},$$

$$y=x+\pi \quad ; \quad -\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$$

و بطور کلی :

$$y=x-k\pi \quad ; \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$$



ش ۱۵۲

برای رسم نمایش تغییرات تابع، کافی است پاره خطی از $y=x$ (نیمساز ربع اول وسوم) را در فاصله $(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2})$ رسم کنیم (دو انتهای پاره‌خط جزو نمایش تغییرات نیست) و سپس این نمایش تغییرات را با تناوب مساوی π ادامه دهیم (شکل ۱۵۲) . نمایش تغییرات تابع از بی‌نهایت پاره‌خط موازی ومساوی تشکیل شده است .

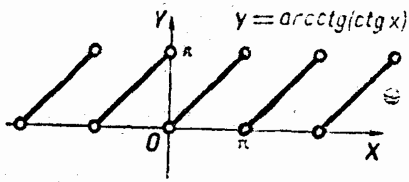
نقاط $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، نقاط انفصال از نوع اول تابع $y=arctg(tgx)$ هستند ، زیرادر این نقاط حدی برای‌تابع وجود ندارد، ولی مقادیر مختلفی برای حد راست وحدچپ تابع وجود دارد . درنقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ حدچپ‌تابع چنین‌است ($x<\frac{\pi}{2}$ فرض می‌کنیم) :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}[arctg(tgx)]=\lim x=\frac{\pi}{2}$$

و حد چپ آن ($x>\frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}[\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)] = \lim(x-\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

در شکل ۱۵۳ نمایش‌تغییرات $y=\mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}\,x)$ رسم شده است ، مطالعهٔ در مورد این تابع را بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده می گذاریم .



ش ۱۵۳

متذکر میشویم که‌مطالعهٔ توابع

$$\mathrm{arccotg}(\mathrm{tg}\,x) \text{ و } \mathrm{arccos}(\sin x).$$

مشکل نیست ، زیرا با استفاده از روابط :

$$\arcsin(\sin x)+\arccos(\sin x)=\frac{\pi}{2},$$

و :

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)+\mathrm{arccotg}(\mathrm{tg}\,x)=\frac{\pi}{2},$$

میتوان مطالعهٔ این توابع را به توابع قبل منجر نمود .

چند مثال

۱. تابع $y=x-\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$ را مورد بحث قرار دهید و نمایش تغییرات آنرا رسم کنید .

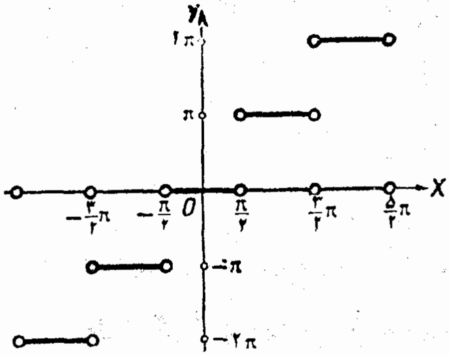
حل : تـابع در مجموعهٔ بی نهایت‌فواصل زیر معین است :

$$\left(\frac{۲k-۱}{۲}\pi , \frac{۲k+۱}{۲}\pi\right)$$

و در این فواصل داریم :

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)=x-k\pi\ ;$$
$$y=k\pi$$

نمایش تغییرات تـابع (پاره‌خطهای منفصل پلکانی)



ش ۱۵۴

در شکل ۱۵۴ رسم شده است .

۲. مطلوبست بحث در تابع $y=x-\arcsin(\sin x)$ و رسم نمایش تغییرات آن .

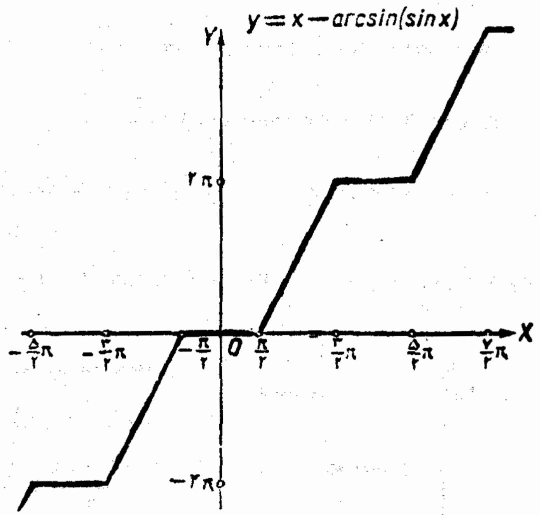
حل : اگر $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ باشد ، داریم :

$$\arcsin(\sin x)=x-2k\pi \quad \text{و} \quad y=2k\pi$$

و اگر $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ باشد ، داریم :

$$\arcsin(\sin x)=(\pi-x)+2k\pi \quad \text{و} \quad y=2x-(2k+1)\pi$$

نمایش تغییرات این تابع درشکل ۱۵۵ داده شده است :



ش ۱۵۵

۳. تابع $y=x\arcsin(\sin x)$ را مورد مطالعه قرار دهید .

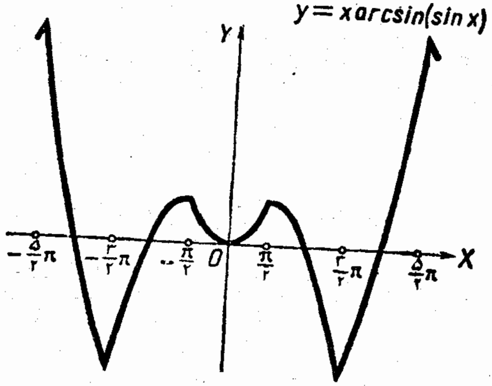
حل : اگر $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ باشد ، داریم :

$$y=x(x-2k\pi);$$

و اگر $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ باشد، داریم :

$$y=x[(2k+1)\pi-x].$$

منحنی نمایش تغییرات تابع که‌از قطعات قوسهای سهمی تشکیل شده‌است در شکل ۱۵۶ داده شده است .



ش ۱۵۶

۳۶ . روابط مجموع

منظور از روابط مجموع ، بیان مجموع یا تفاضل دو (یا چند) تابع قوس برحسب یك تابع قوس است ، فرض کنید مجموع دو تابع قوس داده‌شده باشد ، روی این‌مجموع میتوان اعمال‌مثلثاتی را انجام داد(بند ۳۳ را به‌بینید) و از آنجا میتوان‌تابع قوس مجموع را بدست آورد . ولی درحالتهای‌مختلف ممکن است روابط مختلفی بدست آورد ، بسته به فاصله ای که مجموع‌درآنجا واقع است و فاصله‌ای که برای مقدار تابع قوس مورد نظر انتخاب میشود .

این مطالب بوسیلهٔ مثالهای عددی زیر روشن میشود .

چند مثال

۱. مجموع $\gamma=\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}$ را به آرکسینوس تبدیل کنید.

حل : این مجموع عبارتست از مجموع دو قوس α و β که در آن $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ و $\beta=\arcsin\frac{1}{2}$ میباشد .

دراینحالت $\alpha<\frac{\pi}{4}$ (زیرا $\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ و بنابراین $\arcsin\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}$ است) و همچنین $\beta=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$ است و در نتیجه $\gamma<\frac{\pi}{2}$ میشود.

سینوس قوس γ را محاسبه می‌کنیم ، بدست میآید :

$$\sin\gamma=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$$

و چون مجموع γ در شرط $-\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}$ صدق میکند، خواهیم داشت :

$$\gamma=\arcsin\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$$

۲. قوس γ مربوط به مثال قبل را بصورت آرك تانژانت بنویسید .

حل : داریم :

$$tg\gamma=\frac{tg(\arcsin\frac{1}{2})+tg(\arcsin\frac{1}{3})}{1-tg(\arcsin\frac{1}{2})tg(\arcsin\frac{1}{3})}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1}$$

و ازآنجا :

$$\gamma=\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1}$$

۳. مجموع زیر را به آرك تانژانت تبدیل کنید :

$$\gamma=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2$$

حل : در اینحالت (برخلاف مثال قبل) ، انتهای قوس γ در ربع دوم

واقع است ، زیرا $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ و $\operatorname{arctg}2>\frac{\pi}{4}$ ، داریم:

$$tg\gamma=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

در اینجا نمیتوان نوشت $\gamma=\operatorname{arctg}(-3)$ ، زیرا قوس γ و $\operatorname{arctg}(-3)$ در فواصل مختلفی قرار دارند :

$$\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}(-3)<0$$

در اینحالت باید نوشت :

$$\gamma=\pi+\operatorname{arctg}(-3)=\pi-\operatorname{arctg}3$$

۴. قوس γ مربوس به مثال قبل را بصورت آرك کسینوس بنویسید .

حل : داریم :

$$\cos\gamma=\cos(\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2)=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

هر دو قوس γ و $\operatorname{arccos}(-\frac{1}{\sqrt{10}})$ در نیمدایرهٔ فوقانی قراردارندو دارای یك کسینوس هستند وبنابراین دو قوس برابرند .

$$\gamma=\operatorname{arccos}(-\frac{1}{\sqrt{10}})$$

با توجه باینکه مجموع و تفاضل چند تابع قوس را میتوان به‌کمك توابع قوس دلخواه بیان‌کرد ، روابط متنوعی برای مجموع خواهیم داشت ولی همهٔ این روابط با یکنوع استدلال بدست میآیند . ما بعنوان نمونه بعضی ازروابط مجموع را در اینجا ذکر می‌کنیم، میتوان‌روابط مشابهی‌درحالتهای دیگر با همین شیوه بدست آورد .

روابط مجموع برای توابع قوس باآوندهای مثبت . α و β را دو قوسی فرض‌کنیدکه در فاصلهٔ صفر تا $\frac{\pi}{2}$ (ربع اول) باشند .

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ ;\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

مجموع $\alpha+\beta$ روی نیمدایرهٔ فوقانی واقع خواهد شد : $0<\alpha+\beta<\pi$
بنابراین میتواند بصورت تابع‌قوسی درآید که مقدار آن در همین‌فاصله‌باشد، یعنی بصورت آرك‌کسینوس وآرك‌کتانژانت :

$$\alpha+\beta=\operatorname{arccos}[\cos(\alpha+\beta)]=\operatorname{arccos}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\ ;$$

$$\alpha+\beta=\operatorname{arccotg}[\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)]=\operatorname{arccotg}\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}.$$

تفاضل $\alpha-\beta$ روی نیمدایرهٔ راست خواهد بود : $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

و بنابراین میتواند بصورت آرك سینوس و آرك‌کتانژانت تبدیل شود :

$$\alpha-\beta=\operatorname{arcsin}[\sin(\alpha-\beta)]=\operatorname{arcsin}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta);$$

$$\alpha-\beta=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\alpha-\beta)]=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

از آنجاکه مقدار هر تابع قوس باآوندمثبت در فاصلهٔ ($\frac{\pi}{2}$ و 0) واقع است نتیجه میشود که : **مجموع دوآرك قوس با آوند مثبت میتواند بصورت آرك‌کسینوس ویا آرك‌کتانژانت درآید وتفاضل دوآرك قوس‌با آوندمثبت میتواند بصورت آرك سینوس ویا آرك تانژانت تبدیل شود .**

در اینجا صورت تبدیلات مربوطه ذکر شده است .

۱) تبدیل $\operatorname{arcsin}x+\operatorname{arcsin}y$ به‌صورت آرك‌کسینوس($0<x<1$ و $0<y<1$) داریم :

$$\cos(\operatorname{arcsin}x+\operatorname{arcsin}y)=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy$$

(به بند۳۳ مراجعه‌کنید) و ازآنجا :

$$\operatorname{arcsin}x+\operatorname{arcsin}y=\operatorname{arccos}(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy)$$

۲) تبدیل $\operatorname{arcsin}x-\operatorname{arcsin}y$ ($0<x<1$ و $0<y<1$)

به آرك سینوس :

$$\sin(\arcsin x-\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$$

و از آنجا :

$$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$$

۳) تبدیل $\arccos x-\arccos y$ $(0<x<1$ و $0<y<1)$ به آرك تانژانت . داریم :

$$tg(\arccos x-\arccos y)=\frac{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}{xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}};$$

و از آنجا :

$$\arccos x-\arccos y=\mathrm{arctg}\frac{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}{xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}}$$

بعضی دیگر از این روابط تبدیل در زیر داده شده است :

۴) $\arccos x+\arccos y=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$.

۵) $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\,y=\arccos\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}\right)$

۶) $\arcsin x-\mathrm{arctg}\,y=\arcsin\frac{x-y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$

روابط مجموع توابع قوس با آوند دلخواه.

۱) مجموع $\gamma=\arcsin x+\arcsin y$ را بر حسب آرك سینوس بنویسید .

طبق تعریف آرك سینوس داریم :

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\ ;\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

و از آنجا :

$$-\pi\leqslant\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi$$

برای مقدار γ میتوان سه حالت زیر را در نظر گرفت :

حالت I .
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$$

وقتی که اعداد x و y مختلف العلامه، یا یکی از آنها مساوی صفر باشند، حالت اول را خواهیم داشت . در حقیقت بازاء $0\leqslant x\leqslant 1$ و $-1\leqslant y\leqslant 0$ داریم :

$$0\leqslant \arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\ ;\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin y\leqslant 0$$

و ازآنجا خواهیم داشت : $-\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$

وقتی که $x>0$ و $y>0$ باشد، برای قوس γ یکی از دو دستگاه نامعادلات زیر وجود خواهد داشت :

$$\text{a)}\quad 0<\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}\ ;\qquad \text{b)}\quad \frac{\pi}{2}<\gamma\leqslant\pi$$

در حالت(a) : $\cos\gamma\geqslant 0$ ودر حالت (b) : $\cos\gamma<0$ خواهد بود.

درحقیقت اختلاف روابط (a) و (b) به اختلاف شرایط $\cos\gamma\geqslant 0$ و $\cos<0$ (متناظراً) منجر میشود و بنابراین شرایط اخیر شرایط **لازم و کافی** اختلاف روابط مفروض است . $\cos\gamma$ را محاسبه می کنیم :

$$\cos\gamma=\cos(\arcsin x+\arcsin y)=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy$$

بازاء $x>0$ و $y>0$ ، وجود حالت I بمعنای صادق بودن نامساوی (a) یعنی $\cos\gamma\geqslant 0$ است و بنابراین :

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\geqslant xy$$

از آنجا $(1-x^2)(1-y^2)\geqslant x^2y^2$ وبنابراین $x^2+y^2\leqslant 1$ بدست خواهد آمد .

وجود حالت I برای $x<0$ و $y<0$ بمعنای وجود نامساویهای زیر است:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x+\arcsin y<0\ ;$$

به این ترتیب برای آوندهای مثبت $-x$ و $-y$ حالت I را خواهیم داشت و بنابراین :

$$(-x)^2+(-y)^2\leqslant 1 \Longrightarrow x^2+y^2\leqslant 1$$

حالت **II**. $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$

در این‌حالت، $x>0$ و $y>0$ یعنی نامساویهای (b) را خواهیم‌داشت.

از شرط $\cos\gamma<0$ بدست میآید :

$$x^2+y^2>1$$

حالت **III** . $-\pi\leqslant\gamma<-\frac{\pi}{2}$

این حالت بازاء $x<0$ و $y<0$ صادق است وداریم :

$$-\pi\leqslant \arcsin x+\arcsin y<-\frac{\pi}{2}$$

با تغییر علامت طرفین نامساویها خواهیم داشت :

$$\pi\geqslant \arcsin(-x)+\arcsin(-y)>\frac{\pi}{2}$$

و از آنجا $x^2+y^2<1$ بدست میاید .

از آنچه گفته شد نتیجه میشود که در حالت **I** آوندها هم علامت‌اند (یا $xy>0$) وداریم $x^2+y^2\leqslant 1$.

حالت **II** وقتی وجودخواهد داشت که $x>0$ و $y>0$ و $x^2+y^2>1$ باشد . حالت **III** زمانی است که $x<0$ و $y<0$ و $x^2+y^2>1$ باشد .

قوسهای γ و $\gamma'=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ دارای یك سینوس هستند ، ولی (طبق تعریف آرك سینوس) داریم : $-\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma'\leqslant\frac{\pi}{2}$

بنابراین در حالت **I** : $\gamma=\gamma'$ ؛ در حالت **II** : $\gamma=\pi-\gamma'$ و در حالت **III** : $\gamma=-\pi-\gamma'$

باین ترتیب بطور خلاصه خواهیم داشت :

$$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad xy\leqslant 0 \text{ ، } x^2+y^2\leqslant 1 \\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad x>0 \text{ و } y>0 \text{ و } x^2+y^2>1 \\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad x<0 \text{ و } y<0 \text{ و } x^2+y^2>1\end{cases} \quad (1)$$

مثال .

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}\ ;\ \left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2<1$$

۲) اگر در رابطهٔ (۱) ، x را به $-x$ تبدیل کنیم ، بدست‌میآید :

$$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) \\ \qquad xy\geqslant 0 \text{ یا } x^2+y^2\leqslant 1 \\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) \\ \qquad x>0 \text{ و } y<0 \text{ و } x^2+y^2>1 \\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}) \\ \qquad x<0 \text{ و } y>0 \text{ و } x^2+y^2>1\end{cases} \quad (2)$$

۳) مجموع $\gamma=\arccos x+\arccos y$ را برحسب آرك كسينوس بنویسید .

بنابر نامساویهای اساسی :

$$0\leqslant\arccos x<\pi \text{ و } 0\leqslant\arccos y\leqslant\pi$$

داریم : $0\leqslant\arccos x+\arccos y\leqslant 2\pi$

دو حالت زیر را میتوان در نظر گرفت :

حالت I : $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$ ، وقتی که $0\leqslant\arccos x+\arccos y\leqslant\pi$ باشد ، داریم :

$$\arccos x \leqslant \pi - \arccos y$$

توجه‌می کنیم که هردو قوس $\arccos x$ و $\pi - \arccos y$ در فاصلهٔ بستهٔ $[\pi ,\, 0]$ قرار دارند ودر این فاصله، کسینوس نزولی است . بنابراین :

$$x \geqslant \cos(\pi - \arccos y) = -\cos(\arccos y) = -y ,$$

و بنابراین $x \geqslant -y$ و ازآنجا $x+y \geqslant 0$ می‌شود .

حالت II . $\pi < \gamma \leqslant 2\pi$

وقتی‌که $\pi < \arccos x + \arccos y \leqslant 2\pi$ باشد ، داریم :

$$\pi - \arccos y < \arccos x$$

و از آنجا با استدلالی‌شبیه حالت I بدست میآید $x+y<0$ ، باین ترتیب حالت I باشرط $x+y \geqslant 0$ وحالت II باشرط $x+y<0$ تطبیق‌میکند.

از تساوی :

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$$

نتیجه میشود که قوسهای :

$\gamma = \arccos x + \arccos y$ و $\gamma' = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$

کسینوسهای مساوی دارند .

در حالت I: $\gamma = \gamma'$ ودر حالت II : $\gamma = 2\pi - \gamma'$ میشود وبنابراین:

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}); & x+y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}); & x+y<0 \end{cases} \qquad (3)$$

۴) با تبدیل y به $-y$ و توجه به روابط :

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos y$$

$$\arccos(-xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}) = \pi - \arccos(xy + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$$

بدست میآید :

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & x\geqslant y\\ \arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & x<y\end{cases}\qquad(۴)$$

مثال .

$$\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}=\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)$$

۵) مجموع $\gamma=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ را بـر حسب آرك ثانژانت بنویسید .

از نامساویهای $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}$ نتیجه میشود :

$$-\pi<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi$$

بقیهٔ استدلال کاملا شبیه استدلال مربوط به مجموع آرك سینوس انجـام میگیرد .

حالتهای زیر پیش میآید :

حالت I : $-\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$

حالت II : $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$

حالت III : $-\pi<\gamma<-\frac{\pi}{2}$

درحالتI، قوس γ روی‌نیمدایرهٔ راست (بسته)ودر حالتهای II وIII روی نیمدایرهٔ چپ (باز) خواهد بود. درحالتIداریم $\cos\gamma\geqslant 0$ ودرحالتهای II و III : $\cos\gamma<0$، باتوجه باینکه داریم:

$$\cos\gamma = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$$

در حالت I : $xy \leqslant 1$ ودرحالتهای II و III : $xy > 1$ خواهدشد.

نتایج :

a) اگر اعداد x و y مختلف‌العلامه ویا یکی از آنها مساوی‌صفر باشد حالت اول را خواهیم داشت.

b) حالت دوم وقتی خواهد بود که $x > 0$ و $y > 0$ باشد.

c) حالت سوم باشرایط $x < 0$ و $y < 0$ خواهد بود.

d) تساوی $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ وقتی پیش میآیدکه $xy = 1$ (و در اینصورت $\cos\gamma = 0$) باشد. اگر $xy \neq 1$ باشد، $\gamma \neq \pm\frac{\pi}{2}$ میشود. قوس:

$$\gamma' = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$$

در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ قرار میگیرد و داریم: $tg\gamma = tg\gamma'$. بنابراین

درحالت I : $\gamma = \gamma'$، در حالت II : $\gamma = \pi + \gamma'$ و درحالت III : $\gamma = -\pi + \gamma'$ میشود.

از آنچه گفته شدرابطهٔ زیر بدست میآید:

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ ; & (xy < 1) \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ ; & (x > 0 \text{ و } xy > 1) \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+x}{1-xy}\ ; & (x < 0 \text{ و } xy > 1) \end{cases} \quad (5)$$

وقتی‌که $xy = 1$ باشد، عبارت $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ دارای مفهوم نیست.

در اینحالت قوس γ دارای تانژانت نیست و نمیتواند بصورت آرك تانژانت

نوشته شود . مثلا :

$$\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\pi+\operatorname{arctg}(-7)=\pi-\operatorname{arctg}7$$

دراینحالت داریم : $3\times\frac{1}{2}>1$

۶) با تبدیل y به $-y$ بدست میآید :

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}; & (xy>-1)\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}; & (x>0 \text{ و } xy<-1)\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}; & (x<0 \text{ و } xy<-1)\end{cases}\qquad(6)$$

اگر در روابطی که بدست آوردهایم $x=y$ فرض کنیم ، روابط زیررا بدست خواهیم آورد :

$$2\arcsin x=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & (|x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}})\\ \pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & (\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant1\\ -\pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & (-1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}})\end{cases}\qquad(7)$$

$$2\arccos x=\begin{cases}\arccos(2x^2-1); & (0\leqslant x\leqslant1)\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1); & (-1\leqslant x<0)\end{cases}\qquad(8)$$

$$2\operatorname{arctg}x=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}; & (x<1)\\ \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}+\pi; & (x>1)\\ \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}-\pi; & (x<-1)\end{cases}\qquad(9)$$

با استفاده از روشی که برای مثالهای قبل بکار بردهایم ، میتوان روابط زیر را هم بدست آورد :

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}\sin\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x=\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{1+x}{2}}; \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin x=\begin{cases}\operatorname{arc}\cos\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\operatorname{arc}\cos\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases} \qquad (12)$$

روابط مربوط به مجموع توابع قوس بآنچه در اینجا گفتیم محدود نمیشود . در اینکه توابع قوس همنام باشند اجباری نیست ومیتوان مثلامجموع $\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}tg\, x$ را به‌هرتابع قوس دلخواه دیگری تبدیل کرد، همچنین میتوان روابط تبدیل مجموع چند تابع قوس را مورد مطالعه قرار داد . در همهٔ این‌موارد میتوان شبیه حالتهائی که ذکر کردمایم عمل کرد .

۳۷ . نمونه‌هائی از تبدیل مجموع توابع قوس

برای تبدیل مجموع توابع قوس ، در موارد مشخص عددی ، بایستی حتی‌الامکان از بکار بردن روابط کلی پرهیز کرد ، اصولا احتیاجی نیست که این روابط رادر خاطر داشته باشیم . محاسبهٔ توابع مثلثاتی مربوط به‌توابع قوس ومجموع آنها را میتوان‌بر اساس قضایای مجموع و روابط اصلی‌توابع مثلثاتی انجام‌داد . در بسیاری از مواردمفروض عددی میتوان بلافاصله‌فهمید که مجموع توابع قوس درجه ربعی از دایره قرار گرفته است .

چندمثال .

در تمرینات از ۱ تا ۵ نمونه‌هائی از تبدیل مجموع و تفاضل توابع قوس در موارد مشخص عددی ذکر شده است .

۱. ثابت کنید :

$$\operatorname{arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)^2$$

حل : داریم :

$$\operatorname{arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \text{ و } \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4};$$

زیرا $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ و $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ است . بنابراین مجموع قوسهای مورد نظر در ربع اول‌واقع خواهد بود. از سمت‌چپ تساوی تانژانت میگیریم ، بدست میآید :

$$tg\left(\operatorname{arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$$

۲. ثابت کنید :

$$\operatorname{arccos}\frac{1}{2}+\operatorname{arccos}\frac{1}{7}=\operatorname{arccos}\left(-\frac{11}{14}\right)$$

حل : سمت چپ تساوی قوسی است واقع‌بر نیمدایرهٔ فوقانی، کسینوس آنرا محاسبه می‌کنیم :

$$\cos\left(\operatorname{arccos}\frac{1}{2}+\operatorname{arccos}\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}-\sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{49}}=$$

$$=\frac{1}{14}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{48}}{7}=-\frac{11}{14}$$

عبارت سمت راست تساوی هم‌بر نیمدایرهٔ فوقانی قرار دارد وکسینوس آن مساوی $-\frac{11}{14}$ است و بنابراین قوسها برابرند .

۳. ثابت کنید :

$$۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵}+\operatorname{arctg}\frac{۱}{٤}=\operatorname{arctg}\frac{۳۲}{٤۳}$$

حل : چون $۱>\frac{۱}{۵}$ است $\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵}<\frac{\pi}{٤}$ میشود و بنابراین $۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵}$ در ربع اول قرار میگیرد، در نتیجه سمت چپ تساوی بر نیمدایرهٔ فوقانی واقع است . داریم :

$$tg(۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵})=\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\frac{۵}{۱۲}$$

تانژانت سمت چپ تساوی رابطهٔ فرض را محاسبه می‌کنیم :

$$tg(۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۵}+\operatorname{arctg}\frac{۱}{٤})=\frac{\frac{۵}{۱۲}+\frac{۱}{٤}}{۱-\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱}{٤}}=\frac{۳۲}{۴۳}$$

چون تانژانت سمت چپ تساوی مثبت است ، بنابراین بر ربع اول دایره قرار دارد . قوسهای سمت چپ وسمت راست تساوی هر دو برربع اول قرارگرفته و تانژانتهای مساوی دارند و بنابراین باهم برابرند .

۴. ثابت کنید :

$$\operatorname{arccos}\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\operatorname{arccos}\frac{\sqrt{٦}+۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\pi}{۶}$$

حل : قسمت سمت چپ تساوی بر نیمدایرهٔ راست قرار دارد ، سینوس آنرا محاسبه می‌کنیم :

$$\sin\left(\operatorname{arccos}\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\operatorname{arccos}\frac{\sqrt{٦}+۱}{۲\sqrt{۳}}\right)=$$

$$=\sqrt{۱-\frac{۲}{۳}}\times\frac{\sqrt{٦}+۱}{۲\sqrt{۳}}-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۱-\left(\frac{\sqrt{٦}+۱}{۲\sqrt{۳}}\right)^۲}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}+1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\times$$
$$\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{1}{2}$$

و بنابراین سمت چپ تساوی برابر با $\frac{\pi}{6}$ است .

۵. ثابت کنید :

$$\mathrm{arc}tg\frac{1}{3}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{5}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{7}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

حل : هر یك از قوسهای واقع درسمت‌چپ تساوی کوچکتر از $\frac{\pi}{4}$ است‌و بنابراین سمت‌چپ تساوی بر نیمدایرهٔ فوقانی واقع است . تانژانت سمت‌چپ را محاسبه می‌کنیم :

$$tg(\mathrm{arc}tg\frac{1}{3}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{5})=\frac{4}{7};$$

$$tg\left[(\mathrm{arc}tg\frac{1}{3}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{5})+\mathrm{arc}tg\frac{1}{7}\right]=\frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{49}}=\frac{7}{9};$$

$$tg\left[(\mathrm{arc}tg\frac{1}{3}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{5}+\mathrm{arc}tg\frac{1}{7})+\mathrm{arc}tg\frac{1}{8}\right]=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}}=1$$

و تنها قوسی که در فاصلهٔ (۰ و π) ، تانژانتی مساوی واحد دارد $\frac{\pi}{4}$است.

تبدیل مستقیم‌مجموع توابع قوس (بدون استفاده از روابط) حتی در بسیاری از مواردی‌که با آوندهای حرفی سر وکار داریم نیز میتوانند انجام گیرد .

۶. مجموع‌زیر را محاسبه کنید :

$$y=\mathrm{arc}tg\,x+\mathrm{arc}tg\frac{1-x}{1+x}$$

حل : داریم :

$$tg\,y=\frac{x+\frac{۱-x}{۱+x}}{۱-x\frac{۱-x}{۱+x}}=۱$$

چون $-\pi<y<\pi$ ، در اینصورت یا $y=\frac{\pi}{٤}$ ویا $y=-\frac{۳\pi}{٤}$.

تساوی $y=-\frac{۳\pi}{٤}$ تنها وقتی صحیح است که هر دو مقداری که جلو آرك تانژانت قرارگرفته‌اند ، منفی باشند :

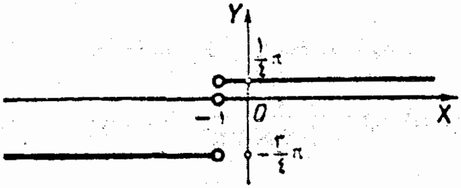
$$x<۰ \text{ و } \frac{۱-x}{۱+x}<۰$$

و این دستگاه نامعادلات وقتی برقرار است که $x<-۱$ باشد .

باین ترتیب داریم :

$$y=\begin{cases}\frac{\pi}{۲} & (x>-۱)\\ -\frac{۳\pi}{٤} & (x<-۱)\end{cases}$$

در شکل ۱۵۷ نمایش تغییرات این تابع رسم‌شده است .



ش ۱۵۷

۷. صحت اتحاد زیر را ثابت‌کنید :

$$۲\,arctg\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}=arccos\,x$$

حل : حوزه ای‌که درآن تابع معین است از شرط $\frac{۱-x}{۱+x}\geqslant۰$ بدست میآید ، از آنجا :

یا : ۱) $\begin{cases}۱-x\geqslant۰\\ ۱+x>۰\end{cases}$

یا : ۲)
$$\begin{cases} ۱-x\leqslant ۰ \\ ۱+x< ۰ \end{cases}$$

دستگاه اول نامعادلات ریشهٔ مشترک $-۱<x\leqslant ۱$ را دارد ودستگاه دوم متناقض‌است. سمت راست‌تساوی هم‌درفاصلهٔ بستهٔ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ معین‌است. بنابراین اتحاد مربوطه‌باید درفاصلهٔ $-۱<x\leqslant ۱$ مورد مطالعه قرارگیرد. هردو قسمت سمت راست وسمت‌چپ در فاصلهٔ بستهٔ [۰ و π] قرار دارند. برای اثبات تساوی‌کافی است کسینوس هردو طرف را حساب‌کنیم :

$$\cos\left(۲\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}\right)=۲\cos^{۲}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}\right)-۱=$$

$$=\frac{۲}{۱+\frac{۱-x}{۱+x}}-۱=x$$

و ازآنجا صحت اتحاد تایید میشود .

تبصره: اتحاد را میتوان باکمک‌رابطهٔ زیر هم اثبات‌کرد :

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}};\ \alpha=\arccos x$$

۸. مجموع زیر را محاسبه‌کنید :

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{۱+۱\times ۲x^{۲}}+\operatorname{arctg}\frac{x}{۱+۲\times ۳x^{۲}}+\dots+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{x}{۱+n(n+۱)x^{۲}}=\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{۱+k(k+۱)x^{۲}}$$

حل : تفاضل زیر را درنظر میگیریم :

$$\gamma=\operatorname{arctg}(k+۱)x-\operatorname{arctg}kx$$

(k عددی است صحیح) ، این تفاضل در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد .

باین ترتیب بازاء $x\geqslant ۰$ داریم :

$$0 \leqslant \operatorname{arctg} kx \leqslant \operatorname{arctg}(k+1)x < \frac{\pi}{2}$$

و $0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$ ، بهمین ترتیب بازاء $x \leqslant 0$ ثابت میشود که $-\frac{\pi}{2} < \gamma \leqslant 0$ ، بنابراین میتوان γ را بصورت آرك تانژانت نوشت :

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{(k+1)x-kx}{1+(k+1)kx^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$$

بترتیب $k=1$ و 2 و ... و n فرض می‌کنیم :

$$\operatorname{arctg}2x - \operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+1\times 2x^2};$$

$$\operatorname{arctg}3x - \operatorname{arctg}2x = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+2\times 3x^2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg}nx = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}$$

که پس از جمع کردن خواهیم داشت :

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2} = \operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg}x =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{nx}{1+(n+1)x^2}$$

در حالت خاص $x=1$ داریم :

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}$$

۹۰. مجموع زیر را محاسبه کنید :

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1\times 2^2} + \dots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$$

حل : هریك از جملات از $\frac{\pi}{4}$ کوچکتر است . مجموعهای زیر را

تشکیل میدهیم :

$$S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\times 2^2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{4}$$

$$S_3=S_2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\times 3^2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\times 3^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2\times 3^2}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2\times 3^2}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}<\frac{\pi}{4}$$

اکنون از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم . فرض می‌کنیم که بازاء k داشته باشیم :

$$S_k=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1};$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$S_{k+1}=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}}{1-\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{2(k+1)^2}}=\operatorname{arctg}\frac{k+1}{k+2}$$

بنابراین‌رابطهٔ : $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ برای‌هر مقداری ازعددصحیح n درست است .

در تمرینات ۱۰ تا ۱۳ جستجوی توابعی مطرح شده است که شامل اعمال معکوس مثلثاتی باشند.

۱۰ . تابع زیر را بحث کنید :

$$y=\arccos x+\arccos\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$$

حل : جملهٔ دوم را تبدیل می‌کنیم ، داریم :

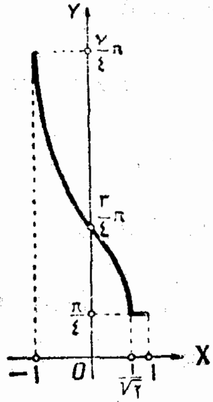
$$\arccos x-\arccos\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\arccos x-\frac{\pi}{۴}=$$

$$=\begin{cases}-\arccos\dfrac{x+\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۲}} ; & x\geqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}},\\ \arccos\dfrac{x+\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۲}} ; & x\leqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}\end{cases}$$

این تبدیل را هم میتوان مستقیماً انجام داد (متذکر میشویم که بازاء $x>\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ قوس $\arccos x-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ به ربع چهارم ختم شده است و بازاء $x<\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ به ربع‌اول) و هم میتوان ازرابطهٔ (۴) (به بند قبل مراجعه کنید) استفاده کرد . بنابراین :

$$\arccos\frac{x+\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۲}}=\begin{cases}-\arccos x+\dfrac{\pi}{۴} ; & x\geqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}},\\ \arccos x-\dfrac{\pi}{۴} ; & x\leqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}},\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}۲\arccos x-\dfrac{\pi}{۴} ; & x\leqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}},\\ \dfrac{\pi}{۴} ; & x\geqslant\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}\end{cases}$$



ش ۱۵۸

منحنی نمایش این تابع را رسم می‌کنیم :

تابع در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] معین است . در فاصلهٔ بستهٔ $[\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $۱-]$ تابع :

$$y=۲\arccos x-\frac{\pi}{۴}$$

از $\frac{۷}{۴}\pi$ تا $\frac{\pi}{۴}$ نزولی است و در فاصلهٔ بستهٔ $[۱$ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}}]$ تابع مقدار ثابتی مساوی $\frac{\pi}{۴}$ اختیار میکند (شکل ۱۵۸) .

۱۱ . تابع زیر را جستجو کنید :

$$y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

حل : تابع با شرط زیر معین است :

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \quad \text{یا} \quad 2|x| < (1+x^2)$$

نامساوی اخیر بازاء همهٔ مقادیر x صحیح است و بنابراین تـابع در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ معین است .

از رابطهٔ زیر استفاده‌می کنیم (صفحهٔ ۲۸۰) :

$$\sin(2\operatorname{arctg}x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

دو قوس : $2\operatorname{arctg}x$ و $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ را درنظر میگیریم که‌دارای يك سینوس هستند. برای قوس $2\operatorname{arctg}x$ نامساوی $-\pi < 2\operatorname{arctg}x < \pi$ بر قرار است و برای قوس دوم داریم :

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\frac{2x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}$$

وقتی‌که $-1 \leqslant x \leqslant 1$ باشد ، در اینصورت $-\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{arctg}x \leqslant \frac{\pi}{4}$ خواهد بود . بنابراین :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\operatorname{arctg}x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ و } 2\operatorname{arctg}x = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

وقتی‌که $x < -1$ باشد ، داریم : $-\pi < 2\operatorname{arctg}x < -\frac{\pi}{2}$

و بنابراین :

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2\operatorname{arctg}x$$

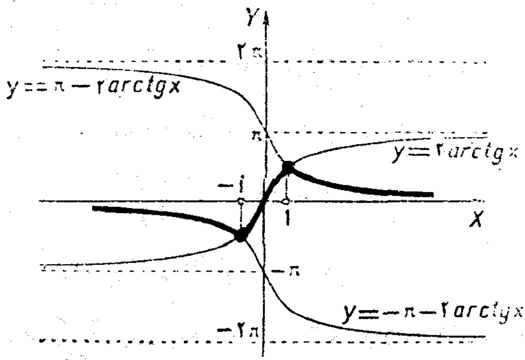
و وقتی‌که $x > 1$ باشد ، داریم : $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2\operatorname{arctg}x$

باین ترتیب بدست میآید :

$$y=\begin{cases}-\pi-۲\operatorname{arctg}x\ ;\ x<-۱\\ ۲\operatorname{arctg}x\ ;\ -۱\leqslant x\leqslant ۱\\ \pi-۲\operatorname{arctg}x\ ;\ x>۱\end{cases}$$

از آنجا داریم :

x	$-\infty$	$<x<$	-۱	$<x<$	۱	$<x<$	$+\infty$
y	۰	↘	$-\frac{\pi}{۲}$	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰



ش ۱۵۹

نمایش تغییرات این تابع در شکل ۱۵۹ داده شده است .

تبصره: وجود نقاط مشروط $x=\pm ۱$ را میتوان با روش محاسبات دیفرانسیلی نشان داد . داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲}{\sqrt{۱-\frac{٤x^۲}{(۱+x^۲)^۲}}}\times\frac{(۱+x^۲)-۲x^۲}{(۱+x^۲)^۲}=$$

$$=\frac{۲(۱-x^۲)}{|۱-x^۲|(۱+x^۲)};$$

$$(x\neq\pm ۱)$$

مشتق راست در نقطهٔ ۱ برابر $f'_+(1) = -1$ و مشتق چپ برابر $f'_-(1) = 1$ میباشد ، بنابراین $x = 1$ نقطه‌ای **مشروط** است .

۱۴ • تابع‌زیررا جستجو کنید.

$$y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

حل : چون بازاء همهٔ مقادیر x داریم :

$$|1-x^2| \leq 1+x^2$$

بنابراین تابع‌در فاصلهٔ $-\infty < x < +\infty$ معین است .

از رابطهٔ زیر (صفحهٔ ۲۸۰) استفاده می‌کنیم :

$$\cos(2\,\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

دو قوس زیر راکه دارای کسینوسهای مساوی هستند در نظر میگیریم :

$$2\,\mathrm{arctg}\,x \text{ و } \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2};$$

بنابه تعریف تابع قوس داریم :

$$-\pi < 2\,\mathrm{arctg}\,x < \pi \text{ و } 0 \leq \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq \pi$$

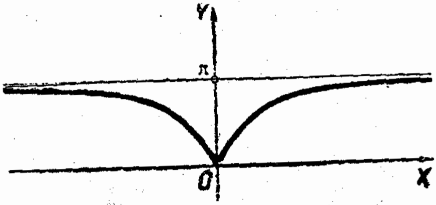
تابع زوج است ، بنابراین :

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,x\,; & x > 0 \\ -2\,\mathrm{arctg}\,x\,; & x < 0 \end{cases}$$

از آنجا بدست میآید :

x	$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$	$+\infty$
y	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

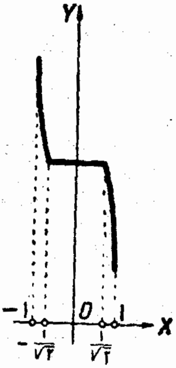
منحنی نمایش تـابع در شکل ۱۶۰ رسم شده است . (مبداء مختصات نقطهٔ مشروط است) .



ش ۱۶۰

۱۳ . تابع زیر را بحث کنید :

$$y=\arcsin x+3\arccos x+ +\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$



ش ۱۶۱

حل : با توجه به رابطهٔ (۷) (بند ۳۶ صفحهٔ ۳۰۸) داریم :

$$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})= =\begin{cases} 2\arcsin x\ ; & |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \\ \pi-2\arcsin x\ ; & \frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\ ; \\ -\pi-2\arcsin x\ ; & -1<x<\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

با توجه باینکه $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ است ، بدست میآید :

$$y=\begin{cases} \frac{3\pi}{2}; & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \frac{\pi}{2}+4\arccos x\ ; & \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1\ ; \\ -\frac{3\pi}{2}+4\arccos x\ ; & -1<x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

نمایش تغییرات تابع درشکل ۱۶۱ رسم شده است .

۳۸ . کثیرالجمله‌های چبیشف

دربند ۳۳دیدیم ، بازاء هرمقدار صحیح n ، تابع $cos(n\,arccos\,x)$ که درفاصلهٔ بستهٔ [۱و۱ —] معین‌است، درهمین‌فاصله‌بر کثیرالجمله‌ای‌ازدرجهٔ n منطبق است. این کثیرالجمله‌ها بنام‌ریاضی‌دان‌بزرگ روس: **کثیرالجمله های چبیشف** نامیده میشوند و با علامت $T_n(x)$ نشان داده میشوند . باین‌ترتیب طبق‌تعریف داریم :

$$T_n(x)=x^n-C_n^2x^{n-2}(1-x^2)+C_n^4x^{n-4}(1-x^2)^2-\dots$$

قضیه. کثیرالجمله های جبیشف $[T_n(x)]$ در رابطهٔ برگشتی زیـر صدق میکنند :

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad (1)$$

اثبات : اگر در رابطهٔ :

$$cos(n+1)\varphi=2cos\,n\varphi\,cos\,\varphi-cos(n-1)\varphi$$

فرض کنیم : $\varphi=arccos\,x$ ، بدست میآید :

$$cos[(n+1)arccos\,x]=2cos[n\,arccos\,x]cos(arccos\,x)-$$
$$-cos[(n-1)arccos\,x] ،$$

بنابراین باید صحت اتحاد (۱) را در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] اثبات کرد و درجبر هم ثابت شده است که سمت راست و سمت چپ (۱) بازاء همهٔ مقادیر $-1\leqslant x\leqslant 1$ برابرند .

با استفاده از رابطهٔ برگشتی (۱) ، میتوان متوالیاً کثیرالجمله‌های جبیشف را محاسبه‌کرد . دوکثیرالجملهٔ اول رامستقیماً بدست میآوریم :

$$T_0(x)=\cos(0\,\arccos x)=1\ ;\ T_1(x)=\cos(\arccos x)=x\ .$$

و برای کثیرالجمله‌های بعدی از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم :

$$T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)=2x^2-1\ ;$$

$$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=4x^3-3x\ ;$$

$$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=8x^4-8x^2+1;\ldots$$

قضیه . کثیرالجملهٔ $T_n(x)$ دارای n ریشهٔ حقیقی و متمایز است که همهٔ آنها در فاصلهٔ (۱ و ۱—) قرار دارند.

اثبات : از رابطهٔ $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ نتیجه میشود که وقتی $T_n(x)=0$ است که داشته باشیم :

$$n\arccos x=\frac{2k-1}{2}\pi \Longrightarrow x=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

که اگر n و... و ۳ و ۲ و ۱ $=k$ فرض کنیم ، n جواب مختلف x_1 و x_2 و ... و x_n را بدست میآوریم:

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

در حقیقت اگر $1\leqslant k<l\leqslant n$ باشد ، $0<\frac{2k-1}{2n}\pi<\frac{2l-1}{2n}\pi<n$ خواهدبود و بنابراین $x_k<x_l$ میشود . بازاء سایر مقادیر k ، ریشهٔ جدیدی برای x_n بدست نمیآید ، زیرا کثیرالجملهٔ $T_n(x)$ نمیتواند بیش از n ریشهٔ متمایز حقیقی داشته باشد . این مطلب را از رابطهٔ عمومی x_k هم میتوان نتیجه گرفت :

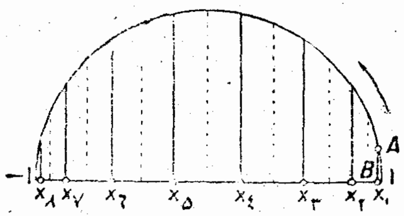
$$x_{n+p}=\cos\frac{(2n+2p-1)\pi}{2n}=\cos\left(n+\frac{(2p-1)\pi}{2n}\right)=$$

$$=\cos\left(n-\frac{(2p-1)\pi}{2n}\right)=\cos\frac{2(n-p)+1}{2n}\pi=x_{n-p+1}$$

باین ترتیب مثلاخواهیم داشت :

$$x_{n+1}=x_n\ ;\ x_{n+2}=x_{n-1}\ ;\ x_{n+3}=x_{n-2};\ldots$$

اعداد x_1 و x_2 و ... و x_n **ریشه‌های ساده** هستند ، زیرا باهم اختلاف دارند .



ش ۱۶۲

برای رسم ریشه های T_n میتوان بطریق زیر عمل نمود: نیمدایرهٔ بشعاع واحد را به $2n$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ، نقاط تقسیم را در جهتی که روی شکل ۱۶۲ نشان داده شده است شماره گذاری می‌کنیم و نقطهٔ مجاور نقطهٔ B (بطول واحد) را A مینامیم . سپس نقاط تقسیم را ، باشروع از نقطهٔ ۱ ، روی پاره خط $[-1 , 1]$ تصویرمی‌کنیم . نقاطی که در تصویر بدست میآید ، نمایش هندسی ریشه‌های کثیرالجملهٔ $T_n(x)$ هستند .

وقتی که $-1\leqslant x\leqslant 1$ باشد (بنا بر تعریف) ، مقدار کثیرالجمله های چبیشف هم در همین فاصله واقع خواهند بود :

اگر $|x|\leqslant 1$ باشد داریم : $-1\leqslant T_n(x)\leqslant 1$

وقتی که $T_n(x)=\pm 1$ باشد، مقایر x را در فاصلهٔ بستهٔ $[-1 , 1]$ معین می‌کنیم ، چون داریم : $T_n(x)=\cos(x\arccos x)$ ، دراینصورت :

$$T_n(x)=1 \quad \text{و} \quad [n\arccos x=2k\pi]\ ;$$

$$T_n(x)=-1 \quad \text{و} \quad [n\arccos x=(2k+1)\pi]\ .$$

بنابراین اگر فرض کنیم : $n\arccos x'_m=m\pi$ داریم :

$$T_n(x'_m)=(-1)^m$$

و ازآنجا بدست میآید :

$$x'_0=1\ ;\ x'_1=\cos\frac{\pi}{n}\ ;\ x'_2=\cos\frac{2\pi}{n}\ ;\ \ldots\ ;\ x'_n=-1$$

در اینصورت :

$$T_n(x'_{.}) = T_n(۱) = ۱ \ ; \ T_n(x'_{۱}) = -۱ \ ; \ T_n(x'_{۲}) = ۱ \ ; \dots ;$$

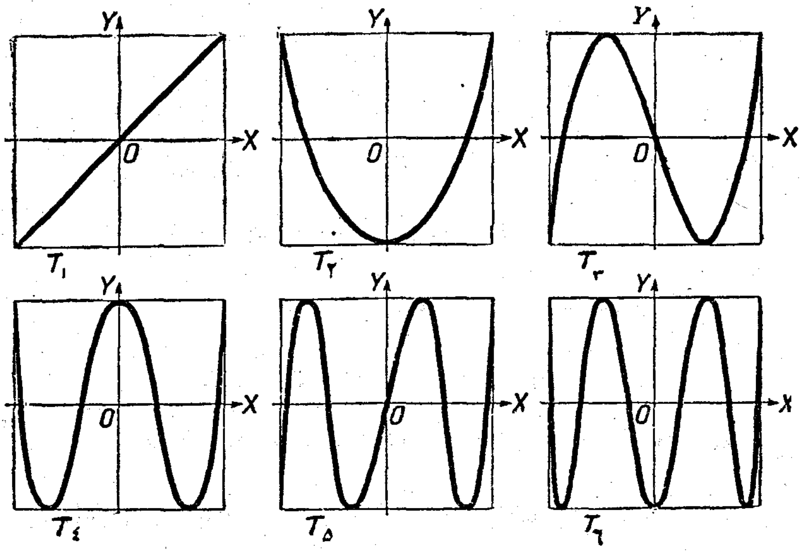
$$T_n(x'_{n}) = T_n(-۱) = (-۱)^n$$

از رابطهٔ : $y = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

فواصلی که کثیرالجمله‌های چبیشف یکنوا هستند ، بدست میآید :

x	...	$\cos\frac{۵\pi}{n}$	$< x <$	$\cos\frac{۴\pi}{n}$	$< x <$	$\cos\frac{۳\pi}{n}$	$< x <$	$\cos\frac{۲\pi}{n}$	$< x <$	$\cos\frac{\pi}{n}$	$< x <$	۱
$y = T_n(x)$	...	-۱	↗	۱	↘	-۱	↗	۱	↘	-۱	↗	۱

منحنی نمایش شش کثیرالجملهٔ اولیهٔ چبیشف درشکل ۱۶۳ داده شده است .



ش ۱۶۳

چبیشف ضمن کار در بارهٔ مسئلهٔ مقادیر می‌نیمم در توابع تقریبی مفروض، به نظریهٔ کثیرالجمله‌های $T_n(x)$ برخورد کرد . چبیشف مسئلهٔ زیر را طرح و حل کرد :

بین کثیرالجمله‌های بصورت :

$$P(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n$$

کثیرالجمله‌ای را پیداکنید ، که در فاصلهٔ مفروض حداقل انحراف را نسبت به‌صفر داشته باشد، یعنی ماکزیمم مقدار مطلق آن در فاصلهٔ مفروض حداقل مقدار ممکن باشد . کثیرالجمله‌هائی که دارای این خاصیت باشند ، در آنالیز و ضمائم آن نقش مهمی دارند. ثابت می‌کنیم که کثیرالجمله‌های چبیشف در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] از این نظر مسئله را حل می‌کنند .

قضیه . از بین همهٔ کثیرالجمله‌های درجهٔ n ، که ضرایب x^n در آنها مساوی واحداست، آنکه درفاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] حداقل انحراف را نسبت به صفر دارد ، کثیرالجمله‌ای بصورت زیر است :

$$\bar{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

اثبات : ضرایب x^n درکثیرالجمله $T_n(x)$ مساوی واحد است ، زیرا بزرگترین ضریب برابر است با :

$$1+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$$

حد اکثر مقدار $|\bar{T}_n(x)|$ در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] مساوی $\frac{1}{2^{n-1}}$ است ، زیرا حد اکثر وحد اقل مقدار $T_n(x)$ مساوی ۱± است .

بنابراین انحراف ازصفر در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] برای کثیرالجملهٔ $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ مساوی $\frac{1}{2^{n-1}}$ است . فرض می‌کنیم کثیرالجمله‌ای مانند:

$$P_n(x)=x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_0$$

در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] نسبت به صفر انحرافی کوچکتر از $\frac{1}{2^{n-1}}$ داشته باشد. دراینصورت بایدکثیرالجملهٔ $P_n(x)$، که با کثیرالجملهٔ $\bar{T}_n(x)$

فرق دارد ، در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] در نامساویهای زیر صدق کند :

$$-\frac{1}{2^{n-1}}<P_n(x)<\frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2)$$

نقاط زیر را در نظر میگیریم :

$$x'_0=1\ ;\ x'_1=\cos\frac{\pi}{n}\ ;\ x'_2=\cos\frac{2\pi}{n};\ \dots\ ;\ x'_n=-1$$

در این نقاط داریم :

$$\overline{T}_n(x'_0)=\frac{1}{2^{n-1}}\ ;\ \overline{T}_n(x'_1)=-\frac{1}{2^{n-1}}\ ;\overline{T}_n(x'_2)=\frac{1}{2^{n-1}};\dots$$

$$\overline{T}_n(x'_n)=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

تفاضل $R(x)=\overline{T}_n(x)-P_n(x)$ کثیرالجمله‌ای است که درجهٔ آن از $n-1$ بالا تر نیست . با توجه به نامساویهـای (۲) و تساویهای (۳) خواهیم داشت :

$$R(x'_0)>0\ \ ;\ R(x'_1)<0\ \ ;\ R(x'_2)>0\ ;\ \dots$$

فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] بکمك نقاط x'_0 و x'_1 و ... و x'_n به n فاصلهٔ بسته تقسیم میشود . یکی از این فواصل را در نظر میگیـریم که حدود آن بوسیلهٔ نقاط x'_{i+1} و x'_i معین شده باشد ، تفاضل $R(x)$ لااقل دریکی از نقاط هریك از فواصل بستهٔ $[x'_{i+1}, x'_i]$ مساوی صفر میشود . در حقیقت $R(x)$ در دو انتهای فاصلهٔ بستهٔ $[x'_{i+1}, x'_i]$ علامتهای مختلفی دارد و باتوجه‌باینکه تابع متصل است ، لااقل در یکی از نقاط واقع در هریك از این فواصل بسته مساوی صفر میشود . درنتیجه $R(x)\equiv 0$ میشود ، زیرا درجهٔ کثیرالجمله‌از $n-1$ بزرگتر نیست ولا اقل دارای n ریشه است و درنتیجه :

$$R_n(x) \equiv \bar{T}_n(x)$$ ،

کــه متناقض بــا فرض است . بنابراین کثیرالجمله‌ای وجود ندارد کــه در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] انحرافی نسبت به‌صفر کمتر از $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ داشته باشد و از آنجا $T_n(x)$ کمترین انحراف را نسبت به‌صفر دارد .

۴

معادلات و نامعادلات

۳۹. معادلات مثلثاتی

میدانیم که معادلهٔ :

$$F(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)=0 \qquad (F)$$

را غیرجبری (ترانساندانت) گویند وقتی که $F(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)$ تابعی غیر جبری باشد. بنابراین تابع $F(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)$ شامل اعمال غیر جبری روی مجهول است و نمیتواند بصورت یك عبارت جبری تبدیل شود .٭

$$F_1=0\ ;\ F_2=0\ ;\dots;\ F_k=0 \qquad (F_i)$$

را غیر جبری گویند وقتی‌که لااقل یکی ازمعادلات دستگاه غیرجبری باشد .

معادلهٔ :

$$F_1(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)=F_2(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)$$

غیر جبری است، وقتی‌که معادلهٔ هم ارز آن :

$$F_1(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)-F_2(x \text{ و } y \text{ و } \dots \text{ و } z)=0$$

معادله‌ای غیر جبری باشد ٭٭

در مثلثات چنان معادلات غیرجبری مورد مطالعهٔ قرارمیگیرندکه‌شامل اعمال مثلثاتی و اعمال معکوس مثلثاتی روی مجهول باشد .

٭) مثلا معادلهٔ $\log 10^{x^2+1}=1$ غیر جبری نیست ، زیرا سمت چپ تساوی ، اگر چه شامل اعمال غیر جبری است ، ولی در حقیقت تابع غیر جبری نیست :

$$\log 10^{x^2+1}=x^2+1$$

٭٭) مثلا معادلهٔ :

$$x^2+2^x=1+2^x$$

با معادلهٔ جبری $x^2-1=0$ هم ارز است و بنابراین غیر جبری بحساب نمی‌آید.

در حالت کلی ، معادلهٔ غیرجبری مقدماتی را نمیتوان بااعمال مقدماتی حل کرده، یعنی نمیشود قواعدی ذکر کرده که برطبق آن جوابهای کلی را از طریق انجام یك رشته اعمال حسابی و عملیات مقدماتی روی اعداد مفروض (ضرایب ، پارامترها و غیره) بدست آورد . ولی بعنوان حالتهای خاص ، میتوان جوابهای کلی معادلهٔ غیرجبری را بایك یا چند رابطه بیان کرد که تنها شامل عملیات مقدماتی روی اعداد مفروض باشد .

در مثلثات ، ، منظور از **معادلات مثلثاتی** مطالعهٔ بعضی اشکال خاص معادلات (دستگاهها) است که شامل اعمال مثلثاتی روی مجهول است ومیتوان آنها را با روشهای مقدماتی حل کرد . ماتعریف مفهوم معادلهٔمثلثاتی رابااین علت ذکر نمی کنیم که : این تعریف وقتی مفید است که بتوانیم انواع کلی معادلات مثلثاتی را با روشهای کلی راه حل و بحث آنها ذکر کنیم ، درحالیکه در اینجا تنها از بعضی انواع خاص معادلات مثلثاتی و بعضی روشهای خاص (و نه کلی) راه حل و بحث آنها صحبت می کنیم .

در بسیاری از کتابهای درسی قدیمی نتوانسته‌اند تعریفی برای معادلات ذکر کنند . مثلا طبق این تعریف که «معادلهٔ مثلثاتی بایستی شامل جملاتی از توابع مثلثاتی مجهول باشد» میتوان معادلاتی ذکر کرد که با روشهای مقدماتی قابل حل نباشند . مثلا معادلهٔ :

$$x+\sin x=1;$$

که نسبت به x و sinx خطی است ، ومعمولا مثلثاتی بحساب نمیآید . ازطرف دیگر اگر قید شود که مجهول باید تنها بصورت توابع مثلثاتی باشد ، در این صورت این تعریف شامل دستگاه :

$$\sin x+\sin y+a; x+y=b;$$

که درکتابهای درسی جزو معادلات مثلثاتی ذکر میشود، نخواهد شد .

این سئوال که آیا معادلهٔ مثلثاتی تنها باید شامل توابع مثلثاتی باشد یا نه ، سئوال اساسی نیست ومطلبی را روشن نمیکند ، هیچ اشکالی ندارد که جواب این سئوال درمورد معادلات مفروضی که مورد مطالعه قرار میگیرد ، مختلف باشد .

در بند ۱۵ روابط زیر راکه مربوط به جوابهای کلی معادلات ساده مثلثاتی بود ذکر کردیم :

معادله	جوابهای کلی
a) $cos x = m$	$x = 2k\pi \pm arccos m$; $(\|m\| \leqslant 1)$
« «	جواب ندارد ; $(\|m\| > 1)$
b) $sin x = m$	$x = n\pi + (-1)^n arcsin m$; $(\|m\| \leqslant 1)$
« «	جواب ندارد ; $(\|m\| > 1)$
c) $tg x = m$	$x = k\pi + arctg m$; (هر عددحقیقی دلخواه m)
d) $cotg x = m$	$x = k\pi + acrcotg m$; (هر عددحقیقی دلخواه m)

از این روابط دیده میشود ، که مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی یا تهی است ویا از یك یا دو **تصاعد حسابی** تشکیل شده است . مثلا بازاء $m > 1$ ، مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ (a) یك مجموعهٔ تهی است و بازاء $|m| \leqslant 1$ مجموعهٔ جوابهای همین معادله از دو تصاعد حسابی زیر تشکیل شده است :

$$\dots ; arccos m - 2\pi ; arccos m ; arccos m + 2\pi ; \dots$$

$$\dots ; -arccos m - 2\pi ; -arccos m , -arccos m + 2\pi ; \dots$$

درحالت کلی ، این تصاعدها متمایزند ، ولی درحالتهای خاص میتوانند بـر هم منطبق شوند . درهر دو تصاعد مقدار قدر نسبت $d = 2\pi$ است و بنابراین برای انطباق دو تصاعد لازم وکافی است که یکی ازجملات تصاعد اول باجمله‌ای از تصاعد دوم برابر شود :

$$2kx + arccos m = 2l\pi - arccos m$$

از آنجا :

$$arccos m = (l - k)\pi$$

l و k مقادیری میتوانند باشندکه در شرایط زیر صدق کنند :

$$0 \leqslant (l-k) \leqslant \pi \cdot$$

بنابراین یا $l=k$ و یا $l-k=1$ میشود ؛

در حالت اول $\arccos m = 0$ و $m=1$ میشود ودو تصاعد بر هم منطبق میشوند :

$$\left\{ 2k\pi \right\}$$

درحالت دوم $\arccos m=\pi$ و $m=-1$ میشود و بازهم دو تصاعد یکی‌میشوند:

$$\left\{ (2k+1)\pi \right\}$$

متذکر میشویم‌که بازاء $m=0$ اگرچه دو تصاعد متمایزند ولی میتوان جملات آنها را در یك تصاعد با قدر نسبت π نوشت . در حقیقت ، در اینحالت $\arccos m=\frac{\pi}{2}$ میشود و جملات عمومی تصاعدها چنین‌اند :

$$2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad 2l\pi-\frac{\pi}{2}=(2l-1)\pi+\frac{\pi}{2}$$

که رویهم جملاتی بصورت $n\pi+\frac{\pi}{2}$ هستندکه وقتی n زوج باشد جملات تصاعد اول و وقتی n فرد باشد ، جملات تصاعد دوم بدست میآید .

بهمین ترتیب مجموعهٔ جوابهای کلی معادلهٔ (h) یا تهی است و یا (در حالت‌کلی) از دو تصاعد حسابی تشکیل شده است .

جوابهای کلی معادلهٔ (c) ، همچنین معادلهٔ (d) ، بازاء هر مقدار m یك تصاعد حسابی باقدر نسبت π تشکیل میدهند .

حل معادلهٔ بصورت :

$$\sin f(x)=\varphi(x) . \qquad (1)$$

هم ارزاست با جستجوی جوابهای معادلهٔ زیر :

$$f(x)=(-1)^n \arcsin \varphi(x)+n\pi; \qquad (2)$$

و درآن n پارامتری است که تنها میتواند مساوی عددی صحیح باشد.

در حالت خاص ، وقتی که تابع $f(x)$ جبری و تابع $\varphi(x)$ ثابت باشد: $\varphi(x)=m($مقدار ثابت $=)$ ، معادلهٔ (۲) ، معادله‌ای جبـری خواهد شد . بنابراین ریشه‌های معادلهٔ (۱) در اینحالت هم‌ارز ریشه‌های معادلهٔ جبری‌است (در حوزهٔ اعداد حقیقی) ، منتهی معادلهٔ جبری شامل پارامتری است که تنها اعداد صحیح را قبول میکند .

مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ مثلثـاتی که از رابطهٔ فوق، که شامل پارامتر صحیح است ، بدست میآیند ، سری جوابهای معادلهٔ مفروض نامیده میشوند . سری جوابها ممکن است جوابهای کلی معادله و یا قسمتی از مجموعهٔ جوابها باشد . مثلا برای معادلهٔ $\sin x=0$ ، سری جوابهای $x=2k\pi$ قسمتی‌از مجموعهٔ همهٔ جوابهای $x=n\pi$ است .

چند مثال

۱. اگر تابع $f(x)$ خطی باشد : $f(x)=kx+b$ و $\varphi(x)=m$ مقدار ثابتی باشد ، مجموعهٔ جوابهای کلی معادلهٔ (۱) یا از دو تصاعد حسابی تشکیل شده است و یا مجموعه‌ای تهی است . درحقیقت معادلهٔ :

$$\sin(kx+b)=m$$

بازاء $|m|>1$ دارای جواب نیست و بازاء $|m|\leqslant 1$ دارای بی‌نهایت جواب است :

$$kx+b=(-1)^n\arcsin m+n\pi\ ,$$

و از آنجا :

$$x=(-1)^n\frac{\arcsin m}{k}-\frac{b}{k}+\frac{n\pi}{k}$$

یکی ازتصاعدها بازاء مقادیر زوج n و تصاعد دیگر بازاء مقادیرفرد n بدست میآید و درهر دوحالت قدر نسبت تصاعد مساوی $\frac{2\pi}{k}$ است .

نمونه‌های مشخصی از اینگونه معادلات را ذکر می کنیم :

$$a)\quad \cos(۲x+\frac{\pi}{٤})=\frac{٤}{۵}\Longrightarrow ۲x+\frac{\pi}{٤}=۲k\pi\pm \arccos\frac{٤}{۵}$$

و از آنجا :

$$x=\pm \arccos\frac{٤}{۵}-\frac{\pi}{۸}+k\pi ،$$

و یا برحسب درجه : $x\neq \pm ۱۸^\circ ۲۶' - ۲۲^\circ ۳۰' + ۱۸۰k^\circ$

$$b)\quad tg(۳x-\frac{\pi}{٦})=\sqrt{۳}\Longrightarrow ۳x-\frac{\pi}{٦}=\frac{\pi}{۳}+k\pi\ ;$$

$$x=\frac{\pi}{٦}+k\frac{\pi}{۳}$$

۲ ـ معادلهٔ $\sin ۲^x=-\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

حل : داریم :

$$۲^x=(-۱)^n \arcsin(-\frac{۱}{۲})+n\pi$$

یا :

$$۲^x=(-۱)^{n+۱}\frac{\pi}{٦}+n\pi$$

که درآن n عددی صحیح و دلخواه است . شرط $۲^x>۰$ نشان‌میدهد که مقادیر پارامتر n تنهــا میتواند مقادیر صحیح و ... و۳ و۲ و۱ = n را انتخاب کندکه بازاء آنها داشته باشیم :

$$(-۱)^{n+۱}\frac{\pi}{٦}+n\pi>۰$$

مقادیر .... و۲ــ و۱ــ و۰ = nرا ، که بازاء آنها معادلهٔمفروض جواب ندارد، باید ازمجموعهٔ مقادیر انتخابی n حذف کرد، باین‌ترتیب‌داریم:

$$x=\log_۲\left[(-۱)^{n+۱}\frac{\pi}{٦}+n\pi\right]$$

که درآن n عددصحیح ومثبت دلخواهی است .

۳ـمعادلهٔ زیر را حل کنید (در حوزهٔ اعدادحقیقی) :

$$\cos(ax^۲+۱)=b\qquad (|b|<۱)$$

حل : معادلهٔ مفروض با معادلهٔ زیر ، که همراه پارامتر صحیح k است هم ارزاست :

$$ax^{2}+1=\pm \arccos b+2k\pi$$

و از آنجا :

$$x^{2}=\frac{1}{a}(\pm \arccos b-1+2k\pi) , \qquad (a\neq 0)$$

معادلهٔ اخیر بازاء مقادیری از k دارای جواب است که مقدار سمت راست تساوی غیر منفی باشد .

حالت اول) $a>0$. مقادیر پارامتر صحیح k ، که بازاء آنها معادلهٔ مفروض دارای جواب است از شرط زیر بدست میآید :

$$\pm \arccos b-1+2k\pi\geqslant 0$$

اگر علامت $+$ را اختیار کنیم شرط :

$$\arccos b-1+2k\pi\geqslant 0$$

بازاء ... و ۳ و ۲ و ۱ و $k=0$ برقرار است اگر $\arccos b\geqslant 1$ ، یعنی $b\leqslant \cos 1$ باشد وبازاء ... و۳ و۲ و$k=1$ برقراراست اگر $b>\cos 1$ باشد .

اگر علامت $-$ را اختیار کنیم شرط :

$$-\arccos b-1+2k\pi\geqslant 0$$

بازاء ... و۳ و۲ و $k=1$ برقرار است . باین‌ترتیب بازاء $a>0$ داریم:

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}(\pm \arccos b-1+2k\pi)} \qquad ; \qquad (1)$$

که در آن :

$$k=\begin{cases} 0 ,1 ,2 ,3 ,\dots & (b\leqslant \cos 1) \\ 1 ,2 ,3 ,\dots & (b>\cos 1) \\ 1 ,2 ,3 ,\dots & \end{cases}$$

برای سری اول جوابها

برای سری دوم جوابها

حالت دوم) $a<0$. مقادیر پارامتر k ، که‌بازاء آنها معادلهٔ‌مفروض جواب داشته باشد ، برای سری اول جوابها ازشرط زیر معین میشود :

$$\arccos b - 1 + 2k\pi \leqslant 0$$

و از آنجا وقتی $b \geqslant \cos 1$ باشد ... و ۳— و ۲— و ۱— و $k=0$ و وقتی $b<\cos 1$ باشد ... و ۳— و ۲— و ۱— $k=$ بدست میآید . و برای سری‌دوم‌جوابها داریم :

$$-\arccos b - 1 + 2k\pi \leqslant 0$$

و از آنجا : $k = 0$ و ۱— و ۲— و ۳— و ...

باین ترتیب جوابهای‌کلی معادله همان رابطهٔ (۱) است‌که در آن :

$$k=\begin{cases} 0,\ -1,\ -2,\ -3\ \ldots & (b\geqslant \cos 1) \\ -1,\ -2,\ -3\ \ldots & (b<\cos 1) \end{cases} \text{برای سری اول جوابها}$$
$$\qquad 0,\ -1,\ -2,\ -3\ \ldots \quad \text{برای‌سری دوم‌جوابها}$$

بازاء $a=0$ ، معادله بصورت زیر درمیآید :

$$\cos 1 = b\ ;$$

که بازاء $b\neq\cos 1$ غیر ممکن است و بازاء $b=\cos 1$ به اتحاد تبدیل میشود .

۴. معادلهٔ زیر را (در حوزهٔ اعداد حقیقی) حل‌کنید :

$$tg\frac{x^2-1}{x^2+1}=a\ ,$$

حل : این معادلهٔ بامعادلهٔ جبری زیر که شامل پارامتر a و پارامتر صحیح k است، هم ارزاست :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=\operatorname{arctg} a + k\pi\ , \qquad (1)$$

از آنجا بدست میآید :

$$x^2(1-\operatorname{arctg} a - k\pi) = 1 + \operatorname{arctg} a + k\pi$$

ضریب $x^۲$ وقتی صفر میشود که داشته باشیم :

$$k\pi = ۱ - \operatorname{arctg} a$$

چون داریم :

$$-۰/۵۷\ldots = ۱ - \frac{\pi}{۲} < ۱ - \operatorname{arctg} a < ۱ + \frac{\pi}{۲} = ۲/۵۷\ldots$$ و

در اینصورت از شرط :

$$-۰/۵۷\ldots < k\pi < ۲/۵۷\ldots$$ و

نتیجه میشود که تنها عددی که میتوان به k نسبت داد صفر است و از آنجا $\operatorname{arctg} a = ۱$ میشود .

حالت اول) $a \neq tg۱$ ، دراینحالت داریم :

$$x^۲ = \frac{۱ + \operatorname{arctg} a + k\pi}{۱ - \operatorname{arctg} a - k\pi}$$

و معادله وقتی جوابهای حقیقی دارد که داشته باشیم :

$$\frac{۱ + \operatorname{arctg} a + k\pi}{۱ - \operatorname{arctg} a - k\pi} \geqslant ۰$$

و از آنجا :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} ۱ + \operatorname{arctg} a + k\pi \geqslant ۰ \\ ۱ - \operatorname{arctg} a - k\pi > ۰ \end{cases} \quad \text{و یا} \quad (\mathrm{II}) \begin{cases} ۱ + \operatorname{arctg} a + k\pi \leqslant ۰ \\ ۱ - \operatorname{arctg} a - k\pi < ۰ \end{cases}$$

از دستگاه (I) بدست میآید :

$$-\operatorname{arctg} a - ۱ \leqslant k\pi \leqslant ۱ - \operatorname{arctg} a \qquad (۲)$$

و دستگاه (II) متناقض است . مقادیر صحیح k را ، که بازاء آنها دستگاه (۲) برقرار است ، معین می کنیم :

a) اگر $\operatorname{arctg} a > ۱$ یعنی $a > tg۱$ باشد ، داریم :

$$-\operatorname{arctg} a - ۱ > -۳ \quad \text{و} \quad ۱ - \operatorname{arctg} a < ۰$$

و در اینصورت مقادیر صحیح k ، که در نامساویهای (۲) صدق کنند،

وجود ندارد ومعادله دارای جواب نیست .

b) اگر $\operatorname{arctg} a < -1$ یعنی $a < -tg\,1$ باشد در اینصورت‌داریم:
$-\operatorname{arctg} a - 1 > 0$ و $1 - \operatorname{arctg} a < 3$ و باز هم مقادیری از k که در نامساویهای (۲) صدق کند وجودندارد و معادله دارای جواب‌نیست.

c) اگر $-tg\,1 \leqslant a < tg\,1$ باشد ، داریم : $-1 \leqslant \operatorname{arctg} a < 1$

$$-2 < -\operatorname{arctg} a - 1 \leqslant 0 < 1 - \operatorname{arctg} a < 2$$

تنها مقداری از k که در نـامساویهای (۲) صدق میکند $k = 0$ است
و بشرط $a \neq tg(-1)$ معادله دارای دوجواب :

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{arctg} a}{1-\operatorname{arctg} a}};$$

و بشرط $a = -tg\,1$ معادله دارای یك‌جواب $x = 0$ است .

حالت دوم) $a = tg\,1$. در اینصورت معادلهٔ (۱) بصورت‌زیردرمیآید:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 + k\pi$$

بازاء $k = 0$ این معادله جواب ندارد و بازاء $k \neq 0$ بدست‌میآید :

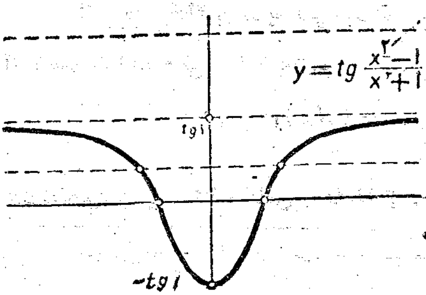
$$x^2 = \frac{2+k\pi}{-k\pi}$$

و چون سمت راست تساوی بـازاء مقادیر $k \neq 0$ همیشه منفی است ، معادله جواب ندارد .

روش دوم : میتوان‌نتایج مورد نظر را با مطالعهٔسمت چپ تساوی، درمعادله بدست آورد . تابع :

$$u = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

در فاصلهٔ $0 \leqslant x < +\infty$ از ۱ــ تا ۱ صعودی و در



ش ۱۶۴

فاصلهٔ $\cdot \leqslant x \leqslant \infty$ — از ۱ تا ۱ — نزولی است ، بنابراین تابع مرکب :

$$y = tg\,u = tg\,\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$$

در فاصلهٔ اول از $-tg\,۱$ تا $tg\,۱$ صعودی و در فاصلهٔ دوم از $tg\,۱$ تا $-tg\,۱$ نزولی است (شکل۱۶۴). بنابراین بازاء $|a|>tg\,۱$ معادله جواب ندارد ، زیرا $|y|\leqslant tg\,۱$ است ، بازاء $|a|<tg\,۱$ معادله دارای دوجواب قرینه است وبازاء $a=-tg\,۱$ تنها جواب $x=\cdot$ را قبول دارد و درحالت خاص $a=tg\,۱$ هم‌دارای جواب نیست.

۴۰ . حالتهای خاص حل معادلات

مفهوم ریشه‌های معادلهٔ :

$$f_{۱}(x)=f_{۲}(x) \qquad (f)$$

را میتوان در مورد بعضی از مواردی که‌به **حالتهای‌خاص** مشهور شده‌اند ، نیز بکار برد ، یعنی وقتی که یکی از توابع $f_{۱}(x)$ و $f_{۲}(x)$ مفهوم خود را از دست بدهند . در این مورد به تعریف زیر توجه می‌کنیم :

اگر در نقطهٔ $x=a$ یکی از توابع $f_{۱}(x)$ و $f_{۲}(x)$ مفهوم خودرا از دست بدهد، ولی داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a}[f_{۱}(x)-f_{۲}(x)]=\cdot$$

در اینصورت a ریشهٔ (خاص) معادلهٔ f بحساب می‌آید . ✿

✿) این تعریف را اصل عبور حدی هم میگویند ، ضمناً باید درنظر داشت که نقطهٔ a در مجموعهٔ مقادیر مفروض آوند ، نقطهٔ حدی است . در غیر اینصورت اصل عبور حدی مفهوم نخواهد داشت .

این تعریف را معمولا در آنـالیز می‌پذیرند ، ولی در بعضی موارد ریاضیات مقدماتی و از آنجمله دردورهٔ دبیرستانی مثلثات هم ، قبول آن لازم بنظر میرسد ، و اگر معمولا ازطرح آن خودداری می‌کنند ، بعلت اشکال طرح آنست* . در چهارچوب ریاضیات مقدماتی ، وقتی‌که بازاء $x=a$ یکی از توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ مفهوم خودرا از دست میدهند ، دو نظر وجود دارد:

I . یا تعریف فوق رادر مورد ریشه‌های مربوط به حالتهای خاص قبول نمی‌کنند که در اینصورت $x=a$ جزو ریشه‌های معادله بحساب نمی‌آید .

II . ویا $\lim\limits_{x\to a}[f_1-f_2]$ راجستجو می‌کنند : **اگر این حد وجود نداشته باشد، یامفهوم خودرا ازدست بدهد، یامخالف صفر باشد a ریشهٔ معادله نیست ، و اگرا ین حد مساوی صفر باشد a ریشهٔ معادله (ریشهٔ خاص) میباشد.**

میتوان هریك از این دو نظر را قبول کرد ، ولی بخاطر اینکه سوء تفاهمی پیش نیاید ، باید درهر مورد متذکر شدکه‌کدام نظر قبول شده‌است.

چند مثال

۱ . این معادله را حل کنید :

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \qquad (1)$$

حل : بترتیب‌زیر معادلهٔ‌مفروض‌را بمعادلات‌هم ارزخود تبدیل‌می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}-\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0\,;$$

$$\frac{2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\sin 2x}{2\sin x\cos^2 x}=0\,;$$

$$\frac{\sin x\sin 2x(\cos x-1)}{2\sin x\cos^2 x}=0 \qquad (2)$$

* استنـاد به اصل عبور حدی و قبول‌آن مستلزم آشنائی با مفهوم حد توابع وداشتن عادت به پیداکردن حد است‌که ازچهار چوب برنامهٔ دبیرستانی خارج است .

هریك از عوامل صورت را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$sin\,x=0\ ;\ sin\,2x=0\ ;\ cos\,x-1=0$$

از آنجا بدست میآید :

$$x=n\pi\ ;\quad x=k\frac{\pi}{2}\ ;\ x=2m\pi\ .$$

سری اول وسوم جوابها جزو سری جوابهای دوم هستند (وقتی که k زوج و $k=4m$ باشد) ، بنابراین هر سه‌سری جواب را میتوان دریك‌سری $x=k\frac{\pi}{2}$ متمرکز کرد .

ولی با این روش ممکن است جوابهای‌خارجی پیدا شود ، این جوابها آنهائی هستندکه مخرج سمت چپ معادلهٔ (۲) را (که با معادلهٔ (۱) هم ارز است) صفر کنند و در اینجا هر مقدار x ازسری $x=k\frac{\pi}{2}$ جزو حالت‌خاص هستند . بازاء مقادیر زوج $k=2n$: k طرف چپ و بازاء مقادیر فرد k : $k=2n+1$ طرف راست معادلهٔ (۱) مفهوم خود را ازدست میدهند .

باین‌ترتیب‌طبق نظراول، معادله (۱)دارای جواب نیست وهمهٔجوابهای $x=k\frac{\pi}{2}$جوابهای‌خارجی بحساب میآیند.☆

طبق نظر دوم باید حد سمت‌چپ معادلهٔ (۲) را جستجو کرد ، یعنی حد:

$$\text{حد}\left[\frac{sin\,x\cdot sin\,2x(cos\,x-1)}{2\,sin\,x\,cos^2x}\right]=\text{حد}[sin\,x-tg\,x]$$

را در هر یك از نقاط $x=\frac{k\pi}{2}$ ،

بازاء مقادیر زوج k، این حد برابر صفر است و بازاء مقادیر فردk حدی وجود ندارد (محدود نیست) :

☆) ومعادلات مثلثاتی رادر دورهٔ دبیرستان باید بهمین طریق حل کرد .

$$\lim_{x \to \frac{۲n+۱}{۲}\pi} |\sin x - tg\, x| = +\infty$$

بنابراین اعداد بصورت $x = k\pi$ ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند و رابطهٔ $x = k\pi$ معرف جواب کلی معادله است .

۲ . معادلهٔ $\log\cos x = ۰$ را حل کنید .

حل : سمت‌چپ تساوی باشرط $\cos x > ۰$ معین است ، بنابراین‌مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر بدست میاید :

$$-\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi < x < \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$$

از معادله جوات‌کلی را پیدا می‌کنیم :

$$\cos x = ۱ \Longrightarrow x = ۲k\pi$$

مقادیری از x را مطالعه می‌کنیم‌که بازاء آنها $\cos x < ۰$ باشد .مثلا حالت خاص $x = \pi$ را در نظر می‌گیریم . بازاء $x = \pi$ سمت چپ معادلهٔ مفروض مفهوم خود را از دست میدهد ، ولي بدون هیچ بحثی روشن است که عدد π نمی‌تواند ریشهٔ معادله باشد . درحقیقت سمت‌چپ معادله نه تنهادر نقطهٔ π ، بلکه در هر نقطهٔ دلخواه نزدیك بآن هم معین نیست و بنابراین $\lim\limits_{x \to \pi} \log\cos x$ مفهومی ندارد و در نتیجه استفاده از اصل عبور حدی مفهومی ندارد .

نقاط $x = \frac{۲k+۱}{۲}\pi$ (دو انتهای فواصلی‌که درآنجا سمت‌چپ‌معادله معین است)هم‌نمیتوانند جوابهای‌معادله‌باشند، زیرا درهریك ازاین‌نقاط‌داریم:

$$\lim \log\cos x = -\infty$$

۳ . معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}$$

حل : فرض می‌کنیم $m\neq 1$ باشد . اگر سمت راست تساوی را به‌سمت چپ منتقل و پس از مخرج‌مشترك ، صورت کسر را به‌ضرب تبدیل کنیم،معادلهٔ زیر راکه هم ارزمعادلهٔ مفروض‌است، بدست می‌آوریم:

$$\frac{2\sin(m-1)x}{\sin 2x}=0$$

وقتی کسر مساوی صفر است که صورت آن‌صفر باشد، بنابراین :

$$\sin(m-1)x=0\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{m-1}$$

ولی بازاء مقادیری که صورت کسر مساوی صفر میشود ، ممکن است مخرج کسر هم صفر شود و در اینصورت سمت چپ معادله ، مفهوم خود را از دست بدهد . بنابراین از مجموعهٔ جوابهای بدست آمده ، باید مقادیری‌را که بازاء آنها مخرج کسر مساوی صفرمیشود ، حذف کرد یعنی مقادیر بصورت $\frac{l\pi}{2}$ (l عددی است صحیح) :

$$\frac{k\pi}{m-1}=\frac{l\pi}{2}\Longrightarrow k=\frac{(m-1)l}{2}$$

بعبارت دیگر باید مقادیری از k راکه بازاء آنها معادلهٔ

$$2k=(m-1)l \qquad (1)$$

نسبت به k و l جوابهای صحیح دارد ، حذف کرد (mعددی استمفروض)

m هرچه باشد باید $k=0$ را حذف کرد .

درحالت خاص $m=2$، باید همهٔ مقادیر k را حذف کرد ، زیرا در اینحالت معادلهٔ (۱) بصورت $l=2k$ درمی‌آید وهر مقدار صحیحk متناظر با مقدار صحیحی از l خواهد بود .

بهمین ترتیب بازاء $m=3$ هم باید همهٔ مقادیر k را حذف کـرد . بازاء $m=4$ معادلهٔ (۱) بصورت $2k=3l$ در می‌آیدکه وقتی k مضربی‌از ۳ باشد دارای جوابهای صحیح است : $k=3k_1$ ، بنابراین از مقادیرk، آنچه‌که مضرب۳ هستند باید حذف کرد .

بازاء $m=\sqrt{2}$ معادلهٔ (۱) دارای جوابهای صحیح نیست (بجز $k=l=0$) و بنابراین وقتی $k\neq 0$ باشد، حالت خاصی پیش نمی‌آید .

بازاء $m=\frac{1}{3}$ معادلهٔ (۱) بصورت $6k=-2l$ یا $3k=-l$ درمیآید که بازاء همهٔ مقادیر صحیح k جواب دارد و بنابراین همهٔ مقادیر k حذف میشود .

برای ادامهٔ بحث درحالتهای خاص از أصل عبور حدی استفاده‌می‌کنیم حد زیر را بدست میآوریم :

$$\lim_{x\to\frac{l\pi}{2}}\frac{\sin(m-1)x}{\sin 2x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(m-1)\left(\frac{l\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(l\pi+2\alpha)}=$$

$$=\lim\frac{\sin[k\pi+(m-1)\alpha]}{\sin(l\pi+2\alpha)}=\lim\frac{(-1)^k\sin(m-1)\alpha}{(-1)^l\sin 2\alpha}=$$

$$=(-1)^{k-l}\frac{m-1}{2}\neq 0$$

بنابراین مقادیری از x ، که از سری $x=\frac{k\pi}{m-1}$ حذف کردیم، نمیتوانند جزو جوابهای معادلهٔ مفروض باشند .

وقتی که $m=1$ باشد ، معادلهٔ مفروض تبدیل به اتحاد میشود .

۴۱ . روابط بین قوسهائی که دارای یك تابع مثلثاتی مفروض هستند

قضیه . شرط لازم وکافی برای اینکه :

۱° . دوقوس u و v دارای یك سینوس باشند ،

$$\sin u = \sin v،$$

اینست که داشته باشیم :

$$u = (-1)^n v + n\pi;$$

۲° . قوسهای u و v دارای یك کسینوس باشند :

$$\cos u = \cos v$$

اینست که رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$u = \pm v + 2k\pi;$$

۳° . دو قوس u و v ، که متمایز از قوسهائی بصورت $\frac{2k+1}{2}\pi$ هستند دارای یك تانژانت باشند ، اینست که داشته باشیم :

$$u = v + n\pi;$$

(n عدد صحیح ودلخواهی است) .

اثبات . ابتدا حکم اول را اثبات می‌کنیم .

شرط کافی است . درحقیقت اگر رابطهٔ $u = (-1)^n v + n\pi$ وجود داشته باشد ، بسته باینکه n زوج یا فرد باشد ، داریم :

$$\sin u = \sin \begin{cases} v + 2k\pi & (n = 2k) \\ (\pi - v) + 2k\pi & (n = 2k+1) \end{cases}$$

و درهر دوحالت $\sin u = \sin v$ خواهد بود .

شرط لازم است . فرض کنید $\sin u = \sin v$ باشد ، مقدار مشترك سینوس دوقوس u و v را به m نشان میدهیم :

$$\sin u = m \;;\; \sin v = m$$

مجموعهٔ قوسهائی راکه سینوس مساوی m دارند درنظر می گیریم :

$$(-1)^n \arcsin m + n\pi; \qquad (1)$$

هریك از قوسهای u و v جزوعبارت(۱) هستند (بازاءمقادیری از n):

$$\left.\begin{aligned} u &= (-1)^{n_1}\arcsin m + n_1\pi; \\ v &= (-1)^{n_2}\arcsin m + n_2\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

اگر n_1 و n_2 هر دوزوج یاهردو فرد باشند، از تفاضل تساویهای(۲) خواهیم داشت :

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2k\pi;$$

اگر از دو عدد n_1 و n_2 یکی زوج و دیگری فرد باشد ، از جمع تساویهای (۲) داریم :

$$u + v = (n_1 + n_2)\pi = (2k+1)\pi \;;$$

باین ترتیب ، اگر قوسهای u و v سینوسهای مساوی داشته باشند ، یا تفاضل آنهامضرب زوجی از π است : $2k\pi$ ویا مجموع آنها مضرب‌فردی است از π : $(2k+1)\pi$. بنابراین :

$$u = \begin{cases} v + 2k\pi \\ -v + (2k+1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + n\pi$$

حکم ۲° را هم‌میتوان بهمین ترتیب اثبات‌کرد .

شرط‌کافی است . درحقیقت اگر $u = \pm v + 2k\pi$ باشد، داریم :

$$\cos u = \cos(\pm v + 2k\pi) = \cos(\pm v) = \cos v$$

شرط لازم است . برعکس اگر $\cos u = \cos v$ باشد ، داریم :

$$u = \pm \arccos m + 2n_1\pi;$$

$$v = \pm \arccos m + 2n_2\pi.$$

از جمع یا تفریق (بسته به علامت $\arccos m$ در سمت راست تساوی) بدست میآید :

$$u \pm v = ۲(n_۱ \pm n_۲)\pi = ۲n\pi,$$

که درآن $n = n_۱ \pm n_۲$ عددی است صحیح .

با همین روش میتوان حکم ۳ را هم اثبات کرد . اگر داشته باشیم $u = v + n\pi$ خواهیم داشت : $tg\,u = tg\,v$

برعکس اگر $tg\,u = tg\,v = m$ باشد ، خواهیم داشت :

$$u = \operatorname{arc}tg\,m + k_۱\pi \text{ و } v = \operatorname{arc}tg\,m + k_۲\pi$$

از آنجا : $u = v + (k_۱ - k_۲)\pi = v + n\pi$

شبیه آنچه راکه در مورد تانژانت گفتیم ، میتوان در مورد کتانژانت هم ذکر کرد .

اگر درحالت ۳ ، یکی از قوسها ومثلا v بصورت $\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ باشد ، برای وجود رابطهٔ $u = v + n\pi$ ، قوس u بصورت زیردرمیآید :

$$u = \frac{۲(k+n)+۱}{۲}\pi$$

در اینحالت $tg\,u$ و $tg\,v$ وجود ندارد .

بر عکس اگر $tg\,u$ و $tg\,v$ وجود نداشته باشند ، قوسهای u و v بصورت زیرند :

$$u = \frac{۲k_۱+۱}{۲}\pi \; ; \; v = \frac{۲k_۲+۱}{۲}\pi.$$

در اینحالت : $u = v + (k_۱ - k_۲)\pi = v + n\pi$

بنابراین ، در حالت کلی ، رابطهٔ $u = v + n\pi$ شرط لازم وکافی است برای اینکه یا u و v تانژانتهای مساوی داشته باشند ویا برای هیچیک از آنها تانژانت وجود نداشته باشد .

تبصره. قضیه را بطریق دیگری هم میتوان اثبات کرد . مثلا برای حکم ۱ میتوان چنین استدلال کرد .

اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$sin\,u - sin\,v = ۰ \Longrightarrow ۲\,sin\frac{u-v}{۲}\,cos\frac{u+v}{۲} = ۰ ،$$

از آنجا (شرط لازم کافی) :

$$sin\frac{u-v}{۲} = ۰ \quad \text{یا} \quad cos\frac{u+v}{۲} = ۰$$

و بنابراین : $u+v = (۲k+۱)\pi$ یا $u-v = ۲k\pi$

و این نتیجه‌ای است که لازم داشتیم .

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$sin\,f(x \text{و} y \text{و} \ldots \text{و} z) = sin\,\varphi(x \text{و} y \text{و} \ldots \text{و} z) ،$$

که تساوی سینوس دو تابع را بیان می‌کند. بر اساس قضیه‌ای که ثابت کردیم، معادلهٔ فوق با معادلهٔ زیر (که شامل پارامتر صحیح n است) هم ارزاست :

$$f = (-۱)^n\varphi + n\pi$$

(برای سهولت کار ، از نوشتن آوندها صرفنظر کرده‌ایم) .

بهمین ترتیب معادله : $cos\,f = cos\,\varphi$

با معادلهٔ زیر هم ارز است : $f = \pm\varphi + ۲n\pi$

معادلهٔ : $tg\,f = tg\,\varphi \qquad (۳)$

همیشه هم ارز معادلهٔ زیر نیست :

$$f = \varphi + n\pi \qquad (۴)$$

در حقیقت هر ریشه‌ای ازمعادلهٔ (۳) ، ریشهٔ معادلهٔ (۴) هم‌هست، ولی هر ریشهٔ معادلهٔ (۴) ریشهٔ معادلهٔ (۳) نمیتوانند باشند . ریشه‌هائی از معادلهٔ (۴) ، که بازاء آنها $tg\,f$ و $tg\,\varphi$ مفهوم خود را از دست می‌دهند ، ریشه‌های خارجی معادلهٔ (۳) هستند .

تبصرهٔ I . در اینحالت، وقتی که ریشه‌هائی ازمعادلهٔ (۴) راریشه‌های خارجی‌معادلهٔ (۳)در نظر گرفتیم ، دنبال این‌سئوال نرفتیم که آیااین‌ریشه‌ها از نظر اصل عبور حدی چه وضعی پیدا می‌کنند . این سئوال در هر یك از حالتهای خاص به بحث جداگانه‌ای احتیاج دارد .

تبصرهٔ II . معادلاتی راکه در بند قبل مطالعه‌کردیم ، میتوان حالت خاصی از معادلاتی دانست‌که در این بند از آنها صحبت‌کردیم . مثلاًمعادلهٔ:

$$\sin f(x) = \varphi(x)$$

را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\sin f(x) = \sin[\arcsin\varphi(x)]$$

چند مثال .

۱. معادلهٔ زیر را حل‌کنید : $\sin x = \cos x$

حل : داریم : $\cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \cos x$،

از آنجا : $\frac{\pi}{۲} - x = \pm x + ۲k\pi;$ (۱)

اگر درسمت راست علامت $+$ را انتخاب‌کنیم، بدست میآید :

$$۲x = \frac{\pi}{۲} - ۲k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{٤} - k\pi$$

متذکر میشویم که‌ضریب $-k$ را میتوان بصورت k نوشت (زیرا $-k$ هم مثل k میتواند مساوی هر عدد صحیح دلخواهی باشد) و بنابراین سری جوابهای زیر بدست میآید :

$$x = \frac{\pi}{٤} + k\pi$$

اگر علامت منفی‌را درسمت راست (۱) انتخاب کنیم‌به معادلهٔ غیرممکن برخورد می‌کنیم .

۲. معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\sin ۳x + \sin ۱۲^\circ = ۰$$

حل . داریم :

$$\sin ۳x = -\sin ۱۲^\circ \Longrightarrow \sin ۳x = \sin(-۱۲^\circ)$$

از آنجا :

$$۳x = (-۱)^n(-۱۲^\circ) + ۱۸۰n^\circ \Longrightarrow x = (-۱)^{n+۱} \times ۴^\circ + ۶۰n^\circ$$

۳. این معادله را حل کنید :

$$\cos(ax+b) = \cos(a_۱x+b_۱)$$

حل : داریم :

$$ax+b = \pm(a_۱x+b_۱) + ۲n\pi;$$

از آنجا : $$(a \mp a_۱)x = -b \pm b_۱ + ۲n\pi \quad (۱)$$

(علامتها را باید در ردیف بالا ویا در ردیف پائین حساب کرد) .

حالت اول) : $|a| \neq |a_۱|$ ، داریم :

$$x = \frac{۱}{a \pm a_۱}(-b \mp b_۱ + ۲n\pi)$$

حالت دوم) : $|a| = |a_۱|$ ، مثلا فرض کنید $a = a_۱$ باشد ، دراینصورت اگر در سمت چپ تساوی (۱) علامت $+$ را جلو $a_۱$ بگیریم، بدست میآید :

$$x = \frac{۱}{۲a}(-b - b_۱ + ۲n\pi),$$

و اگر علامت منفی را جلو $a_۱$ درنظر بگیریم ، بدست میآید :

$$۰ = -b + b_۱ + ۲n\pi,$$

رابطهٔ اخیر ، وقتی که $b_۱ - b$ مضربی از ۲π نباشد، غیر ممکن استو درحالتی که $b_۱ = b + ۲k\pi$ باشد ، معادله به اتحاد تبدیل میشود :

$$\cos(ax+b) = \cos(ax+b+۲k\pi)$$

۴. معادلهٔ زیر را حل کنید : $$tg\,ax \cdot tg\,bx = ۱$$

حل : وقتی که $tg\,bx = ۰$ باشد ، معادله جواب ندارد. طرفین تساوی را بر $tg\,bx$ تقسیم می کنیم ، میشود :

$$tg\,ax = cotg\,bx \Longrightarrow tg\,ax = tg(\frac{\pi}{۲} - bx);$$

از آنجا : $$ax = \frac{\pi}{۲} - bx + k\pi \qquad (۱)$$

و وقتی $a \neq -b$ باشد داریم : $$x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲(a+b)} \qquad (۲)$$

وقتی $a = -b$ باشد ، معادلهٔ (۱) غیرممکن میشود و معادلهٔمفروض جواب نخواهد داشت . در رابطهٔ (۲) ممکن است جوابهای خارجی وجـود داشته باشد ، این‌جوابها ازشرط زیر بدست میآیند :

$$ax = a\frac{(۲k+۱)\pi}{۲(a+b)} = \frac{۲m+۱}{۲}\pi$$

(که درآن m عددی است صحیح) ، از آنجا :

$$b = \frac{۲(k-m)a}{۲m+۱}$$

مثلا بازاء $k = ۲$ ، $m = ۱$ بدست میآید : $b = \frac{۲}{۳}a$. در اینمورد

برای معادلهٔ : $$tg\,ax\,tg\frac{۲}{۳}ax = ۱$$

از رابطهٔکلی (۲) باید ریشه‌های زیر را حذف‌کرد :

$$x = \frac{۳\pi}{۲a} \qquad (k = ۲ \text{ بازاء})$$

۵ . معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$tg(\pi\,tg\,x) = cotg(\pi\,cotg\,x) \qquad (۱)$$

حل : معادله را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$tg(\pi\,tg\,x) = tg(\frac{\pi}{۲} - \pi\,cotg\,x)$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$tg\,x = \frac{۱}{۲} - cotg\,x + k \qquad (۲)$$

(k عددی است صحیح ودلخواه) .

مقادیری از x که بازاء آنها $tg\,x = 0$ است در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین میتوان طرفین معادله را در $tg\,x$ ضرب کرد ، در اینصورت معادلهٔ درجه دومی نسبت به $tg\,x$ که هم‌ارز معادلهٔ (۲) است، بدست‌میآید :

$$2tg^2 x - (2k+1)\,tg\,x + 2 = 0$$

این معادله را نسبت به $tg\,x$ حل می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$tg\,x = \frac{1}{4}\left(2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16} \right) \qquad (3)$$

ازمجموعهٔ‌مقادیر k، باید مقادیری‌راکه بازاء آنها $(2k+1)^2 < 16$ است حذف نمود، این مقادیر عبارتند از ۰ و ۱ ± و ۲ — . علاوه بر آن‌ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) ممکن است ریشه‌های خارجی وارد معادله شده باشد . اینها ریشه‌هائی از معادلهٔ (۲) هستندکه بازاء آنها $tg(\pi\, tg\,x)$ مفهوم خود را ازدست میدهد (به صفحهٔ ۳۴۸ مراجعه کنید) یعنی وقتی که $tg\,x = m + \frac{1}{2}$ باشد (m عددی است صحیح) . از رابطهٔ (۳) همهٔ مقادیر گویائی از $tg\,x$ که مقدارشان بصورت $m + \frac{1}{2}$ است‌حذف می کنیم . ولی‌مقدار $tg\,x$ تنها وقتی‌گویا است که مقدار زیر رادیکال مجذورکامل باشد :

$$(2k+1)^2 - 16 = z^2 \Longrightarrow (2k+1)^2 - z^2 = 16 \qquad (4)$$

که بسادگی بصورت زیر در می‌آید :

$$[(2k+1)+z][(2k+1)-z] = 16 \qquad (5)$$

از معادلهٔ (۴) نتیجه میشود که z عددی است فرد و بنابراین هریك‌از عوامل سمت‌چپ تساوی دررابطهٔ (۵) اعدادی زوج خواهند بود،عدد ۱۶ را به چهار طریق میتوان به‌صورت ضرب دوعدد زوج نوشت :

2×8 ، 4×4 ، $(-2)(-8)$ ، $(-4)(-4)$ و بنابراین حالتهای زیر را خواهیم داشت :

$$(I)\begin{cases}(2k+1)+z=2\\(2k+1)-z=8\end{cases};\quad II\begin{cases}(2k+1)+z=8\\(2k+1)-z=2\end{cases};$$

$$III\begin{cases}(2k+1)+z=4\\(2k+1)-z=4\end{cases};\quad IV\begin{cases}(2k+1)+z=-2\\(2k+1)-z=-8\end{cases};$$

$$V\begin{cases}(2k+1)+z=-8\\(2k+1)-z=-2\end{cases};\quad VI\begin{cases}(2k+1)+z=-4\\(2k+1)-z=-4\end{cases}$$

از این دستگاهها مقادیر قابل قبول زیر برای k بدست می‌آید :

$$2k_1+1=5\Longrightarrow k_1=2 \text{ و } 2k_2+1=-5\Longrightarrow k_2=-3$$

بازاء $k=2$ مقادیر متناظر tgx چنین‌اند :

$$tgx=2 \text{ و } tgx=\frac{1}{2}$$

که از بین آنها $tgx=\frac{1}{2}$ جواب خاص است .

بازاء $k=-3$ جوابهای نظیر tgx چنین‌اند :

$$tgx=-2 \text{ و } tgx=-\frac{1}{2}$$

که $tgx=-\frac{1}{2}$ جواب خاص است .

باین ترتیب مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ مفروض را میتوان با دو رابطهٔ زیر نشان داد :

$$x=\operatorname{arctg}\frac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-15}}{4}+n\pi$$

(که درآن k عدد صحیح دلخواهی است باستثنای ۰ و ۱± و ۲± و ۳−)

و :
$$x=\pm\operatorname{arctg}2+n\pi$$

(ریشه‌های غیر خاصی که بازاء $k=2$ و $k=-3$ بدست می‌آید).

یکی از حالتهای خاص را بعنوان نمونه مورد بحث قرار می‌دهیم ، معادلهٔ مفروض را بصورت زیر مینویسیم :

$$tg(\pi tg\,x)\,tg(\frac{\pi}{tg\,x}) = ۱$$

برای حالت $tg\,x = \frac{۱}{۲}$ یعنی $x = arctg\frac{۱}{۲} + l\pi$ ، فرض می‌کنیم :

$\frac{۱}{tg\,x} = ۲ + \alpha$. در اینصورت $\pi tg\,x = \frac{\pi}{۲+\alpha} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha\pi}{۴+۲\alpha}$ و

$$\lim_{tg\,x \to \frac{۱}{۲}} tg(\pi tg\,x)\,tg(\frac{\pi}{tg\,x}) = \lim_{\alpha \to ۰} tg(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi\alpha}{۴+۲\alpha})\,tg(۲\pi + \pi\alpha)$$

$$= \lim \frac{cos\left(\frac{\pi\alpha}{۴+۲\alpha}\right) tg\,\pi\alpha}{sin\frac{\pi\alpha}{۴+۲\alpha}} = \lim \frac{\pi\alpha}{\frac{\pi\alpha}{۴+۲\alpha}} = ۴ \neq ۱$$

بنابراین مقدار متناظر مجهول ریشهٔ معادلهٔ مفروض نیست .

۴۲. حل معادلات با روش تبدیل

در این بند معادلات مثلثاتی راکه بصورت :

$$F(sin\,x \text{ و } cos\,x \text{ و } tg\,x \text{ و } cotg\,x) = ۰ \qquad (F)$$

باشند ، مورد بحث قرار میدهیم ، که در آن $F(u \text{ و } v \text{ و } w \text{ و } z)$ عبارتی است که بجز آوندهای u وv وw وz شامل آوند دیگری ، بجز پارامترهای احتمالی ، نیست . در حالتهای خاص ، ممکن است معادلهٔ (F) تنها شامل بعضی از توابع مثلثاتی باشد ، نه همهٔ آنها .

حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که معادلهٔ (F) تنها شامل یکی از توابع مثلثاتی باشد. مثلا معادلهٔ زیررا انتخاب می‌کنیم:

$$f(\cos x)=0 \qquad (f)$$

اگر مجهول واسطهٔ $\cos x=t$ را انتخاب کنیم، بدست می‌آید:

$$f(t)=0 \qquad (f_t)$$

معادلهٔ (f_t) را در حوزهٔ اعداد حقیقی و با توجه بشرط $-1<t<1$ حل می‌کنیم، بعبارت دیگردستگاه مختلط زیر را حل می‌کنیم:

$$f(t)=0 \quad , \quad -1<t<1 \qquad (f_t \text{ و } t)$$

هرجواب $t=t_1$ از دستگاه مختلط $(f_t \text{ و } t)$ یك سری از جوابهای (f) را بدست میدهد که باکمك حل یك معادلهٔ ساده بدست می‌آید:

$$\cos x=t_1 \Longrightarrow x=\pm \arccos t_1+2k\pi$$

مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ (f) عبارتست از مجموعهٔ سری جوابهائی‌که از دستگاه مختلط $(f_t \text{ و } t)$ بدست می‌آید و اگر دستگاه مختلطجواب‌نداشته باشد، معادلهٔ مثلثاتی مفروض هم جواب نخواهد داشت.

در حالت خاصی‌که (f) نسبت به‌کسینوس معادله‌ای جبری باشد (که باتحاد تبدیل نشود)، (f_t) هم معادله ای جبری خواهد بود. در اینحالت دستگاه $(f_t \text{ و } t)$ مجموعهٔ جوابهای محدود (و احتمالا تهی) خواهد داشت‌که متناظر با آن معادلهٔ مفروض (f) یاجواب ندارد و یابی‌نهایت جواب داردکه از تعداد محدودی سری تشکیل شده است.

بهمین ترتیب‌معادلهٔ بصورت $f(\sin x)=0$ با تبدیل $\sin x=t$ به‌حل دستگـاه مختلطی منجر میشودکه از آنجـا به حل معادلات سادهٔ مثلثاتی خواهیم رسید.

حل معادلهٔ: $\qquad f(\operatorname{tg} x)=0$

به حل معادلهٔ $f(t)=0$ منجر میشودکه شرط اضافی ندارد، زیـرا

مقدار تانژانت می‌تواند هرمقدار صحیح دلخواه باشد .

حالا معادلهٔ : $F(\sin x, \cos x, tg\, x, cotg\, x) = ۰$

را در نظر می‌گیریم که شامل چند تابع مثلثاتی نسبت به مجهول است . همهٔ توابعی راکه در معادله وجود دارد میتوان بیکی از توابع مثلثاتی‌تبدیل کرد و در نتیجه حل آنرا به حل معادلهٔ (f_1) منجر نمود . ولی روابطی‌که توابع مثلثاتی را بهم تبدیل می‌کنند شامل رادیکال هستند وممکن است بدون این تبدیل برای معادله راه‌حل ساده‌تری وجود داشته باشد ، این راه حلها را باید با تجربه و تمرین بدست آورد .

چند مثال

۱ . این معادله را حل کنید :

$$۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰$$

حل : اگر $\cos x = t$ فرض کنیم ، بدست می‌آید :

$$۲t^۲ + ۳t - ۲ = ۰$$

ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $t = \frac{۱}{۲}$ و $t = -۲$ است . درنتیجه‌معادلهٔ مختلط (۱) تنها یك‌جواب $t = \frac{۱}{۲}$ را دارد . ازآنجا داریم :

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$$

۲ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg^۳ x + tg^۲ x - ۳tg\, x - ۳ = ۰$$

حل : اگر $t = tg\, x$ فرض کنیم ، بدست میآید :

$$t^۳ + t^۲ - ۳t - ۳ = ۰$$

و اگرعبارت سمت چپ را (در حوزه اعداد حقیقی) تجزیه کنیم میشود :

$$(t+۱)(t-\sqrt{۳})(t+\sqrt{۳}) = ۰$$

از آنجا : $tg\, x = -۱$ و $tg\, x = \pm\sqrt{۳}$

و بنابراین*: $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$ و $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

۳ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x+\cos x=1 \qquad (1)$$

حل : کسینوس را به سینوس تبدیل می‌کنیم :

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

اگر $\sin x=t$ فرض کنیم ، معادلهٔ گنگ زیر بدست می‌آید :

$$t\pm\sqrt{1-t^2}=1 \qquad (2)$$

و اگر معادله را گویا کنیم ، میشود :

$$2t^2-2t=0\Longrightarrow t_1=0 \text{ و } t_2=1$$

مقدار $t=\sin x=0$ بازاء $\cos x=1$ در معادله صدق می‌کند . بنابراین جواب $t_1=0$ با مقدار مثبت رادیکال تطبیق می‌کند . ریشه‌های معادلهٔ (۱) که متناظر با جواب $t_1=0$ هستند ، چنین اند :

$$x=2k\pi$$

یعنی از رابطهٔ کلی $x=n\pi$ باید مقادیر فرد n را حذف کرد (مقادیری که بازاء آنها کسینوس برابر ۱ — می‌باشد) .

مقدار $t_2=1$ در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند ، از آنجا $\sin x=1$ و $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ خواهد بود . باین ترتیب دوسری جواب زیر را خواهیم داشت :

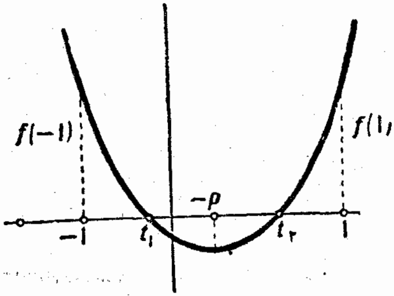
$$x=2k\pi \text{ و } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

۴ . معادلهٔ زیر را مورد بحث قرار دهید :

$$\sin^2 x+2p\sin x+q=0$$

حل : معادله را به دستگاه مختلط زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\begin{cases} t^۲+۲pt+q=۰ & (۱) \\ -۱\leqslant t\leqslant ۱ & (۲) \end{cases}$$



ش ۱۶۵

اگر $\Delta=p^۲-q<۰$ باشد ، معادلهٔ درجه دوم جوابهای حقیقی ندارد ومعادلهٔ مفروض‌هم بدون‌جواب است . در بحثی که در زیر انجام میدهیم همه جا $\Delta\geqslant۰$ یعنی $p^۲\geqslant q$ فرض می کنیم .

حالت اول) هر دو ریشه از معادلهٔ درجه دوم در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] واقع باشد (شکل ۱۶۵) .

در اینحالت، در سمت‌چپ ۱ = t و ۱ − = t قرار می‌دهیم، نامساویهای زیر را بدست می‌آوریم :

$$۱+۲p+q\geqslant۰ \qquad (۳)$$

$$۱-۲p+q\geqslant۰ \qquad (۴)$$

و علاوه بر آن :

$$-۱\leqslant p\leqslant۱ \qquad (۵)$$

و بالاخره :

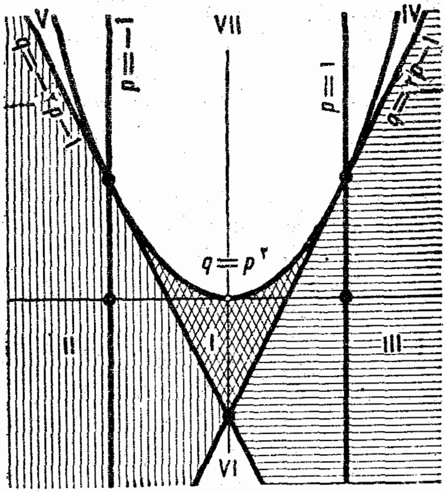
$$q\leqslant p^۲ \qquad (۶)$$

باید دستگاه نامعادلات (۳) تا (۶) را حل کنیم . از روش رسم منحنی استفاده می کنیم (p را طول و q را عرض نقطه در صفحه اختیار می کنیم) .

دوخط $۱\pm۲p+q=۰$ در نقطهٔ (۱ − و ۰) یکدیگر را قطع می کنند و در نقاط (۱ + و ۱ ±) بر سهمی $p^۲=q$ مماس‌اند . درحقیقت اگرمعادلهٔ سهمی را بامعادلهٔ هریك ازدوخط حل کنیم‌به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف‌میرسیم.

نقاط مورد نظر باید : ۱) بالا (یا روی) خط $۱+۲p+q=۰$ و

همچنین بالا (یا روی) خط $1-2p+q=0$ واقع باشند: ۲) در داخل دو خط $p=\pm 1$ باشند . ۳) زیر یا روی سهمی $q=p^2$ واقع باشند . با این شرایط نقاط واقع درحوزهٔ I را (که یك حوزهٔ بسته‌است) خواهیم داشت(شکل ۱۶۶). این نقاط را بشکل تحلیلی بصورت زیر میتوان نشان‌داد:



ش ۱۶۶

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{اگر } -1\leq p\leq 0 \text{ باشد .}\\
\text{باید } -2p-1\leq q\leq p^2 \text{ باشد .}\\
\text{و اگر } 0\leq p\leqslant 1 \text{ باشد .}\\
\text{باید } 2p-1\leq q<p^2 \text{ باشد .}
\end{array}\right\}(\mathrm{I})
$$

برای معادلهٔ مفروض مثلثاتی دو سری جواب وجود داردکه متناظر با دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم است .

حالت دوم) یکی از ریشه‌ها در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ −] واقع است . یکی از دو وضع زیر ممکن است وجود داشته باشد :

$$a)\qquad -1\leq t_1\leq 1<t_2;$$

$$b)\qquad t_1<-1\leq t_2\leq 1$$

برای وضع (a) داریم :

$$1-2p+q\geqslant 0 \qquad (3)$$

$$1+2p+q<0 \qquad (7)$$

نقاط مورد نظر باید : بالا (یا روی) خط $۱-۲p+q=۰$ و زیر خط $۱+۲p+q=۰$ واقع باشند . در اینصورت خود بخود شرط (۶) برقرار خواهد بود و روی شکل، حوزهٔ II بدست میآید. بـرای وضع (b) نامساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$۱-۲p+q<۰ \text{ و } ۱+۲p+q\geqslant ۰$$

که روی شکل حوزهٔ III را مشخص می‌کنند. شرایط مفروض‌را بشکل تحلیلی میتوان چنین نشان داد :

$$\text{a)} \quad p<۰ \text{ و } -۱+۲p\leqslant q<-۲p-۱; \quad (\text{II})$$

$$\text{b)} \quad p>۰ \text{ و } -۱-۲p\leqslant q<۲p-۱ \quad (\text{III})$$

در اینحالت معادلهٔ مثلثاتی مفروض یك سری ریشه داردکه متناظر با تنها ریشهٔ قابل قبول معادلهٔ درجه دوم است .

حالت سوم) هر دو ریشهٔ سه جمله‌ای درجه دوم (۱) درخـارج فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] واقع است‌که در اینصورت استقرار ریشه ها بیکی از سه صورت زیر خواهد بود :

$$\text{a)} \quad t_۱\leqslant t_۲<-۱<۱; \qquad \text{b)} \quad -۱<۱<t_۱\leqslant t_۲;$$

$$\text{c)} \quad t_۱<-۱<۱<t_۲.$$

در وضع (a) نامساویهای زیر راخواهیم داشت :

$$۱+۲p+q>۰; \quad ۱-۲p+q>۰; \quad p>۱$$

در شکل ۱۶۶ حوزهٔ IV بدست میآید . بهمین ترتیب در وضـع (b) حوزهٔ V بدست میآید .

در وضع (c) نامساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$۱+۲p+q<۰; \qquad ۱-۲p+q<۰$$

و در شکل ۱۶۶حوزهٔ VI بدست می‌آید. در این‌مورد شرایط‌تحلیلی زیر را خواهیم داشت :

$$\text{a)} \quad ۱<p<+\infty; \qquad ۲p-۱<q<p^۲;$$

$$b)\quad -\infty < p < -1\,;\quad -2p-1 < q < p^2\,;$$

$$c)\quad -\infty < q < -1\,;\quad \frac{q+1}{2} < p < -\frac{q+1}{2}$$

در این حالت معادلهٔ مثلثاتی جواب ندارد .

وقتی که نقطهٔ (p و q) بالای سهمی باشد (حوزهٔ VII) ، معادلهٔ درجه دوم ریشه‌های موهومی دارد و معادلهٔ مثلثاتی بدون جواب است .

۴۳. گویانش معادله

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$R(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } \ldots) = 0$$

که نسبت به توابع مثلثاتی واقع در سمت چپ تساوی گویا است . اگر گویانش عبارت R معلوم باشد ، یعنی بتوان تمام توابع مثلثاتی را که در R وجود دارد بصورت توابع گویائی از آوند مشروط t نوشت ، دراینصورت با استفاده از این تبدیل، میتوان معادله را به‌معادله ای که نسبت به t گویا است منجر کرد .

بر اساس آنچه در بند ۳۰ برای گویانش عبارتهای مثلثاتی گفتیم ، روشهای زیر را برای گویانش معادلات مثلثاتی متذکر میشویم .

I . تبدیل عمومی $t = tg\frac{x}{2}$، همهٔ معادلات‌ازنوع:

$$R(\cos x \text{ و } \sin x \text{ و } tg\,x \text{ و } cotg\,x) = 0 \qquad (R)$$

را ، که نسبت به توابع مثلثاتی آوند x گویاست ، منجر به معادلهٔ گویائی نسبت به به t می‌کند . هر جواب (حقیقی) $t = t_1$ از معادلهٔ (R)

(بعد از تبدیل) یک‌سری از جوابهای معادلهٔ مثلثاتی را بدست میدهد :

$$x=2\operatorname{arc}tg\, t_1+2k\pi$$

با این تبدیل عمومی، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ (R) بدست می‌آید ، بجز ریشه‌هائی‌که بصورت $x=(2k+1)\pi$ باشند (حالتی‌که $tg\frac{x}{2}$ وجودندارد).

وجود یا عدم وجود ریشه‌های اخیر را میتوان مستقیماً آزمایش نمود .

از تبدیل عمومی برای حل معــادلهٔ خطی نسبت به سینوس وکسینوس استفاده می‌کنیم :

$$a\sin x+b\cos x=c \qquad (1)$$

(که در آن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ است) .

اگر $tg\frac{x}{2}=t$ بگیریم ، بدست می‌آید :

$$\frac{2at+b(1-t^2)-c(1+t^2)}{1+t^2}=0$$

که اگر به $\frac{1}{1+t^2}$ ساده کنیم ، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم :

$$(c+b)t^2-2at+c-b=0$$

اعداد بصورت $x=(2k+1)\pi$ وقتی در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند که $-b=c$ باشد ، بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول) $b\neq -c$. در اینحالت معادلهٔ درجه دوم درحوزهٔ اعداد مختلط ، دو جواب زیر را دارد :

$$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}$$

اگر $a^2+b^2\geqslant c^2$ باشد ، معادلهٔ درجه دوم دو ریشهٔ حقیقی دارد و جواب عمومی معادلهٔ مفروض چنین است :

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b} + 2k\pi$$

اگر $c^2 > a^2+b^2$ باشد ، معادلهٔ (۱) دارای جواب نیست، زیرا ریشه‌های معادلهٔ (۲) موهومی است .

حالت دوم) $b = -c$. در اینحالت معادلهٔ مفروض سری جوابهای زیر را قبول دارد :

$$x = (2k+1)\pi$$

معادلهٔ (۲) به معادله‌ای درجه اول تبدیل می‌شود ، که از آن سری دوم جوابها بدست می‌آید :

$$x = -2\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a} + 2k\pi$$

II . معادلهٔ $R(\cos x \text{ و } \sin x) = 0$ که شامل توانهای زوج $\cos x$ (یا $\sin x$) باشد با تبدیل زیر گویا میشود :

$$t = \sin x \quad (\text{یا } t = \cos x)$$

III . معادلهٔ :

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ همگن مثلثاتی نامیده میشود .

حالت اول) $a_0 \neq 0$

طرفین معادلهٔ (۱) را در $\frac{1}{\cos^n x}$ ضرب می‌کنیم : بدست می‌آید :

$$a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0 \qquad (2)$$

از آنجاکه $\frac{1}{\cos x} \neq 0$ است ، این تبدیل منجر به جوابهای خارجی نمی‌شود . معادلهٔ (۲) در همان حوزهٔ معادلهٔ (۱) معین است ، زیرا اگرچه سمت‌چپ معادلهٔ (۲) بازاء مقادیر $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مفهوم‌خود را ازدست‌می‌دهد

و سمت چپ معادلهٔ (۱) بازاء همهٔ مقادیر x دارای مفهوم است ، ولی هیچیك

از اعداد $\frac{\pi}{2}+k\pi$ در معادلهٔ (۱) صدق نمی کنند . درحقیقت اگر درمعادلهٔ

(۱) فرض کنیم $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ به‌رابطهٔ متناقض $\cos x=\sin x=0$ میرسیم،

باین ترتیب معادلات (۱) و (۲) هم‌ارزند .

حالت دوم) چند ضریب اولیه مساوی صفرند :

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0 \quad \text{ولی} \quad a_k\neq 0$$

در اینحالت معادله بصورت زیر در می‌آید :

$$\cos^k x(a_k\sin^{n-k}x+a_{k+1}\sin^{n-k-1}x\cos x+\cdots+$$
$$+a_n\cos^{n-k}x)=0$$

که هم‌ارز با دو معادلهٔ زیر است :

$$\cos x=0\ ;\ a_k\sin^{n-k}x+a_{k+1}\sin^{n-k-1}x\cos x+\cdots$$
$$+a_n\cos^{n-k}x=0$$

معادله اول ، معادله‌ای ساده ومعادلهٔ دوم همان‌حالت اول است .

تبصره. معادلات همگن را میتوان با تبدیل $t=\operatorname{cotg}x$ هم به معادلات جبری تبدیل کرد ، دراینجا بعضی از معادلات مثلثاتی راکه منجر بمعادلات همگن میشوند ، ذکر می کنیم :

۱°. $$a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=d$$

کافی است سمت راست معادله را به $d(\sin^2x+\cos^2x)$ تبدیل کنیم‌تا به معادلهٔ همگن درجهٔ دوم تبدیل شود .

۲°.

$$a\sin^4x+b\sin^3x\cos x+c\sin^2x\cos^2x+d\sin x\cos^3x+\cos^4x=0$$

کافی است سمت راست معادله را به $f(\sin^2x+\cos^2x)^2$ تبدیل کنیم تا معادلهٔ همگن درجهٔ چهارم بدست آوریم .

۳°. $a\sin^2 x + b\sin 2x + c\cos 2x + d\cos^2 x = e$

کافی است $\sin 2x$ و $\cos 2x$ را طبق روابط معلوم و e را به صورت $e(\sin^2 x + \cos^2 x)$ تبدیل کنیم تا معادلهٔ همگن درجهٔ دوم بدست آوریم .

چندمثال .

۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(\cos x - \sin x)(2tg x + \sec x) + 2 = 0$$

حل : از تبدیل عمومی $(tg\frac{x}{2} = t)$ استفاده می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$-\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(1+t^2)(1-t^2)} = 0 ;$$

ازآنجا (با تبدیل صورت کسر به‌ضرب) :

$$(3t^2 - 1)(t^2 + 2t + 3) = 0$$

ریشه‌های حقیقی معادلهٔ اخیر چنین‌اند :

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

معادلهٔ مفروض ریشه‌هائی بصورت $(2k+1)\pi$ ندارد و بنابراین‌سری فوق جواب کلی معادله است .

۲ . این معادله را حل کنید :

$$3 - 7\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x = 0$$

حل : $t = \sin x$ فرض می‌کنیم و $\cos^2 x$ را به $1 - t^2$ تبدیل‌می‌کنیم.

در اینصورت معادلهٔ درجه سوم زیر را خواهیم داشت :

$$4t^3 - 7t + 3 = 0$$

معادلهٔ اخیر دارای سه ریشهٔ حقیقی زیر است :

$$t_1 = 1 ;\ t_2 = \frac{1}{2} \text{ و } t_3 = -\frac{3}{2}$$

که شرط $|t| < 1$ تنها در مورد دو ریشهٔ اول صدق می‌کند .ازآنجا :

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{و} \quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$$

۳ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}=1+\sin 2x$$

حل : برای گویانش معادله کافی است $tg\,x=t$ فرض کنیم ، داریم :

$$\frac{1+t}{1-t}=1+\frac{2t}{1+t^2}$$

از آنجا : $2(1+t)t^2=0$

و معادلهٔ اخیر دارای دو ریشهٔ متمایز زیر است :

$$t=-1 \quad \text{و} \quad t=0$$

از آنجا : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \text{و} \quad x=k\pi$

۴ . این معادله را حل کنید :

$$5\cos 2x=4\sin x$$

حل : چون معادله نسبت به $\sin x$ گویاست :

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x$$

بنابراین ، برای گویانش معـادله کافی است $t=\sin x$ فرض کنیم ، در اینصورت بدست می‌آید :

$$10t^2+4t-5=0$$

از آنجا : $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+50}}{10}=\sin x$

و : $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{-2\pm\sqrt{54}}{10}+n\pi$

۵ . معادلهٔ همگن زیر را حل کنید :

$$2\sin^3x-\sin^2x\cos x+2\sin x\cos^2x-\cos^3x=0$$

حل : طرفین معادله را بر $cos^3 x$ تقسیم و $tg x = t$ فرض می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$$

سمت چپ تساوی را بصورت ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$(t^2+1)(2t-1)=0$$

این معادله یك ریشهٔ حقیقی $t=\frac{1}{2}$ دارد که سری جوابهای زیررا می‌دهد:

$$x = arctg\frac{1}{2} + k\pi$$

٦ . این معادله را حل کنید :

$$6 sin^2 x + 3 sin x cos x - 5 cos^2 x = 2$$

حل : طرف راست تساوی را بصورت $2 cos^2 x + 2 sin^2 x$ می‌نویسیم، سپس همهٔ جملات را بسمت چپ تساوی می‌بریم ، معادلهٔ همگن زیر بدست می‌آید :

$$4 sin^2 x + 3 sin x cos x - 7 cos^2 x = 0$$

اگر $t = tg x$ فرض کنیم ، بدست می‌آید :

$$4t^2 + 3t - 7 = 0 \Longrightarrow t_1 = -\frac{7}{4} \text{ و } t_2 = 1$$

و بنابراین :

$$x = -arctg\frac{7}{4} + k\pi \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

۷ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$sin 2x = cos 2x - sin^2 x + 1$$

حل : معادله را بصورت زیر تبدیل می‌کنیم :

$$2 sin x cos x = (cos^2 x - sin^2 x) - sin^2 x + (cos^2 x + sin^2 x)$$

یا :

$$sin^2 x + 2 sin x cos x - 2 cos^2 x = 0$$

$tg x = t$ فرض می‌کنیم :

$$t^2 + 2t - 2 = 0 \Longrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$$

و :

$$x = arctg(-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi$$

۸ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$$

حل : دو جملهٔ اول را بصورت مربع یك دوجمله‌ای تبدیل می‌کنیم :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

معادلهٔ مفروض بصورت زیر درمی‌آید :

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1 + a) = 0$$

اگر $t = \sin 2x$ فرض کنیم ، معادلهٔ درجه دوم زیررا خواهیم‌داشت:

$$t^2 - 2t - 2(a+1) = 0$$

که درحوزهٔ اعداد مختلط ریشه‌های زیر را قبول‌دارد :

$$t = 1 \pm \sqrt{2a+3} \qquad (1)$$

مقادیر t وقتی‌حقیقی هستند که $2a+3 \geqslant 0$ یا $a \geqslant -\frac{3}{2}$ باشد .

به‌بینیم بازاء چه مقادیری از a ریشه‌های این معادله در شرط $|t| \leqslant 1$ صدق می‌کنند .

نصف مجموع ریشه‌ها برابر واحد است : $\frac{t_1 + t_2}{2} = 1$ و بنابراین داریم :

$$t_1 \leqslant 1 \leqslant t_2$$

ریشه‌ها وقتی برابرند که $a = -\frac{3}{2}$ باشد که درآنحال $t_1 = t_2 = 1$ خواهد بود .

اگر $a > -\frac{3}{2}$ باشد ، داریم $t_1 < 1 < t_2$. ریشهٔ بزرگترقابل قبول نیست وریشهٔ کوچکتر تنها وقتی قابل قبول است که عدد -1 درخارج‌ریشه‌ها و یامساوی ریشهٔ کوچکتر باشد . اگر $t = -1$ را در سمت چپ معادلهٔ (۱) قرار دهیم ، شرط مورد نظر بدست می‌آید :

$$۱-۲a \geqslant ۰ \Longrightarrow a \leqslant \frac{۱}{۲}$$

باین ترتیب اگر $-\frac{۳}{۲} \leqslant a \leqslant \frac{۱}{۲}$ باشد ، معادلهٔ مفروض جواب کلی زیر را دارد :

$$x=(-۱)^n \arcsin(۱-\sqrt{۲a+۳})+n\pi$$

و بازاء مقادیری از a که در خارج فاصلهٔ بستهٔ $[-\frac{۳}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۲}]$ واقع باشند معادله دارای جواب نیست .

۴۴ . دربارهٔ تبدیل جواب عمومی معادلهٔ مثلثاتی

در بسیاری از موارد عملی به حالتهائی برخورد می‌کنیم که جواب عمومی معادلهٔ مثلثاتی از مجموعهٔ نامحدود جوابهای خاص تشکیل شده و میتواند به‌کمك چندسری محدود بیان‌شود* . تبدیل جواب عمومی به‌سریها، به‌طرق مختلف‌میتواند انجام گیرد و بهمین مناسبت جواب عمومی معادلهٔ‌مثلثاتی را هم میتوان بصورت روابط متفاوتی نوشت . فرض‌کنیدمثلا یك سری جواب بوسیلهٔ رابطهٔ زیر معین شده باشد :

$$x=f(n) \qquad \text{(} n \text{ پارامتری است صحیح)}$$

اگراعداد صحیح‌را، دو دستهٔ‌زوج وفرد : $n=۲k$ و $n=۲k_۱+۱$ تقسیم‌کنیم ، میتوان سری مفروض را به دو سری زیر تقسیم‌کرد :

$$x=f(۲k) \;;\; x=f(۲k_۱+۱) \;;$$

---

*) این‌حکم‌کلی نیست ، زیرا معادلات مثلثاتی وجود داردکه مجموعهٔ جوابهای آن محدود (و نه‌تهی) است . (مثال ۴ صفحهٔ ۳۲۷ را به‌ببینید) . در این بند صحبت از قواعدکلی نخواهد بود، بلکه به بعضی اشارات عملی درمورد تبدیل جوابهای عمومی اکتفا خواهد شد .

میتوان سری مفروض را به سه سری تقسیم کرد ، مثلا باین ترتیب :

$$x=f(3k)\ ;\ x=f(3k+1)\ ;\ x=f(3k+2)\ .$$

گاهی باین وضع هم برخورد می‌کنیم که میتوان چند سری را در یك سری متمرکز کرد ، یعنی چندرابطه را بوسیلهٔ یك رابطه بیان نمود. همچنین ممکن‌است یك‌سری، جزئی ازسری دیگر باشد ودرحالتیکه هردوسری بعنوان جوابهای عمومی یك معادله بدست آمده‌اند ازسری جزئی صرفنظر نمود .

ما فقط حالتی را مورد مطالعه قرار میدهیم که جواب عمومی معادلهٔ مثلثاتی از مجموعهٔ محدود تصاعدهای حسابی دوجانبی (که ازدو طرف‌امتداد دارند) تشکیل شده باشد* . تصاعد حسابی دو جانبی‌زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a+nd)\quad \dots \text{ و } a+nd \text{ و } \dots \text{ و } a+d \text{ و } a \text{ و } a-d \text{ و } a-2d \text{ و } \dots$$

۱° . اگر یکی ازجملات این تصاعد راجملهٔ اول تصاعدجدیدی بگیریم (جملهٔ اول را متناظر با $n=0$ در نظر گرفته ایم) ومثلا فرض کنیم $b=a+kd$ (k عددی است صحیح) ، دراینصورت تصاعد :

$$(b+ld)\quad \dots \text{ و } b+ld \text{ و } \dots \text{ و } b+2d \text{ و } b+d \text{ و } b \text{ و } b-d \text{ و } \dots$$

از همان‌جملات تصاعد اول تشکیل شده است . درحقیقت داریم :

$$a+nd=(a+kd)+(n-k)d=b+(n-k)d$$

یعنی جملهٔ $a+nd$ که در تصاعد اول در ردیف n قرارگرفته ، در تصاعد دوم در ردیف $n-k$ واقع است و بطورکلی جملهٔ عمومی $b+ld=a+(l+k)d$ از تصاعد دوم ، جملهٔ $(l+k)$ ام از تصاعد اول است .

مثلا جواب عمومی معادلهٔ سادهٔ $tg\,x=-\sqrt{3}$ را میتوان بصورت $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ و یا $x=\frac{2\pi}{3}+n\pi$ نوشت (در اینجا $k=n+1$است) .

---

*) درکتابهای درسی متوسطه هم معمولا بهمین‌حالت اکتفا می‌کنند .

۲°. اگر $\delta=kd$ باشد ، جملات تصاعد :

$(a+n\delta)$ $\qquad \dots$ و $a+2\delta$ و $a+\delta$ و a و $a-\delta$ و $a-2\delta$ و $\dots$

شامل جملات تصاعد $(a+nd)$ میشوند . درحقیقت داریم :

$a+n\delta=a+nkd$ ، یعنی n امین جملهٔ تصاعد $(a+n\delta)$ جملهٔ nkام تصاعد $(a+nd)$ خواهد بود .

مثلا جواب عمومی معادلهٔ :

$$\sin x \cdot \sin 3x = 0$$

از دو تصاعد تشکیل شده است :

$$x=k\pi \quad \text{و} \quad x=n\frac{\pi}{3}$$

جملات تصاعد اول ، ضمن جملات تصاعد دوم وجود دارد ، بنابراین جواب عمومی را میتوان بصورت $x=\frac{n\pi}{3}$ (اینجا $\delta=3d$) نوشت .

۳°. اگر k عددی صحیح باشد ، جملات تصاعد $(a+nd)$را میتوان به k تصاعد حسابی بصورت زیر تقسیم کرد :

$\dots,\ a-kd,$	$a,$	$a+kd,$	$\dots\ (a+nkd)$
$\dots,\ (a+d)-kd,$	$a+d,$	$(a+d)+kd,$	$\dots\ [(a+d)+nkd]$
$\dots,\ (a+2d)-kd,$	$a+2d,$	$(a+2d)+kd,$	$\dots\ [(a+2d)+nkd]$
$\dots,\ [a+(k-1)d]-kd,$	$a+(k-1)d$	$[a+(k-1)d]+kd,$	$\dots\ [a+(k-1)d+nkd]$

k تصاعدی که باین‌ترتیب نوشته‌ایم از همان جملات تصاعد$(a+nd)$ تشکیل شده‌اند . ضمناً هرجمله از تصاعد $(a+nd)$ را میتوان بین جملات یکی از این تصاعدها پیدا کرد. درحقیقت اگر در تقسیم n بر kداشته باشیم: $n=sk+r$ (که در آن r مساوی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... و $k-1$ است) ، در اینصورت جملهٔ $a+nd$ در r امین تصاعد در ردیف s خواهد بود .

همچنین روشن است که اگر k تصاعد با قدر نسبت مشترك kd داشته باشیم که شامل جملات a ، $a+d$ ، $a+2d$ ، ... ، $a+(k-1)d$باشند

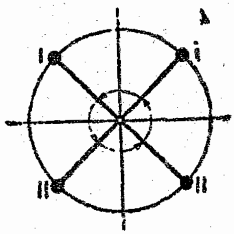
(هریك از این جملات ممکن است تنها در یك تصاعد وجود داشته باشد) ، در اینصورت میتوان همهٔ این تصاعدها را در یك تصاعد با قدر نسبت d متمرکز کرد . تبدیلهای مختلف جوابهای عمومی معادلات مثلثاتی را معمولا براساس خواص ۱° و۲° و۳° تصاعدهای حسابی انجام می‌دهند ، بـرای اینکه این تبدیلات محسوس باشد ، میتوان جوابهای خـاص سریهای مختلف را بوسیلهٔ نقاط واقع بر دایرهٔ واحد و یا نقاط واقع بریك محور نشان داد .

چند مثال

۱ . جوابهای کلی معادلهٔ $2\sin^2 x = 1$ را میتوان بوسیلهٔ روابط زیر نشان داد :

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi \ \text{(I)} \quad \text{و} \quad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi \quad \text{(II)}$$

(در شکل ۱۶۷ عددهای رومی نمایندهٔ سری مربوطه جوابهاست) . جوابهای کلی را به چهار تصاعد حسابی تقسیم می کنیم :



ش ۱۶۷

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ -\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}$$

$$\text{و}\ x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \quad (\text{خاصیت } 1^\circ) \\ \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}$$

هر چهار تصاعد را میتوان در یك تصاعد زیر متمرکز کرد :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \qquad (\text{خاصیت } 3^\circ)$$

سریهای I و II را میتوان بصورت زیر هم نشان داد :

$$x=\pm\frac{\pi}{۴}+k\pi=(۴k\pm۱)\frac{\pi}{۴}$$

دو تصاعد $(۴k+۱)$ و $(۴k-۱)$ عبارتند ازمجموعهٔ همهٔ اعدادفرد $(۲n+۱)$ (بازاء $n=۲k$ تصاعد اول و بازاء $n=۲k-۱$ تصاعد دوم بدست می‌آید) و ازآنجا :

$$x=(۲n+۱)\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}+n\frac{\pi}{۲}$$

۲. جوابهای عمومی معادله‌ای که درصفحهٔ ۳۳۵ (مثال $۱-a$) بحث کردیم ، بر اساس خاصیت ۱° میتواند بصورت زیر نوشته شود :

$$x=\pm ۱۸^\circ ۲۶'-۲۲^\circ ۳۰'+۱۸۰n^\circ=$$

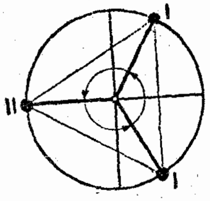
$$=\begin{cases}-۴^\circ ۴'+۱۸۰n^\circ\\ -۴۰^\circ ۳۶'+۱۸۰n^\circ\end{cases}=\begin{cases}۱۷۵^\circ ۵۶'+۱۸۰n^\circ\\ ۱۳۹^\circ ۲۴'+۱۸۰n^\circ\end{cases}$$

۳. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^۲x-\cos^۲x=\cos x$$

حل : $t=\cos x$ فرض می‌کنیم ؛ بدست می‌آید :

$$۲t^۲+t-۱=۰\Longrightarrow t_۱=\frac{۱}{۲} \text{ و } t_۲=-۱$$



ش ۱۶۸

بنابراین دوسری جواب بدست می‌آید :

$$x=\pm\frac{\pi}{۳}+۲k\pi \text{ و } x=(۲k+۱)\pi$$ (شکل ۱۶۸)

سه تصاعد حسابی را که بـاین ترتیب بدست آمده است میتوان در یك تصاعد متمرکز کرد :

$$x=\begin{cases}-\frac{\pi}{۳}+۲k\pi\\ \frac{\pi}{۳}+۲k\pi\\ \pi+۲k\pi\end{cases}=\begin{cases}-\frac{\pi}{۳}+۲k\pi\\ (\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})+۲k\pi\\ (\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})+۲k\pi\end{cases}=$$

$$=-\frac{\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۳}$$

۴. جوابهای عمومی معادلهٔ :

$$\sin\frac{x}{۳}\sin\frac{x}{۵}=۰$$

از دو تصاعد حسابی تشکیل شده است.:

$$x=۳k\pi \text{ و } x=۵l\pi$$

ولی این دو تصاعد دارای جملات مشترکی هستند ؛ وقتی‌که kمضربی از ۵ باشد، جملات تصاعد اول در تصاعد دوم و وقتی lمضرب۳ باشد، جملات تصاعد دوم در تصاعد اول وجود دارد . جوابهای عمومی را میتوان بوسیلهٔ هفت تصاعد نشان داد که دوبدو جملهٔ مشترك نداشته باشند :

$$x=۱۵k\pi;\ x=۳\pi(۵k+۱);\ x=۳\pi(۵k+۲);$$
$$x=۳\pi(۵k+۳)\ ;\ x=۳\pi(۵k+۴)\ ;\ x=۵\pi(۳k+۱)\ ;$$
$$x=۵\pi(۳k+۲).$$

و این تصاعدها را هم میتوان بصورت چهارسری زیر نوشت :

$$x=۱۵k\pi\ ;\ x=۳\pi(۵k\pm۱)\ ;\ x=۳\pi(۵k\pm۲)\ ;$$
$$x=۵\pi(۳k\pm۱);$$

۵. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۲\cos^۲۴x+\sin^۲۳x=۱$$

حل : برای گویا کردن معادله $t=\cos۲x$ می‌گیریم، بدست‌می‌آید :

$$۲\cos^۲۴x=۲(۲t^۲-۱)^۲=۸t^۴-۸t^۲+۲\ ;$$

$$\sin^2 3x=\frac{1}{2}(1-\cos 6x)=\frac{1}{2}[1-\cos(3\times 2x)]=\frac{1}{2}\times$$

$$\times(1-4\cos^3 2x+3\cos 2x)=\frac{1}{2}-2t^3+\frac{3}{2}t$$

درنتیجه معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$16t^4-4t^3-16t^2+3t+3=0\Longrightarrow(4t^2-3)(4t^2-t-1)=0$$

$$\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8};$$

بنابراین داریم :

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi \quad ; \quad x=\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi \;;$$

$$x=\pm \arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}+2k\pi.$$

دوسری جوابهای اول را میتوان بصورت یكسری جواب نوشت . داریم :

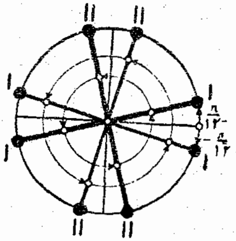
$$x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\[2mm] -\dfrac{\pi}{12}+k\pi\end{cases} \qquad (I)$$

$$x=\begin{cases}\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\\[2mm] -\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{cases}=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)+k\pi\\[2mm] \left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)+k\pi\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{12}+(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{\pi}{12}+(2k-1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \qquad (II)$$

چهار تصاعد با قدر نسبت π را میتوان بصورت دو تصاعد با قدر نسبت

$\frac{\pi}{2}$ نوشت :



ش ۱۶۹

$$x=\begin{cases}\frac{\pi}{12}+n\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{12}+n\frac{\pi}{2}\end{cases}=\pm\frac{\pi}{12}+n\frac{\pi}{2}$$

مطالبی را که گفتیم میتوان در شکل ۱۶۹ بروشنی دید .

۴۵ . نمونه‌های خاص حل معادلات مثلثاتی

I . اگر سمت چپ معادلهٔ :

$$f(x, y, \ldots, z)=0$$

بصورت ضرب تبدیل شود :

$$f(x,y,\ldots, z)=f_1(x,y,\ldots,z)f_2(x,y,\ldots,z)\ldots f_n(x,y,\ldots,z)$$

کافی است هریك از معادلات :

$$f_1=0\;;\quad f_2=0\;;\;\ldots\;;\;f_n=0 \qquad (f_i)$$

را حل کرد و سپس جوابهای عمومی همهٔ این معادلات را در یك مجموعه متمرکز کرد .

دراین روش حل، ممکن است حالتهای خاص ظاهر شود . جوابهای خاص عبارت ازجوابهای یکی‌از معادلات (f_i) هستند که بازاءآنها یکی دیگر از معادلات (f_i) مفهوم نداشته باشد .

اگر اصل عبور حدی مورد قبول نباشد، تمام جوابهای خاص بعنوان جوابهای خارجی بحساب می‌آیند و باید از مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ (f_i) حذف شوند .

اگر اصل عبور حدی مورد قبول باشد ، در اینصورت باید حد تابع $f(x, y, \ldots, z)$ را برای هریك ازجوابهای خاص بدست آورد .

برای حل معادلات مثلثاتی ، اغلب از روابط تبدیل مجموع به صورت ضرب (روابط تبدیل به عبارتهای قابل محاسبهٔ لگاریتمی ـ بند ۲۶) استفاده می‌شود .

چند مثال .

۱. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

حل : سمت‌چپ تساوی را تبدیل می‌کنیم :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x =$$

$$= 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\sin x\cos x(2\cos x + 1)$$

سمت راست تساوی را هم تبدیل می‌کنیم :

$$1 + \cos x + \cos 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x =$$

$$= \cos x(2\cos x + 1)$$

همهٔ جملات را به سمت‌چپ تساوی برده ومعادله را بصورت‌زیر می‌نویسیم:

$$(2\cos x + 1)\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$$

۲. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

حل : پس از انتقال همهٔ جملات به سمت چپ تساوی به صورت ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = (\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) +$$

$$+ \sin^2 2x = -4\cos 2x\sin x\sin 2x\cos x + \sin^2 2x =$$

$$= -2\cos 2x\sin^2 2x + \sin^2 2x = \sin^2 2x(1 - 2\cos 2x).$$

معادلهٔ مفروض به دو معادله تبدیل میشود :

$$\sin 2x = 0 \text{ و } 2\cos 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ و } x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$$

۰۳ این معادله را حل کنید :

$$\sin 2x \cos x \, tg\, x = 0$$

حل : هریك از عوامل را مساوی صفر قرار می‌دهیم، بدست می‌آید :

$$x = k\frac{\pi}{2} \; ; \; x = \frac{\pi}{2} + l\pi \; ; \; x = n\pi$$

سری دوم وسوم جوابها در سری اول وجود دارد وداریم : $x = k\frac{\pi}{2}$.
وقتی که k عددی فرد باشد ، حالت خاص خواهیم داشت ومجموعهٔ همهٔ جوابهای غیر خاص را میتوان بصورت $x = n\pi$ نوشت .

از اصل عبورحدی استفاده می‌کنیم، وقتی که $k = 2n + 1$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \to \frac{2n+1}{2}\pi} (\sin 2x \cos x \, tg\, x) = \lim (\sin 2x \sin x) = 0$$

بنابراین $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ هم‌جزو جوابهای معادله هستند (جوابهای خاص) و رابطهٔ $x = \frac{k\pi}{2}$ معرف مجموعهٔ همهٔ جوابهای معادلهٔ مفروض‌است (مجموعهٔ جوابهای خاص و غیر خاص) .

II . درتمرینات از ۴ تا ۷ نمونه‌هائی ازموارد استعمال قضایای‌مجموع و نتایج آن (تبدیل ضرب به مجموع ، روابط مضرب قوسها و غیره) در حل معادلات مثلثاتی آمده است .

۴ ۰ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x + 2\sin x \cos(a - x) - \sin a = 0$$

حل : اگر جملهٔ دوم را به مجموع تبدیل کنیم ، معـادله بصورت زیر درمی‌آید :

$$\sin x+\sin(2x-a)=0\Longrightarrow \sin(2x-a)=\sin(-x)$$

$$2x-a=(-1)^{n+1}x+n\pi\Longrightarrow x=\frac{a+n\pi}{2+(-1)^n}$$

۵ . این معادله را حل کنید :

$$\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$$

حل : هردو طرف تساوی را به مجموع تبدیل می کنیم :

$$\frac{\cos 6x-\cos 8x}{2}=\frac{\cos 2x-\cos 8x}{2}\Longrightarrow \cos 6x=\cos 2x$$

از آنجا : $6x=\pm 2x+2k\pi\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ و $x=\frac{n\pi}{4}$

وقتی n عددی زوج باشد ، جوابهای سری دوم ، همان‌جوابهای سری اول خواهد بود و بنابراین جواب عمومی‌معادلهٔ مفروض بارابطهٔ $x=\frac{n\pi}{4}$ بیان میشود .

٦ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\cos(x-a)=m\sin x-n\cos x$$

حل : سمت چپ تساوی را طبق رابطهٔ $(C_{\alpha-\beta})$ تبدیل می کنیم ، معادلهٔ مثلثاتی درجه اول وهمگن زیر بدست می‌آید :

$$(\cos a+n)\cos x+(\sin a-m)\sin x=0\ ;$$

اگر $m\neq\sin a$ باشد ، داریم :

$$\operatorname{tg}x=\frac{\cos a+n}{m-\sin a}\Longrightarrow x=\operatorname{arctg}\frac{\cos a+n}{m-\sin a}+k\pi\ ;$$

و اگر $m=\sin a$ و $n\neq-\cos a$ باشد $\cos x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ میشود.

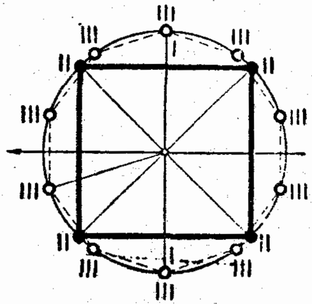
وقتی که $m=\sin a$ و $n=-\cos a$ باشد، معادلهٔ مفروض بیك اتحاد تبدیل میشود .

۷ . این معادله را حل کنید :

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$$

حل : با استفاده از رابطهٔ $(C_{2\alpha})$ به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0$$


ش ۱۷۰

مجموع دوجملهٔ اول را باهم ومجموع دوجملهٔ آخر راباهم به صورت ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$\cos 3x\cos x+\cos x\cos 7x=0$$

یا : $\cos x(\cos 3x+\cos 7x)=0$

و بالاخره : $\cos x\cos 2x\cos 5x=0$

از آنجا سه سری جواب بدست‌می‌آید:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\quad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}$$

جوابهای سری اول جزو جوابهای سری سوم وجوددارد (شکل۱۷۰) درحقیقت داریم :

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{5\pi}{10}+5k\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}+5k\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{10}+(5k+2)\frac{\pi}{5}$$

جواب کلی از دوسری تشکیل شده است :

$$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}$$

III . در تمرینات از ۸ تا ۱۰ نمونه‌هائی ازحل معادلات مثلثاتی به کمك زوایای کمکی داده شده است .

۸ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(a\neq 0 \text{ و } b\neq 0)\qquad a\sin x+b\cos x=c \qquad (1)$$

حل : زاویهٔ کمکی φرا باشرط زیر درنظر می‌گیریم (به بند۲۹مراجعه کنید) :

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

طرفین معادله را بر $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

و بالاخره :

$$x = (-1)^n arcsin\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = n\pi - arctg\frac{b}{a}$$

و معادله باشرط $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$ یا $c^2 \leqslant a^2+b^2$ دارای جواب است .

وقتی‌که $c^2 > a^2+b^2$ باشد ، معادله جواب ندارد .

مثلا معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم و $\varphi = \frac{\pi}{3}$ فرض می‌کنیم ، بدست میآید:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi$$

۰۹. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$a\cos x + b\sin x = a\cos mx + b\sin mx$$

حل : اگر $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ فرض‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$\cos(x-\varphi) = \cos(mx-\varphi) ;$$

از آنجا :

$$mx - \varphi = \pm x \mp \varphi + 2k\pi$$

بنابراین :

$$x = \frac{2k\pi}{m-1} \quad \text{و} \quad x = \frac{2}{m+1}\left(arctg\frac{b}{a} + k\pi\right)$$

(با شرط $m \neq \pm 1$). اگر $m = 1$ باشد، معادله به‌اتحاد تبدیل می‌شود و اگر $m = -1$ باشد ، معادله بصورت $b\sin x = -b\sin x$ درمیاید

در نتیجه‌بافرض $b \neq ۰$ بدست میآید $\sin x = ۰$ و $x = k\pi$.

۱۰ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۳\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)+۴\sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)+۵\sin\left(۵x+\frac{\pi}{۶}\right)=۰$$

حل : با توجه به رابطهٔ تبدیل $\left[\frac{\pi}{۲}-\varphi\right]$ داریم :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۳}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)$$

زاویهٔ کمکی را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\cos\varphi=\frac{۳}{۵} \quad ; \quad \sin\varphi=\frac{۴}{۵} \quad \text{یعنی} \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{۴}{۳}$$

معادلهٔ مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)\cos\varphi+\cos\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)\sin\varphi=-\sin\left(۵x+\frac{\pi}{۶}\right)$$

یا:

$$\sin\left(x+\varphi-\frac{\pi}{۳}\right)=\sin\left(-۵x-\frac{\pi}{۶}\right)$$

از آنجا دوسری جواب بدست می‌آید :

$$x+\varphi-\frac{\pi}{۳}=-۵x-\frac{\pi}{۶}+۲k\pi \Longrightarrow x=\frac{\pi}{۳۶}-\frac{\varphi}{۶}+\frac{k\pi}{۳}$$

$$x+\varphi=۵x+\frac{\pi}{۶}+(۲k+۱)\pi \Longrightarrow x=\frac{\varphi}{۴}-\frac{\pi}{۲۴}+\frac{۲k+۱}{۴}\pi$$

IV . در مثال ۱۱ نمونه‌ای ذکرشده است که پس از تبدیل آن بصورت دو نسبت مساوی وسپس انجام ترکیب نسبت درصورت و تفضیل نسبت درمخرج و بالاخره تبدیل بصورت لگاریتی حل شده است .

۱۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)=۰ \qquad (۱)$$

که در آن $a\neq ۰$ و $b\neq ۰$ و مقادیر α و β بین صفر و ۲π و $\alpha\neq\beta$ است.

حل : داریم :

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}=-\frac{b}{a}$$

اگر $a\neq -b$ باشد میتوان تناسب زیر را تشکیل داد :

$$\frac{\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)-\sin(x+\beta)}=-\frac{a-b}{a+b}$$

صورت ومخرج کسر را به ضرب تبدیل می کنیم :

$$\frac{tg\left(x+\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)}{tg\frac{\alpha-\beta}{۲}}=\frac{b-a}{b+a} \qquad (۲)$$

(باشرط $\frac{\alpha-\beta}{۲}\neq\frac{\pi}{۲}$ یعنی $\alpha\neq\pi+\beta$).

از رابطهٔ (۲) بدست می‌آید :

$$tg\left(x+\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)=\frac{b-a}{b+a}tg\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

و $$x=-\frac{\alpha+\beta}{۲}+arctg\left(\frac{b-a}{b+a}tg\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)+k\pi$$

اگر $a=-b$ باشد، معادلهٔ (۱) باقابل محاسبه لگاریتمی کردن‌سمت چپ تساوی‌حل میشود و احتیاجی به تشکیل تناسب نیست .

اگر $\alpha=\beta+\pi$ باشد ، معادله بصورت زیر درمیآید :

$$a\sin(x+\alpha)-b\sin(x+\alpha)=۰$$

ازآنجا بازاء $a\neq b$ داریم: $\sin(x+\alpha)=۰$ و $x=-\alpha+k\pi$ و بازاء $a=b$ هر مقدار دلخواهی از x در معادله صدق می کند .

V . اگر معادلهٔ :

$$F(x\text{ و }y\text{ و }\ldots\text{ و }z)=\Phi(x\text{ و }y\text{ و }\ldots\text{ و }z) \qquad (F)$$

به معادلهٔ هم ارز خود بصورت زیر تبدیل شود :

$$\frac{f_۱f_۲\cdots f_n}{\varphi_۱\varphi_۲\cdots\varphi_n}=۰ \qquad (f/\varphi)$$

در اینصورت برای‌حل معادلهٔ (F) ، طبق قاعدهٔ کلی ، باید هریك از معادلات زیر را بطور جداگانه حل کرد :

$$f_1=0\ ;\ f_2=0\ ;\ \dots\ ;\ f_n=0$$

و همهٔ جوابهای بدست آمده را در یك مجموعه متمرکز کرد . دراین مورد جوابهای خاص مقادیری از x هستند که بازاء آنهـا بعضی عواملی از صورت و مخرج مفهوم خود را از دست بدهند ، یـا یکی از عوامل مخرج مساوی صفر شود .

چند مثال

۱۲ ، معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{\sin x-\cos x}{tg\, x}=0$$

حل : از معادلهٔ $\sin x-\cos x=0$ بدست میآید : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

حالت خاص در مورد $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ وجود دارد ، در این نقاطجد $\frac{\sin x-\cos x}{tg\, x}$ مساوی صفر است ، بنابراین مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها (خاص‌و غیرخاص) ازدو سری تشکیل شده است :

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ و } x=\frac{2k+1}{2}\pi \qquad (1)$$

اگر سمت‌چپ معادله را تبدیل می‌کردیم ، بدست میآمد :

$$\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x}=0$$

و ازآنجا (با مساوی صفر قرار دادن صورت) هر دوسری جواب (۱) بدست میآید . فقط در این مورد میبایستی ثابت‌کرد که سری دوم جوابهـا ، جوابهای خاص هستند .

۱۳ ، این معادله را حل کنید :

$$tg\, x+tg\, 2x+tg\, 3x=0 \qquad (1)$$

حل : معادله را به ترتیب‌چنین می‌نویسیم :

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0\,;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x+\cos x\cos 2x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0 \qquad (2)$$

صورت کسر را به ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$\cos 3x+\cos x\cos 2x=(4\cos^3 x-3\cos x)+\cos x(2\cos^2 x-1)=$$

$$=2\cos x(3\cos^2 x-2)$$

باین ترتیب معادلهٔ (۲) بصورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{\sin 3x(3\cos^2 x-2)}{\cos 2x\cos 3x}=0$$

از آنجا $\sin 3x=0$ و $3\cos^2 x-2=0$. از این معادله دوسری جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$x=k\frac{\pi}{3}\,;\;\; x=\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+k\pi$$

در این معادله حالتهای خاص وجود ندارد .

۱۴ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)tg\,x\,tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\cos^2 x}{tg\frac{x}{2}-cotg\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

حل : تبدیلات زیر را انجام می‌دهیم :

$$-cotg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)tg\,x\,tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\cos^2 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\cos x}$$

از آنجا : $tg\,x=2\sin x\cos x\,;$

$$\frac{\sin x(1-2\cos^2 x)}{\cos x}=0\Longrightarrow\frac{\sin x\cos 2x}{\cos x}=0 \qquad (2)$$

در نتیجه : $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $x=k\pi$

همهٔ جوابهای بدست‌آمده جزو حالت خاص‌اند . معادله دارای‌دوسری جواب خاص میباشد .

۱۵ . این معادله را حل کنید :

$$(\text{m}^۲+\text{n}^۲\neq ۰) \qquad \frac{\text{m}}{tg\,\text{x}+cotg\,۲\text{x}}=\frac{\text{n}(cos\,\text{x}-sin\,\text{x})}{cotg\,\text{x}-۱}; \qquad (۱)$$

حل : معادله را باینصورت می‌نویسیم :

$$\frac{\text{m}\,cos\,\text{x}\,sin\,۲\text{x}}{cos\,\text{x}}=\frac{\text{n}(cos\,\text{x}-sin\,\text{x})\,sin\,\text{x}}{cos\,\text{x}-sin\,\text{x}};$$

از آنجا :

$$\text{m}\,sin\,۲\text{x}-\text{n}\,sin\,\text{x}=۰ \Longrightarrow sin\,\text{x}(۲\text{m}\,cos\,\text{x}-\text{n})=۰$$

و در نتیجه دو معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$sin\,\text{x}=۰ \quad \text{و} \quad ۲\text{m}\,cos\,\text{x}-\text{n}=۰ \qquad (۲)$$

اولی سری جوابهای (خاص) $\text{x}=\text{k}\pi$ را می‌دهد ومعادلهٔ دوم سری جوابهای زیر را :

$$\text{x}=\pm\text{arc}cos\frac{\text{n}}{۲\text{m}}+۲\text{k}\pi \qquad (۳)$$

(با شرط $|\text{n}|\leqslant|۲\text{m}|$) . و اگر این شرط برقرار نباشد ، معادلهٔ دوم (۲) دارای جواب نخواهد بود .

جوابهای (۳) درحالت‌کلی ، خاص نیستند . میخواهیم به‌بینیم بازاءچه مقادیری از m و n به جوابهای خاص تبدیل می‌شوند .

برای معادلهٔ (۱) ، مقادیرخاص مجهول با شرایط زیر بدست می‌آیند:

$$\text{a)}\quad \text{x}=\frac{\pi}{۲}+\text{k}\pi; \qquad \text{b)}\quad \text{x}=\text{k}\pi\;;$$

$$\text{c)}\quad cotg\,\text{x}=۱\Longrightarrow \text{x}=\frac{\pi}{٤}+\text{k}\pi\;;$$

$$d)\ \ tg\,x + cotg\,۲x = ۰ \Longrightarrow tg\,x = tg(۲x - \frac{\pi}{۲}) \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{۲} + k\pi$$

جوابهای حالت (d) همان‌جوابهای حالت (a) است .

در اینصورت سری جوابهای (۳) وقتی خاص میشوند که داشته باشیم :

$$a)\ \ n = ۰\ ; \qquad b)\ \ n = \pm ۲m\ ;$$

$$c)\ \ n = \pm\sqrt{۲m}\ ; \quad \begin{cases} n = \sqrt{۲m} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۴} + ۲k\pi; \\ n = -\sqrt{۲m} \Longrightarrow x = -\frac{۳\pi}{۴} + ۲k\pi \end{cases}$$

VI . برای حل معادلات مثلثاتی باید روشهائی راکه در بالا ذکر کردیم وسایر روشهای خاصی‌که وجود دارد باهم در نظر گرفت و ازترکیبات مختلف آنها استفاده‌کرد و قدرت استفاده.از این روشها تنها در اثر تمرین طولانی بدست می‌آید . بطوریکه برای ساده‌کردن رشته محاسبات و تبدیلات در یك معادلهٔ مثلثاتی هم نمیتوان قواعدکلی ذکرکرد .

در بسیاری، موارد یك معادلهٔ مثلثاتی را میتوان از راههای مختلف‌حل کردکه امتیاز یکی بر دیگری به نحوهٔ راه حلی‌که انتخاب کرده‌ایم مربوط است ، مثلا معادلهٔ خطی نسبت به سینوس وکسینوس :

$$a\,sin\,x + b\,cos\,x = c$$

را میتوان به طریقه‌های زیرحل‌کرد :

۱°. بوسیلهٔ تبدیل عمومی ($tg\frac{x}{۲} = t$) (صفحهٔ ۳۶۳ را به‌بینید) .

۲°. با استفاده از زاویهٔ‌کمکی (صفحهٔ ۳۸۲) :

$$\pm\sqrt{a^۲+b^۲}\,sin(x+\varphi) = c$$

۳°. میتوان آنرابوسیلهٔ یکی از توابع‌مثلثاتی بیان‌کرد ومثلاقرارداد:

$$cos\,x = \pm\sqrt{۱ - sin^۲x}$$

۴°. میتوان طرفین معادله را مجذور کرد تا بیك معادلهٔ همگن برسیم:

$$a\,\sin^{۲}x+۲ab\cos x\sin x+b^{۲}\cos^{۲}x=c^{۲}$$

که در حالت خاص $a=b$ ، معادله بصورت سادهٔ زیـردر می‌آید :

$$a^{۲}\sin ۲x=c^{۲}-a^{۲}$$

۵°. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(a\sin x+b\cos x)^{۲}+(a\cos x-b\sin x)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$

که با توجه به معادلهٔ مفروض خواهیم داشت :

$$(a\cos x-b\sin x)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}$$

و در اینصورت مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید :

$$a\sin x+b\cos x=c\ ;$$

$$-b\sin x+a\cos x=\pm\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$$

و با معلوم بودن سینوس و یا کسینوس ، مقدار x بدست می‌آید .

در طریقهٔ اول، درحالت‌کلی ، نه‌جوابی حذف میشود و نه جوابهـای خارجی بدست می‌آید . تنها درحالت $b=-c$ یك سری از جوابها حذف میشود (صفحهٔ ۳۶۴ را به‌ببینید) .

طریقه‌های دوم وپنجم‌هم نه‌منجر به حذف جوابها میشوند ونه‌جوابهای خارجی وارد معادله می‌کنند .

در طریقهٔ سوم(وهمچنین چهارم) ممکن است جوابهای خارجی‌ظاهر شود ،که مثلا در نمونهٔ معادلهٔ $\sin x+\cos x=۱$ دیده میشود (مثـال ۳ صفحهٔ ۳۵۸) .

مثال دیگری در نظر می‌گیریم ، معادلهٔ :

$$tg\,x=-tg\,x$$

مستقیماً حل میشود :

$$۲tg\,x=۰\ \Longrightarrow tg\,x=۰\ \Longrightarrow x=k\pi$$

ولی همین معادله را میتوان بطریق دیگری هم حل کرد :

$$tg\,x = tg(-x) \Longrightarrow x = -x + n\pi \Longrightarrow x = \frac{n\pi}{2}$$

استفاده از روش دوم صلاح نیست ، زیرا علاوه برآنکه راه‌طبیعی حل معادله نیست، جوابهای خارجی هم واردمعادله می‌کند (صفحهٔ ۳۴۹رابه‌بینید) جوابهای خارجی بازاء مقادیر $n = 2k + 1$ بدست می‌آید . زیـرا بازاء این مقادیر هردوطرف معادله مفهوم خود را از دست میدهند .

چند مثال

۱۶ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$$

حل : روش اول) توانهای توابع مثلثاتی را بر حسب توابع مضارب قوس می‌نویسیم :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x);$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x);$$

که اگر در معادله قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$\frac{3}{4}(\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x) = \frac{3}{8}$$

ازآنجا: $\sin 4x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}$

روش دوم) $\sin 3x$ و $\cos 3x$ را تبدیل می‌کنیم :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \; ; \; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$3\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8} \Longrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$

در این مثال هردو روش از لحاظ جوابها هم‌ارزند .

۱۷ . این معادله را حل کنید :

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$$

حل : روش اول) تبدیل عمومی $\left(tg\frac{x}{2} = t\right)$ مستلزم محاسبهٔ مفصل‌است

معادله را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \sin x \qquad (1)$$

پس از مجذور کردن طرفین این‌معادله خواهیم‌داشت :

$$1 + \sin 2x = 1 - \sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x \qquad (2)$$

یا : $\sin 2x(8 - \sin 2x) = 0$

عامل دوم همیشه مثبت است، در اینصورت :

$$\sin 2x = 0 \implies x = k\frac{\pi}{2}$$

برای رسیدن از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) احتمال ورود جوابهای خارجی وجود دارد(چون طرفین معادله‌را مجذور کردیم). اگر جواب‌بدست آمده را درمعادله قرار دهیم ، داریم :

$$\sin k\frac{\pi}{2} + \cos k\frac{\pi}{2} + \sin k\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1; & k = 4n \\ 1; & k = 4n+1 \\ -1; & k = 4n+2 \\ -1; & k = 4n+3 \end{cases}$$

بنابراین جوابهای معادله چنین است :

$$x = 2n\pi \; ; \; x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

روش دوم) فرض می‌کنیم :

$$\cos x + \sin x = t \; ;$$

در اینصورت داریم : $t^{۲}=۱+۲\sin x\cos x$

و ازآنجا $\sin x\cos x=\frac{t^{۲}-۱}{۲}$ بدست می‌آید ومعادلهٔ مفروض چنین

میشود : $$t^{۲}+۲t-۳=۰$$

جوابهای این معادله $t=۱$ و $t=-۳$ است . در نتیجه دو معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\sin x+\cos x=۱ \text{ و } \sin x+\cos x=-۳$$

معادلهٔ اول را قبلا حل کرده‌ایم (صفحهٔ ۳۵۸) . معادلهٔ دوم جواب ندارد ، زیرا هریك ازجملات سمت‌چپ تساوی از لحاظ قدرمطلق از ۱ تجاوز نمی‌کند و بنابراین مجموع آنها نمی‌توانند مساوی ۳ — شود .

روش دوم مناسب‌تر است، زیرا جواب خارجی واردمعادله نمی‌کند.*

۱۸ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg\,x=tg^{۲}\left(\frac{\pi}{٤}-\frac{x}{۲}\right)$$

حل : اگر از تبدیل عمومی $tg\frac{x}{۲}=t$ استفاده‌کنیم ، معادلهٔ گویائی نسبت به t بدست میآید ، ولی بهتر است از راه دیگری عمل کنیم .

سمت راست تساوی را بصورت زیر تبدیل می‌کنیم :

---

*) برای حل این معادله روش سومی وجود داردکه بنظر مترجم برهردو روش بالا ترجیح دارد . اگر فرض‌کنیم $x=\alpha+\frac{\pi}{۴}$ ، معادله بصورت زیر درخواهد آمد :

$$\cos^{۲}\alpha+\sqrt{۲}\cos\alpha-\frac{۳}{۲}=۰$$

که دراینصورت $\cos\alpha=-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ و $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ میشود . معادلهٔ اول جواب ندارد وجوابهای معادلهٔ دوم‌همان جوابهای معادلهٔ مفروض‌خواهد بود (باتوجه باینکه $x=\alpha+\frac{\pi}{۴}$است)

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

و معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x};$$

که پس ازحذف مخرج بدست می‌آید :

$$3\sin x=1 \implies x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+n\pi$$

۱۹ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

حل : جملات سمت چپ‌تساوی را به توابع‌قوس‌دو برابر تبدیل‌می‌کنیم:

$$\sin^4 x=\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}$$

$$\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{4}=\frac{(1+\sin 2x)^2}{4}$$

که پس از قرار دادن در معادله خواهیم داشت :

$$\cos 2x-\sin 2x=1 \implies \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

از آنجا :

$$2x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \implies x=k\pi \text{ و } x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

۲۰ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$$

حل : بهتر است که پارامتر گویانش را $t=\cos^2 2x$ فـرض کنیم ، در اینصورت داریم :

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=$$

$$=\frac{1+10t+5t^2}{16}$$

که اگر در معادلهٔ مفروض قرار دهیم ، دستگاه مختلط زیر بدست‌می‌آید:

$$24t^2-10t-1=0\ ;\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

که تنها جواب $t=\frac{1}{2}$ را قبول می کند، بنابراین :

$$\cos 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\Longrightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{8}$$

۲۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tg\,x+cotg\,x$$

حل : پس از تبدیل ، معادلهٔ زیر راکه هم ارز معادلهٔ مفروض است ، خواهیم داشت :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}$$

وچون بازاء هرمقدار دلخواه x داریم :

$$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1 \text{ و } \left|\frac{1}{\sin 2x}\right|\geqslant 1$$

معادلهٔ فوق تنها وقتی جواب دارد که یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم :

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ و $\sin 2x=1$

b) $sin(x+\frac{\pi}{٤})=-١$ و $sin٢x=-١$

در حالت (a) ، معادلهٔ اول جواب $x=\frac{\pi}{٤}+٢k\pi$ و معادلهٔ دوم جواب $x=\frac{\pi}{٤}+n\pi$ را می‌دهد . که جوابهای مشترك دو معادله را میتوان باینصورت نشان داد :

$$x=\frac{\pi}{٤}+٢k\pi$$

در حالت (b) جواب معادلهٔ اول $x=-\frac{٣}{۴}\pi+٢k\pi$ وجواب‌معادلهٔ دوم $x=-\frac{\pi}{٤}+n\pi$ است . وروشن است که‌دراین‌حالت دو معادله جواب مشترکی ندارند .

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ مفروض $x=\frac{\pi}{٤}+٢k\pi$ می‌باشد .

۲۲ . این معادله راحل کنید :

$$cos(\pi\, sin\,x)=sin(\pi\, cos\,x)$$

حل : داریم :

$$cos(\pi\, sin\,x)=cos(\frac{\pi}{٢}-\pi\, cos\,x)$$

و از آنجا : $\frac{\pi}{٢}-\pi\, cos\,x=\pm\pi\, sin\,x+٢k\pi$

یا : $\pm٢\, sin\,x+٢\, cos\,x=١-۴k$

باین ترتیب معادله ای بصورت $a\, sin\,x+b\, cos\,x=c$ بدست می‌آید که درآن $a=\pm٢$ و $b=٢$ و $c=-۴k+١$ است .

تساوی $b+c=٠$ یعنی $۴k=٣$ بازاء هیچ مقداری‌از k صدق نمی کند جوابهای کلی این معادله بصورت زیر است (صفحهٔ ۳۶۳ درا به‌بینید) :

$$x = ۲\operatorname{arctg}\frac{\pm ۲ \pm \sqrt{۷ + ۸k - ۱۶k^۲}}{۴k - ۳} + ۲n\pi;$$

که، در آن k عدد دلخواه وصحیحی است که‌در نامساوی زیرصدق کند:

$$۷ + ۸k - ۱۶k^۲ \geqslant ۰$$

و n عدد صحیح دلخواهی است . بنابراین مقادیر ممکنهٔ k عبارتند از اعداد صحیحی که بینِ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر واقع باشند :

$$۱۶k^۲ - ۸k - ۷ = ۰$$

ریشه‌های این معادله به تقریب $k_۱ = -۰/۴۵$ و $k_۲ = ۰/۹۵$ است، بنابراین $k = ۰$ تنها مقدار قابل قبول k است . از آنجا :

$$x = ۲\operatorname{arctg}\frac{\pm ۲ \pm \sqrt{۷}}{۳} + ۲n\pi$$

۴۶ . بعضی دستگاههای مثلثاتی وروش حل آنها

حل و بحث دستگاههای مثلثاتی اغلب به اشکال برمی‌خورد و بندرت به استفاده از روشهای مقدماتی منجر می‌شود . در این بند ما دستگاههائی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که اغلب در مثلثات بـرای محاسبهٔ اجزاء اشکال هندسی به‌آنها برخورد می کنیم .

ما برای هریك از دستگاهها به بحث‌تفصیلی نخواهیم پرداخت ، بلکه اشاره ای به روشهای حل آنها می کنیم و برای بحث به مثالهـائی که قبلاً دیده‌ایم مراجعه می‌دهیم .

چند مثال

۱ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a & (۱) \\ x + y = b & (۲) \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

حل : سمت چپ معادلهٔ (۱) را به‌صورت ضرب تبدیل می کنیم :

$$۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}=a$$

که با استفاده از معادلهٔ دوم دستگاه ، به دستگاه زیـر (که هم ارز دستگاه I است) می‌رسیم:

$$۲\sin\frac{b}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}=a \ ; \ x+y=b \qquad (\mathrm{I}')$$

حالت اول) $\sin\frac{b}{۲}\neq ۰$ یعنی $b\neq ۲k\pi$ و $\left|\frac{a}{۲\sin\frac{b}{۲}}\right|\leqslant ۱$

در اینحالت دستگاه خطی زیر را بدست خواهیم آورد :

$$x-y=\pm ۲\arccos\frac{a}{۲\sin\frac{b}{۲}}+۴k\pi \ ; \ x+y=b$$

که از آنجا جوابهای کلی دستگاه بدست می‌آید :

$$x=\frac{b}{۲}\pm\arccos\frac{a}{۲\sin\frac{b}{۲}}+۲k\pi \ ; \ y=\frac{b}{۲}\mp\arccos\frac{a}{۲\sin\frac{b}{۲}}-۲k\pi$$

(علامت جلو آرك کسینوس را یا باید در ردیف بالا حساب کرد ویا در ردیف پائین) .

حالت دوم) $b=۲k\pi$ و $a\neq ۰$، در این‌حالت دستگاه جواب‌ندارد.

حالت سوم) $b=۲k\pi$ و $a=۰$ ، هرجواب معادلهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق می کند و بنابراین جواب عمومی دستگاه را میتوان بصورت : $\{x$ و $y=۲k\pi-x\}$ نوشت که درآن x عددی است دلخواه.

حالت چهارم) $\left|\dfrac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\right|>1$ در این حالت هم‌دستگاه جواب ندارد.

با همین روش میتوان هریك از دستگاههای زیررا هم‌حل و بحث کرد:

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = b\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = b\end{cases}$$

دستگاه زیر (ودستگاههای مشابه آن):

$$\cos x + \cos y = a \;;\; x + y = b$$

را میتوان باتبدیل $z = \frac{\pi}{2} - y$ به دستگاههای قبل منجر نمود.

۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\sin x \sin y = a \;;\; x + y = b$$

حل: سمت‌چپ معادلهٔ اول دستگاه را به مجموع تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2a \;;\; x + y = b$$

و از آنجا: $\cos(x-y) = 2a + \cos b \;;\; x + y = b$

ادامهٔ حل و بحث دستگاه را میتوان شبیه مثال ۱ انجام داد.

باهمین روش میتوان دستگاهائی‌را که‌سمت‌چپ معادلهٔ‌اول آنها به‌صورت $\cos x \cos y$، $\cos x \sin y$ و ... و معادلهٔ دوم آنها به‌صورت $x \pm y = b$ باشد حل و بحث‌کرد.

۳. دستگاه زیر را حل کنید:

$$tg\,x - tg\,y = a \;;\; x + y = b$$

حل: سمت چپ معادلهٔ اول را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$$

و بنابراین دستگاه هم ارز زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos b+\cos(x-y)}=a\ ;\ x+y=b$$

بعنوان معادلهٔ اول دستگاه خواهیم داشت :

$$2\sin(x-y)-a\cos(x-y)=a\cos b\ ,\qquad (1)$$

که نسبت به $\sin(x-y)$ و $\cos(x-y)$ خطی است . از معادلهٔ (۱) ، مقدار $x-y$ (اگر وجود داشته باشد) بدست می‌آید و باین ترتیب‌دستگاه خطی نسبت به x و y (به مثال ۱ مراجعه‌کنید) بدست می‌آید . حل و بحث معادلهٔ (۱) را هم درصفحات ۳۶۳ و ۳۸۸ دیده‌ایم .

برای رسیدن به معادلهٔ (۱) ممکن است جوابهای خارجی واردمعادله شود، این جوابها (بشرط وجود) در رابطهٔ زیر صدق می کنند:

$$\cos(x-y)=-\cos b;$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$\cos(x-y)=\cos(\pi+b)\Longrightarrow x-y=\pm(b+\pi)+2k\pi$$

و یا : $x-y=\pm b+(2k+1)\pi$

که اگردر معادلهٔ (۱) قرار دهیم‌بدست می‌آید :

$$\sin b=0\ \Longrightarrow\ b=n\pi$$

وقتی‌که $b=n\pi$ باشد ، دستگاه بصورت زیر درمیآید :

$$tg\,x-tg\,y=a\ ;\ x+y=n\pi$$

(n عددی است صحیح و دلخواه) .

از آنجا : $2tg\,x=a\ ;\ y=n\pi-x$

$$x=\mathrm{arc}tg\frac{a}{2}+k\pi\ ;\quad y=-\mathrm{arc}tg\frac{a}{2}+(n-k)\pi.$$

با همین روش میتوان دستگاههای بصورت زیر را حل وبحث کرد :

$$\begin{cases} tg\,x\pm tg\,y=a \\ x\pm y=b\end{cases}\qquad \begin{cases} cotg\,x\pm cotg\,y=a \\ x\pm y=b\end{cases}$$

۴۰ دستگاه زیر را حل کنید:

$$\frac{\sin x}{\sin y}=a\ ;\ x+y=b \qquad (۱)$$

حل : $a\neq ۱$ فرض می‌کنیم ، تناسب زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{a+۱}{a-۱}\Longrightarrow tg\frac{x+y}{۲}\,cotg\frac{x-y}{۲}=\frac{a+۱}{a-۱}$$

که با توجه به معادلهٔ دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$tg\frac{b}{۲}cotg\frac{x-y}{۲}=\frac{a+۱}{a-۱}\ ;\ x+y=b \ \ (۲)$$

با این روش ممکن است جوابهای خارجی وارد شده باشد، اینها عبارت از جوابهائی از دستگاه (۲) هستند که از شرط $\sin y=۰$ یعنی $y=k\pi$ بدست آیند. ولی اگر دستگاه (۲) جوابی بصورت $y=k\pi$ و $x=b-k\pi$ داشته باشد، خواهیم داشت :

$$tg\frac{b}{۲}\cdot cotg\frac{b}{۲}=\frac{a-۱}{a+۱}$$

اگر $b\neq n\pi$ باشد ، $\frac{a+۱}{a-۱}=۱$ میشود که ممکن نیست و حالت $b=n\pi$ هم باید بعنوان حالت خاص مورد بحث قرار گیرد .

باین ترتیب برای بحث، حالتهای زیررا خواهیم داشت :

حالت اول) $b\neq n\pi$. از معادلهٔ اول (۲) مقدار $x-y$ را بدست می‌آوریم ودستگاه خطی شبیه مثال ۱ تشکیل می‌دهیم .

حالت دوم) $b=n\pi$ و $n=۲m$ و $a\neq -۱$. در این حالت دستگاه (۲) ، و در نتیجه دستگاه مفروض (۱) غیر ممکن میشود .

حالت سوم) $b=۲m\pi$ و $a=-۱$. دستگاه (۲) دارای جواب عمومی زیر است :

$$x=۲m\pi-y \qquad (y\ \text{عددی دلخواه})$$

برای بدست آوردن جواب کلی (۱) باید جوابهای بصورت $y=k\pi$ را حذف کرد (k عدد دلخواه صحیحی است) .

حالت چهارم) $b=(2m+1)\pi$. در این حالت نمیتوان به معادلهٔ (۲)رسید، زیرا $tg\frac{b}{2}$ مفهوم خود را از دست می‌دهد و دستگاه (۱) بصورت زیر در می‌آید :

$$\frac{\sin x}{\sin y}=a \ ; \ y=-x+(2m+1)\pi$$

و چون $\sin x=\sin y$ است با فرض $a\neq 1$ ، دستگاه متناقض‌میشود.

حل وبحث دستگاه در حالت $a=1$ را بعنوان تمرین بعهده خواننده می‌گذاریم .

باهمین روش میتوان دستگاههائی بصورت زیر راحل وبحث‌کرد :

$$\frac{\cos x}{\cos y}=a \ ; x\pm y=b \text{ و } \frac{\sin x}{\cos y}=a \ ; \ x\pm y=b \text{ و } \ldots$$

۵ . دستگاه زیر را حل‌کنید :

$$tg\,x\,tg\,y=a \ ; \ x+y=b$$

حل : سمت‌چپ‌معادلهٔ اول‌را تبدیل می‌کنیم :

$$tg\,x\,tg\,y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)};$$

باین ترتیب دستگاهی بدست می‌آید‌که شبیه مثال۳ حل وبحث‌می‌شود.

میتوانستیم تناسب زیررا تشکیل دهیم :

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{a}{1}\Longrightarrow\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+a}{1-a}$$

در این‌مورد بحث شبیه مثال قبل انجام می‌گیرد .

۶ . این دستگاه را حل کنید :

$$\sin^2 x+\sin^2 y=a \ ; \ x+y=b \ .$$

حل : سمت چپ معادلهٔ اول را به توابع قوس دو برابر تبدیل‌می‌کنیم دستگاه زیر بدست می‌آید :

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1-a) \;;\; x+y=b$$

که روش حل آنرا در مثال ۱ دیده ایم .

۷ . این دستگاه را حل کنید :

$$\sin x \sin y = a \;;\; \cos x \cos y = b \qquad (1)$$

حل : از جمع و تفریق دو معادلهٔ دستگاه بدست می‌آید :

$$\cos(x+y) = b-a \;;\; \cos(x-y) = b+a \qquad (2)$$

که هم ارز با دستگاه مفروض است . این دستگاه تنها در حالتی جواب دارد که a و b در نامساویهای زیر صدق کنند :

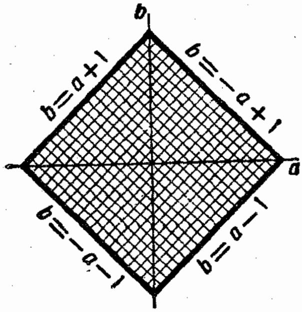
$$-1 \leqslant b-a \leqslant 1 \;;\; -1 \leqslant b+a \leqslant 1$$

از این نامساویها بدست می‌آید :

$$a-1 \leqslant b \leqslant a+1 \;;$$

$$-a-1 \leqslant b \leqslant -a+1$$

مجموعهٔ نقاط $M(a \text{ و } b)$ از صفحه که دراین نامساویها صدق کنند عبارتند از نقاط واقع بر محیط وداخل یك مربع (شکل ۱۷۱) این مربع را میتوان بوسیلهٔ نامساویهای زیر هم مشخص کرد (حل جبری را بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم) :



ش ۱۷۲

$$\begin{cases} -a-1 \leqslant b \leqslant a+1 \;; & -1 \leqslant a \leqslant 0 \\ a-1 \leqslant b \leqslant -a+1 \;; & 0 \leqslant a \leqslant 1 \end{cases} \qquad (3)$$

اگر پارامترهای a و b در شرط (۳) صدق کنند ، دستگاه مفروض مثلثاتی هم‌ارز با دستگاه دو معادلهٔ خطی زیر خواهد بود که شامل دو پارامتر صحیح است :

$$\begin{cases} x+y=\pm \arccos(b-a)+2m\pi \,; \\ x-y=\pm \arccos(b+a)+2n\pi \,. \end{cases}$$

از آنجا : $x=\dfrac{\pm \arccos(b-a)\pm \arccos(b+a)}{2}+(m+n)\pi;$

$$y=\frac{\pm \arccos(b-a)\mp \arccos(b+a)}{2}+(m-n)\pi \,,$$

که در آن m و n اعدادی صحیح هستند وعلامت جلو آرك کسینوس‌را در یکی از روابط (مثلا رابطهٔ بالا) میتوان هر ترکیب دلخواهی گرفت (۴ ترکیب مختلف وجود دارد) و در رابطهٔ دیگر علامت اولین آرك کسینوس را همان علامت آرك کسینوس اول در رابطهٔ اول وعلامت دومین آرك کسینوس‌را مخالف علامت آرك کسینوس دوم در رابطهٔ اول گرفت .

میتوان بجای $m+n$ و $m-n$ پارامترهای دیگری انتخاب کرد، فرض می‌کنیم :

$$m+n=k \text{ و } m-n=l$$

ولی مقادیر k و l هرعدد صحیح دلخواه نیستند ، بلکه باید باهم زوج یا با هم فرد انتخاب شوند ، زیرا فقط این‌صورت است که m و n اعدادی صحیح خواهند بود .

۸ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\sin x\cos y=a\;; \quad \cos x\cos y=b$$

حل : حالت اول) $a\neq 0$ و $b\neq 0$ در اینصورت مقادیری از x و y که بازاء آنها $\cos x=0$ یا $\cos y=0$ باشد ، نمیتوانند جواب دستگاه باشند ، معادلهٔ اول‌را بر معادلهٔ دوم تقسیم می‌کنیم :

$$tg\,x=\frac{a}{b} \qquad x=\operatorname{arc}tg\frac{a}{b}+k\pi \,. \qquad (1)$$

که اگر در معادلهٔ اول دستگاه قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$(-1)^k\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos y=1 \qquad (b>0 \text{ بازاء })$$

یا : $\qquad (b<0 \text{ بازاء}) \qquad (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos y=1$

که معادله‌ای ساده نسبت به y است و بازاء $\sqrt{a^2+b^2}\leq 1$ (مثلا $b>0$ فرض می‌کنیم) جواب دارد :

$$y=\pm\arccos(-1)^k\sqrt{a^2+b^2}+n\pi\ ; \qquad (2)$$

روابط (۱) و (۲) جوابهای عمومی دستگاه را می‌دهند . درحالت $\sqrt{a^2+b^2}>1$ دستگاه جواب ندارد .

تبصره. با این روش حل ، دستگاه :

$$f=a\ ;\ \varphi=b \qquad (I)$$

به دستگاه : $\qquad \frac{f}{\varphi}=\frac{a}{b}\ ;\quad f=a \qquad (II)$

تبدیل میشود که بازاء $a\neq 0$ و $b\neq 0$ معادل دستگاه (I) است .

حالت دوم) یکی از دوعدد a و b مساوی صفر باشد . فرض می‌کنیم مثلا $a\neq 0$ و $b=0$ ، دراینصورت از معادلهٔ دوم بدست می‌آید :

$$\cos x=0 \text{ و } x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

(بازاء $\cos y=0$ معادلهٔ دوم غیرممکن میشود) . در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم ، معادلهٔ سادهٔ $(-1)^k\cos y=a$ بدست می‌آید ، ازآنجا بازاء $|a|\leq 1$ خواهیم داشت :

$$y=\pm\arccos(-1)^k a+2m\pi$$

و اگر $|a|>1$ باشد ، دستگاه جواب ندارد .

حالت سوم) $a=b=0$. در این حالت دو سری جواب دستگاه‌چنین خواهند بود :

$$۱)\quad \cos y=0 \qquad y=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } x=\text{عددی دلخواه}$$

$$۲)\quad \sin x=0\ ;\ \cos y=0 \qquad x=k\pi \text{ و } y=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

ولی‌جوابهای سری دوم جزو سری‌اول وجود دارد و بنابراین میتوان از ذکر آنها صرفنظر کرد .

۹ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\sin x+\sin y=a\ ;\ \cos x+\cos y=b.$$

حل : سمت چپ معادلات را به صورت ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2};\ \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{a}$$

که شبیه مثال قبل حل و بحث میشود (میتوان‌فرض کرد:

$$(v=\frac{x-y}{2} \text{ و } u=\frac{x+y}{2}$$

۱۰ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$tg\,x+tg\,y=a\ ;\quad cotg\,x+cotg\,y=b \qquad (۱)$$

حل : اگر فرض کنیم : $u=tg\,x$ و $v=tg\,y$. دستگاه جبری زیر را خواهیم داشت :

$$u+v=a\ ;\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=b \qquad (۲)$$

که میتواند بصورت دستگاه زیر درآید :

$$u+v=a;\frac{a}{u.v}=b$$

و اگر $b\neq 0$ باشد، u و v ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرخواهندبود:

$$bz^2-abz+a=0 \qquad (۳)$$

حل و بحث معادلهٔ درجه دوم را هم میتوان طبق معمول انجام داد .

این روش حل ممکن است منجر به جوابهای خارجی شود ، جوابهای

خارجی آنهائی هستند که بازاء آنها $u=0$ و $v=0$ میشود . معادلهٔ درجه دوم (۳) وقتی ریشه‌هائی مساوی صفر دارد که $a=0$ باشد .

باین ترتیب بعنوان حالتهای خاص داریم :

حالت اول) $b=0$ و $a\neq 0$. دراینحالت دستگاه‌جبری(۲) وهمچنین دستگاه مثلثاتی غیر ممکن میشود .

حالت دوم) $a=0$ و $b\neq 0$. در اینحالت هم دستگاه غیرممکن‌است.

حالت سوم) $a=b=0$. دستگاه دارای بی‌نهایت جواب $v=-u$ است، که در آن u عدد دلخواهی مخالف صفر است . در اینحالت جواب عمومی دستگاه مثلثاتی چنین میشود :

$$y=-x+k\pi$$

که درآن x عدددلخواهی است که بصورت $\frac{n\pi}{2}$ نباشد.

۱۱ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$tg\,x:tg\,y:tg\,z=a:b:c\ ;\ x+y+z=\pi \qquad (1)$$

حل : چون $x+y+z=\pi$ است ، ازشرط $tg(x+y+z)=0$ با استفاده از رابطهٔ صفحهٔ ۱۴۱) خواهیم داشت :

$$tg\,x+tg\,y+tg\,z=tg\,x\,tg\,y\,tg\,z \qquad (2)$$

اگر مقدار نسبتهای مساوی را t فرض کنیم ، از دو معادلهٔ اول‌دستگاه خواهیم داشت :

$$tg\,x=at\ ;\ tg\,y=bt\ ;\ tg\,z=ct \qquad (3)$$

در رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم ، بدست می‌آید :

$$t(abct^2-(a+b+c)]=0$$

از آنجا یا $t=0$ و یا :

$$abct^2-(a+b+c)=0 \qquad (4)$$

اگر $t=0$ باشد ، $tg\,x=tg\,y=tg\,z=0$ میشود یعنی $x=k\pi$ و $y=m\pi$ و $z=n\pi$ ، که اگردر معادلهٔ آخر (۱) قرار دهیم بدست‌میآید: $k+m+n=1$ و از آنجا سری جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$x=k\pi\ ;\ \ y=m\pi\ ;\ \ z=(1-k-m)\pi \qquad (5)$$

که k و m اعداد صحیح و دلخواهی‌هستند .

برای اینکه بقیهٔ جوابهای دستگاه را بدست آوریم ، حالتهای زیر را در نظر می گیریم :

حالت اول) هیچیك از اعداد a و b و c صفر نباشند ، در اینصورت :

$$t^2=\frac{a+b+c}{abc}$$

واگر $\frac{a+b+c}{abc}\geqslant 0$ باشد داریم : $t=\pm\sqrt{\frac{a+b+c}{a\cdot b\cdot c}}$

از تساوی (۳) بدست می‌آید :

$$x=\operatorname{arctg}at+k\pi\ ;\ y=\operatorname{arctg}bt+m\pi\ ;\ z=\operatorname{arctg}ct+n\pi$$

ضریب t از شرط $tg(x+y+z)=0$ معین میشود و بنابراین :

$$\operatorname{arctg}at+\operatorname{arctg}bt+\operatorname{arctg}ct=\begin{cases}-\pi\\ 0\\ \pi\end{cases}$$

باین ترتیب ، درحالت خاصی‌که $a>0$ ، $b>0$ و $c>0$ باشد ، اگر جلو رادیکال علامت $+$ راانتخاب کنیم، مجموع آرك‌تانژانتها مساوی π واگرعلامت $-$ را جلو رادیکال بگیریم، مجموع مساوی $-\pi$ میشود. باتوجه بشرط $x+y+z=\pi$ یکی از پـارامترهای صحیح میتواند برحسب دو پارامتر دیگر معین شود .

حالت دوم) یکی از اعداد a و b و c مساوی صفر ولی $a+b+c\neq 0$ باشد ، در اینحالت معادلهٔ (۴) جواب ندارد .

حالت سوم) یکی از اعداد a و b و c مساوی صفر و ضمناً $a+b+c=0$ باشد ، در اینحالت معادلهٔ (۴) بیك اتحاد تبدیل میشود . مثلا حالت $a=0$ و $b=-c\neq 0$ را در نظر می گیریم (بهمین ترتیب میتوان حالتهای دیگر را هم بحث کرد) . داریم :

$$tg\,x=0\ ;\ tg\,y=-tg\,z \qquad x=k\pi\ ;\ y=-z+m\pi$$

و ضمناً از معادلهٔ آخر بدست میآید : $k+m=1$

وسری جوابها باین ترتیب مشخص میشوند :

$$x=k\pi\ ;\ y=z+(1-k)\pi\ ;$$

که z عددی است دلخواه .

متذکر میشویم که دراینحالت ، روابط اخیرجواب عمومی دستگاه را میدهد ؛ زیرا بازاء $z=n\pi$ ؛ سری جوابهای (۵) بدست می آید .

۱۲ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\cos x:\cos y:\cos z=a:b:c\ ;\ x+y+z=\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

a و b و c اعداد مفروض دلخواهی هستند .

حل : داریم : $z=\frac{\pi}{2}-(x+y)$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\cos z=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad (2)$$

و با تبدیل دوری این تساوی نسبت به x و y و z ؛ تساویهای مشابهی هم بدست میآید . تساوی (۲) نسبت بهکسینوسها خطی است و بنابراین میتوان آنها را با اعداد متناسب خودعوض کرد :

$$c=b\sin x+a\sin y\ ;$$
$$a=c\sin y+b\sin z\ ;$$
$$b=a\sin z+c\sin x\ .$$

معادلهٔ اول را در c ، دوم را در $-a$ وسوم را در b ضرب وسپس باهم‌جمع می‌کنیم ، میشود :

$$c^{2}+b^{2}-a^{2}=2bc\sin x \Longrightarrow \sin x=\frac{c^{2}+b^{2}-a^{2}}{2bc}$$

بهمین ترتیب دو معادلهٔ مثلثاتی سادهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\sin y=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac};\ \sin z=\frac{b^{2}+a^{2}-c^{2}}{2ab}$$

با این‌روش‌ممکن‌است‌جوابهای‌خارجی واردمعادله‌شود، زیرااگر بجای معادلهٔ آخر (۱) معادلهٔ $x+y+z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ را قرار دهیم باز هم بهمان رابطهٔ (۲) می‌رسیم .

۴۷ • معادلاتی که مجهولات در آنها بصورت تابع‌قوس داده شده

ابتدا معادلات سادهٔ زیررا در نظر می‌گیریم :

$$\arcsin x=m\ ;\qquad \arccos x=m\ ;$$
$$\operatorname{arctg} x=m\ ;\qquad \operatorname{arccotg} x=m\ .$$

که در آنها با معلوم بودن یکی از توابع قوس باید مجهول را پیدا کرد .

یکی از این معادلات را مورد بحث قرار می‌دهیم :

$$\arcsin x=m$$

از آنجا که‌مقدارآرک‌سینوس درفاصلهٔ‌بستهٔ $\left[\frac{\pi}{2}\ \text{و}\ -\frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد ،

بنابراین معادلهٔ مفروض تنها وقتی جواب دارد که $|m| \leqslant \frac{\pi}{2}$ باشد . با توجه باینکه آرك سینوس تابعی یکنواست تنها جواب معادله عبارتست از :

$$x = \sin m$$

بهمین ترتیب میتوان معادلات سادهٔ دیگر را نیز مورد بحث قرار داد .

معادلهٔ $\arccos x = m$ باشرط $0 \leqslant m \leqslant \pi$ تنها جواب $x = \cos m$ را قبول دارد و وقتی که m درفاصلهٔ بستهٔ $[0 , \pi]$ واقع نباشددارای‌جواب‌نیست.

معادلهٔ $\operatorname{arctg} x = m$ بازاء مقادیری از m که‌در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$ واقع باشد ، تنها دارای جواب $x = \operatorname{tg} m$ می‌باشد ،

و بالاخره معادلهٔ $\operatorname{arccotg} x = m$ با شرط $0 < m < \pi$ تنها جواب $x = \operatorname{cotg} m$ را قبول دارد .

حل معادلهٔ : $f(\arcsin x) = 0$

(بجای آرك سینوس میتوان هر تابع قوس دیگر را جلو علامت f قرار دارد) منجر به‌حل دستگاه مختلط زیر می‌شود :

$$f(t) = 0 \text{ و } -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

که بالاخره منجر به‌حل معادلات ساده‌ای میشود (به تعدادجوابهای‌دستگاه).

حل‌معادلهٔ: $f(\arcsin x , \arccos x) = 0$

با توجه به اتحاد $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ منجر به حل معادلهٔ قبل میشود . بهمین ترتیب درموردمعادلهٔ بصورت :

$$f(\operatorname{arctg} x , \operatorname{arccotg} x) = 0$$

یکی از روشهای متداول حل معادلات (وقتی که شامل توابع معکوس مثلثاتی هستند) ، انجام بعضی اعمال مثلثاتی روی دو طرف معادلهٔ مفروض است . این روش (در حالت‌کلی) منجر به معادلهٔ جدیدی میشودکه هم ارز

معادلهٔ مفروض نیست . مثلا معادلات زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (I)$$

$$\sin f(x)=\sin\varphi(x) \qquad (II)$$

معادلهٔ (II) نتیجه‌ای از معادله (I) است ولی‌عکس آن صحیح نیست، درحقیقت معادلهٔ (II) هم‌ارز معادلهٔ زیر است :

$$f(x)=(-1)^n\varphi(x)+n\pi \qquad (II_n)$$

که معادله‌ای با پارامترصحیح n است وتمام‌جوابهای‌آن‌بجز جوابی که‌بازاء $n=0$ بدست می‌آید ، جوابهای خارجی معادلهٔ (I) می‌باشد. بـرای حذف جوابهای خارجی، در این‌موردلازم است که جوابها را در معادلهٔ (I) امتحان کنیم .

همچنین معادلهٔ (I) ، در حـالت کلی ، با معادلهٔ زیر هم نمی‌تواند هم‌ارز باشد :

$$tg\, f(x)=tg\,\varphi(x) \qquad (III)$$

زیرا اولا هرجوابی از معادلهٔ (I) (اگر این‌جوابها وجود داشته باشند) که بازاء آن هردو طرف معادله مقادیری بصورت $\frac{2k+1}{2}\pi$ باشند ، جوابهای خارجی معادلهٔ (III) خواهند بود *، ثانیاً هرجواب معادلهٔ :

$$f(x)=\varphi(x)+n\pi \qquad (III_n)$$

بازاء $n\neq 0$ ریشه‌ای از معادله (III) است (بشرطی که جزو حالتهای‌خاص نباشد) ولی ریشهٔ معادلهٔ (I) نیست و تمام اینگونه ریشه‌ها باید مورد امتحان قرارگیرند . بنابراین ضمن عبوراز معـادلهٔ (I) به (III)، هم ممکن است ریشه‌هائی حذف شود وهم ریشه‌های خارجی وارد معادله شود .

مثلا معادلهٔ : $\qquad x=\pi-x \qquad (1)$

---

*) درنظرکلی ، ما به اصل عبورحدی نمی‌پردازیم .

تنها یک‌جواب $x=\frac{\pi}{2}$ را دارد، در حالیکه معادلهٔ :

$$tg\,x = tg(\pi - x) \qquad (۲)$$

دارای یک‌سری جواب (غیر خاص) $x=k\pi$ می‌باشد . ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) جوابهای خارجی $x=k\pi$ ظاهر وجواب $x=\frac{\pi}{2}$ حذف می‌شود .

در بسیاری موارد ، در نتیجهٔ انجام اعمال مثلثاتی روی دوطرف‌معادله (وقتی که شامل توابع قوس است) ، به معادله‌ای جبری می‌رسیم. در هریک‌از این‌موارد تمام ریشه‌های معادلهٔ مفروض بین‌ریشه‌های معادلهٔ جبری وجوددارد بجز درموردی که از معادلهٔ (I) به معادلهٔ (III) برسیم که ممکن است بعضی از ریشه‌های معادلهٔ مفروض حذف شود . بنابراین برای حل‌معادلهٔ مفـروض کافی است‌همهٔ جوابهای معادلهٔ جبری رابدست آوریم ودر معادلهٔ اصلی‌امتحان کنیم . معادلات جبری (که از انجام اعمال مثلثاتی روی توابع قوس بدست می‌آید) درحالت کلی گنگ‌اند (به فصل سوم مراجعه کنید) . بنابراین برای رسیدن به معادلهٔ جبری که بدون رادیکال باشد اعمالی لازم است که بـاز هم، در حالت کلی ، منجر به جوابهای خارجی می‌شود .

همچنین تبدیلات اتحادی هم ممکن است منجر به جوابهای خـارجی شود ، مثلا برای معادلهٔ :

$$\operatorname{arc\,sin} f(x) = \operatorname{arc\,sin} \varphi(x)$$

مجموعهٔ مقادیر قابل قبول از دوشرط زیر معین میشود :

۱°. مقدار x باید در حوزه ای واقع باشدکه توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ معین‌اند .

۲°. بایستی نامساوی زیر برقرار باشد :

$$|f(x)| \leqslant 1 \;;\; |\varphi(x)| \leqslant 1$$

ضمن تبدیل معادلهٔ مفروض به معادلهٔ :

$$f(x)=\varphi(x)$$

(اگر بدون در نظر گرفتن معادلهٔ مفروض حل شود) ، شرایط ۲° از بین می روند واین تغییر مجموعهٔ مقادیر قابل قبول، بعلت تبدیل اتحادهای زیر بوجود آمد:

$$\sin(\arcsin f(x))=f(x) \quad ; \quad \sin(\arcsin\varphi(x))=\varphi(x)$$

چند مثال

۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۳\arcsin\sqrt{x}-\pi=۰$$

حل : داریم :

$$\arcsin\sqrt{x}=\frac{\pi}{۳} \quad ; \quad \sqrt{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } x=\frac{۳}{۴}$$

۲ . این معادله را حل کنید .

$$۴\operatorname{arctg}(x^۲-۳x+۳)-\pi=۰$$

حل : داریم :

$$\operatorname{arctg}(x^۲-۳x+۳)=\frac{\pi}{۴} \; ; \; x^۲-۳x+۳=۱ \; ; \; x_۱=۱ \text{ و } x_۲=۲$$

۳ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۲\arcsin x=۸$$

حل : معادله جواب ندارد ، زیرا داریم :

$$\arcsin x=۴ \text{ و } ۴>\frac{\pi}{۲}$$

۴ . این معادله را حل کنید :

$$\pi-\arcsin x=\arccos x \qquad (۱)$$

حل : از هردو طرف سینوس می گیریم :

$$\sin(\pi-\arcsin x)=\sin(\arccos x)$$

ازآنجا : $\sin(\arcsin x)=\sin(\arccos x)$

یا :
$$x=\sqrt{1-x^2} \qquad (2)$$

طرفین معادلهٔ جبری اخیر را مجذور می‌کنیم ، میشود :

$$2x^2=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مقدار $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ جواب معادلهٔ جبری (۲) نیست . این جواب خارجی است که در اثر مجذور کردن طـرفین معادلهٔ (۲) بدست آمده است . مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}=x$ ریشهٔ معادلهٔ جبری هست ولی ریشهٔ معادلهٔ مفروض (۱) نیست ، زیرا معادلهٔ مفروض جواب ندارد، زیرا معادلهٔ مفروض متناقض اتحاد زیر است:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

مقدار $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ریشهٔ معادلهٔ دیگری است .

$$\arcsin x=\arccos x$$

که اگر از طرفین آن سینوس بگیریم بهمان معادلهٔ جبری گنگ می‌رسیم .

۵ . این معادله را حل کنید :

$$\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}$$

حل : از طرفین تساوی تانژانت می‌گیریم ، معادلهٔ درجه دوم زیـر بدست می‌آید :

$$x^2+3x+2=0$$

ریشه‌های این معادله $x_1=-2$ و $x_2=-1$ است وهر دو ریشه درمعادلهٔ اصلی صدق می‌کنند .

۶ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arccos x=\operatorname{arctg} x$$

حل : از طرفین تساوی کسینوس می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

از آنجا : $x^۲(x^۲+۱)=۱ \Longrightarrow x^۴+x^۲-۱=۰$

معادلهٔ اخیر دارای دو ریشهٔ حقیقی زیر است :

$$x_۱=\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}} \text{ و } x_۲=-\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$$

که اولی در معادلهٔ مفروض صدق می کند .

۷ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۲\arcsin x=\arccos ۲x \qquad (۱)$$

حل : داریم : $\cos(۲\arcsin x)=\cos(\arccos ۲x)$

از آنجا: $۱-۲x^۲=۲x \Longrightarrow ۲x^۲+۲x-۱=۰ \qquad (۲)$

بنابراین : $x_۱=\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}\ ;\ x_۲=\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}$

اگر حوزه‌ای را که هردو طرف معادلهٔ (۱) معین است باهم در نظربگیریم ، دستگاه دو نامساوی زیر را داریم :

$$|x|\leqslant ۱ \text{ و } |۲x|\leqslant ۱ \Longrightarrow -\frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}$$

ریشهٔ $x_۲$ دراین شرایط صدق می کند که ریشهٔ معادلهٔ (۱) هم هست ، زیرا قوسهای $۲\arcsin x_۲$ و $\arccos ۲x_۲$ درفاصلهٔ (π و ۰) واقع اند و کسینوسهای مساوی دارند و بنابراین باهم مساوی‌اند . ریشهٔ $x_۱$، ریشهٔ خارجی معادلهٔ (۱) است زیرا $|x_۱|>۱$ است . این ریشه در اثر بسط حوزهٔ مقادیر مجهول ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) پیدا شده است .

۸ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arcsin mx=\arccos nx$$

حل : از دوطرف تساوی سینوس می گیریم :

$$\sin(\arcsin mx)=\sin(\arccos nx)$$

از آنجا معادلهٔ گنگ زیر بدست می‌آید :

$$mx=\sqrt{1-n^2x^2}$$

با مجذور کردن طرفین این تساوی خواهیم داشت :

$$(m^2+n^2)x^2=1 \Longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

حالتهای زیر را در نظر می گیریم :

حالت اول) $m\geqslant 0$ و $n\geqslant 0$ ولی لااقل یکی از مقادیر m یا n مخالف صفراند . در این حالت تنها ریشهٔ مثبت x ممکن است در معادله صدق کند ، زیرا بازاء $x\leqslant 0$ قوسهای $\arcsin mx$ و $\arccos nx$ در فواصل مختلفی قرار دارند . تنها جواب معادله در این حالت چنین است :

$$x=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

حالت دوم) $m\leqslant 0$ و $n\leqslant 0$ ولی لااقل یکی از دومقدار m و n مخالف صفراند . در این حالت معادله نمیتواندجواب مثبت داشته باشد و تنها جواب معادله چنین است :

$$x=-\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

حالت سوم) $m>0$ و $n<0$ در این حالت معادله جواب ندارد ، زیرا آوندهای mx و nx علامتهای مختلفی دارند و بنابراین قوسهای $\arcsin mx$ و $\arccos nx$ در فواصل مختلفی قرار گیرند . در حالت $m<0$ و $n>0$ هم وضع بهمین ترتیب است .

حالت چهارم) $m=n=0$ در این حالت معادله غیر ممکن است .

۹ . معادلهٔ زیر را حل کنید ،

$$\arcsin 2x+\arcsin x=\frac{\pi}{3} \qquad (1)$$

حل : از طرفین تساوی کسینوس می گیریم :

$$\cos(\arcsin 2x+\arcsin x)=\frac{1}{2}$$

و بنابراین معادلهٔ گنگ زیر بدست می‌آید :

$$\sqrt{1-4x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}-2x^2=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

که پس از گویا کردن به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$28x^2-3=0 \implies x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

مقدار $x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ نمیتواند ریشهٔ معادلهٔ مفروض باشد، زیرا قوسهای $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ و $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ در فاصلهٔ $(0$ و $-\frac{\pi}{2})$ واقع اند و مجموع آنها نمی‌تواند مساوی $\frac{\pi}{3}$ شود .

مقدار $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ ریشهٔ معادلهٔ مفروض است. کافی است که این مقدار را در معادله قرار دهیم و ببینیم که کسینوس هر دو طرف معادله (۱) مساوی $\frac{1}{2}$ میشود.

تبصرهٔ I . در این معادله بهتر همانست که کسینوس طرفین را حساب کنیم نه خط مثلثاتی دیگری ؛ زیرا باین ترتیب تنها یك جملهٔ شامل رادیکال بدست می‌آید و معادلهٔ جبری بسادگی گویا میشود ، درحالیکه اگر مثلا از طرفین تساوی سینوس بگیریم ، در سمت چپ تساوی دوجملهٔ شامل رادیکال بدست می‌آید .

تبصرهٔ II . مقدار $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ ریشهٔ معادله‌ای است که سمت چپ معادلهٔ (۱) مساوی $-\frac{\pi}{3}$ باشد ، در اینصورت همان معادلهٔ گنگ (۲) بدست خواهد آمد .

۱۰ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arcsin x + \arccos(1 - x) = \arcsin(-x) \qquad (1)$$

حل : معادلهٔ (۱) هم‌ارز معادلهٔ زیر است :

$$2\arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$$

از آنجا :
$$2\arcsin x = -\arccos(1 - x)$$

از طرفین تساوی کسینوس می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$\cos(2\arcsin x) = 1 - x \Longrightarrow 2x^2 - x = 0 \qquad (2)$$

معادلهٔ اخیر دارای دو ریشهٔ $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ است که اگر درمعادلهٔ مفروض قرار دهیم ، تنها ریشهٔ $x = 0$ صدق می‌کند . مقدار $x = \frac{1}{2}$ ، ریشهٔ معادلهٔ زیر است :

$$\arcsin x - \arccos(1 - x) = \arcsin(-x)$$

۱۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1 - x} = \arcsin\frac{1}{3} \qquad (1)$$

حل : از طرفین تساوی سینوس می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$\frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1 - x} = \frac{1}{3}$$

پس از گویا کردن به معادلهٔ درجه دوم $9x^2 - 12x + 4 = 0$ میرسیم که دارای ریشهٔ مضاعف $x = \frac{2}{3}$ است که اگر در معادلهٔ (۱) امتحان کنیم در آن صدق می‌کند .

همین معادلهٔ درجه دوم را درحالتی هم که بجای معادلهٔ (۱)، معادلهٔ:

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin\sqrt{1 - x} = \arcsin\frac{1}{3} \qquad (2)$$

را داشتیم ، بدست می‌آمد ، ولی مقدار $x=\frac{2}{3}$ در آن صدق نمی‌کند. دراین‌حالت معادلهٔ گنگ بصورت زیر درمی‌آمد :

$$\frac{3}{2}+\sqrt{1-\frac{4}{9x}}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}$$

که دارای جواب نیست .

۱۲ . این معادله را حل کنید :

$$2\arccos x=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \qquad (1)$$

حل . داریم :

$$\sin(2\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow 2x\sqrt{1-x^2}=2x\sqrt{1-x^2}$$

و این معادله در فاصلهٔ بستهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ یك اتحاد است . بازاء $x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ قوس $2\arccos x$ به ربع اول ختم میشود و در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند ، بازاء $x\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ این قوس در ربع اول (بسته) قرار گرفته و در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند .

بنابراین مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ (۱)عبارتست از $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 1$ و مجموعهٔ جوابهای خارجی $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ میباشد .

۱۳ . این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} \arcsin x\arcsin y=\dfrac{\pi^2}{12}; \\ \arccos x\arccos y=\dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

حل : با استفاده از اتحاد $\arccos a=\frac{\pi}{2}-\arcsin a$ ، سمت چپ

معادلهٔ دوم را برحسب آرک سینوس می‌نویسیم :

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin y\right)=\frac{\pi^2}{24}$$

اگر فرض کنیم $u=\arcsin x$ و $v=\arcsin y$ ، دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$uv=\frac{\pi^2}{12}\ ;\quad uv-(u+v)\frac{\pi}{2}+\frac{5}{24}\pi^2=0$$

با در دست داشتن مقادیر $u+v$ و uv معادلهٔ درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن u و v باشد :

$$12z^2-7\pi z+\pi^2=0$$

ازآنجا بدست‌می‌آید : $u_1=\frac{\pi}{3}$ و $v_1=\frac{\pi}{4}$ یا $u_2=\frac{\pi}{4}$ و $v_2=\frac{\pi}{3}$

بنابراین دو دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\arcsin x=\frac{\pi}{3}\\ \arcsin y=\frac{\pi}{4}\end{cases}\quad \text{و} \quad \begin{cases}\arcsin x=\frac{\pi}{4}\\ \arcsin y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

که جوابهای زیر را بدست می‌دهند :

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{و}\ y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{و}\ y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۴ . این معادله را حل کنید :

$$\arcsin mx=2\operatorname{arctg} nx \qquad (1)$$

حل : از طرفین تساوی سینوس می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$\sin(\arcsin mx)=\sin(2\operatorname{arctg} nx) \qquad (2)$$

از آنجا :

$$mx=\frac{2nx}{1+n^2x^2} \qquad (3)$$

هم از این معادله و هم از معادلهٔ (۱) روشن است که جواب $x=0$ وجود

دارد ، برای محاسبهٔ جوابهای دیگر (پس ازآنکه به x ساده کنیم) داریم :

$$m=\frac{2n}{1+n^2x^2}$$

یا :

$$mn^2x^2=2n-m \qquad (4)$$

اگر $m\neq 0$ و $n\neq 0$ باشد، معادلهٔ (۴) درحوزهٔ اعداد مختلط ، ریشه‌های زیر را قبول دارد :

$$x=\pm\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2n-m}{m}}$$

مقادیر x حقیقی هستند وقتی که $\frac{2n-m}{m}\geqslant 0$ باشد ، ازآنجا :

$$(I)\begin{cases}m>0\\ m\leqslant 2n\end{cases} \quad \text{یا} \quad (II)\begin{cases}m<0\\ m\geqslant 2n\end{cases}$$

حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت اول) $m>0$ و $n>0$ از نامساویهای (I) بدست می‌آید $0<m\leqslant 2n$ ؛ با این‌شرایط دوجواب‌حقیقی برای x خواهیم داشت :

$$x_1=-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2n-m}{m}}\ ;\ x_2=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2n-m}{m}}$$

نامساویهای (II) متناقض‌اند .

مجموعهٔ مقادیر قابل قبول مجهول برای معادلهٔ (۱) از شرایط $-\frac{1}{m}\leqslant x\leqslant\frac{1}{m}$ یا (بازاء $m>0$) $x^2<\frac{1}{m^2}$ بدست می‌آید ، نامساوی‌اخیر را برای مقادیر x_1 ، x_2 در نظر می‌گیریم :

$$x^2=\frac{2n-m}{n^2m}\ ;\ \frac{2n-m}{n^2m}<\frac{1}{m^2}\ ;$$

ولی نامساوی اخیر (بازاء $m>0$ و $n>0$) متحد با نامساوی زیر است :

$$(m-n)^2\geqslant 0$$

برای اینکه جواب مثبت x_2 در معادلهٔ (۱) صدق کند ، لازم و کافی است که

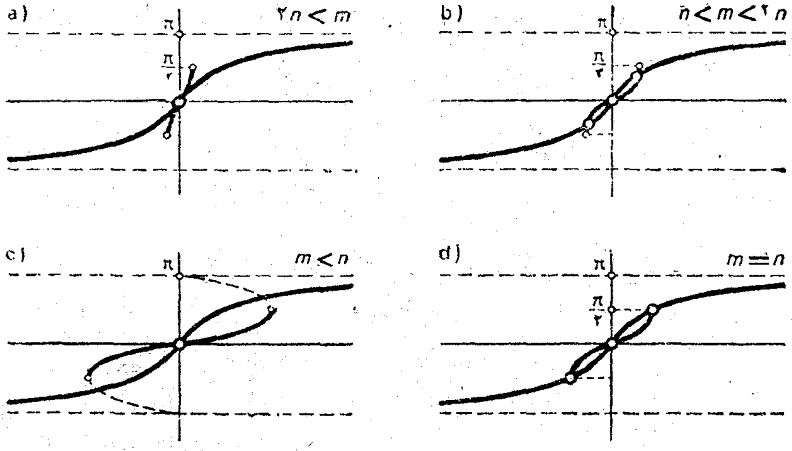
داشته باشیم :

$$۲\,\mathrm{arc}tg\, n x_{۲} \leqslant \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x_{۲} < \frac{۱}{n}$$

یا :

$$\frac{۲n-m}{m} < ۱ \Longrightarrow n < m$$

اگر $۰ < n < m < ۲n$ باشد ، قوسهای $\mathrm{arc}sin\, m x_{۲}$ و $۲\,\mathrm{arc}tg\, n x_{۲}$ سینوسهای مثبت ومساوی دارند وهر دو قوس در ربع اول قرار گرفته‌اند و بنابراین مساوی‌اند یعنی مقدار $x_{۲}$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند .



ش ۱۷۲

در این‌حالت ریشهٔ‌منفی $x_{۱} = -x_{۲}$ هم در معادلهٔ (۱) صدق‌می‌کند .

از آنچه گفتیم نتیجه‌میشود که بازاء $m > ۰$ و $n > ۰$:

a) اگر $۲n < m$ باشد معادله تنها یك جواب $x = ۰$ را قبول دارد (ریشه‌های معادلهٔ (۴) موهومی است) همچنین وقتی‌که $۲n = m$ باشد (در اینصورت $x_{۱} = x_{۲} = ۰$ میشود) .

b) اگر $n \leqslant m < ۲n$ باشد ، معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد .

c) اگر $n > m$ باشد ، معادله تنها یك‌جواب $x = ۰$ دارد .

در حالت اخیر قوس $\text{۲}\operatorname{arctg} x_{\text{۲}}$ بەربع اول ختم میشود و $\text{۲}\operatorname{arctg} x_{\text{۱}} < -\frac{\pi}{\text{۲}}$

تبصره . اگر $m = n$ باشد ، $x_{\text{۱}} = -\frac{\text{۱}}{m}$ و $x_{\text{۲}} = \frac{\text{۱}}{m}$ میشود ،

در این حالت داریم :

$$\operatorname{arcsin} mx = \text{۲}\operatorname{arctg} mx = \pm\frac{\pi}{\text{۲}}$$

نتیجهٔ این بحث را میتوان به روشنی درشکل ۱۷۲ ملاحظه کرد .

حالت دوم) $m<\text{۰}$ و $n<\text{۰}$. این حالت راهم میتوان مثل حالت قبل مورد بحث قرار داد . معادلهٔ (۱) میتواند به معادلهٔ هم‌ارز خود بصورت زیر تبدیل شود: $\operatorname{arcsin}(-mx) = \text{۲}\operatorname{arctg}(-nx)$،

حالت سوم) مقادیر m و n مختلف‌العلامه‌اند . در این حالت معادلهٔ (۱) تنها یك جواب $x = \text{۰}$ را دارد .

حالت چهارم) $m = \text{۰}$ و $n \neq \text{۰}$ یا $m \neq \text{۰}$ و $n = \text{۰}$ بازهم معادله تنها یك جواب دارد : $x = \text{۰}$

حالت پنجم) $m = n = \text{۰}$. معادلهٔ (۱) بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x تبدیل به اتحاد میشود .

با این روش ، ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲)، احتمال ظهور جوابهای خارجی وجود دارد، مثلا درحالت اول (c) . در این حالت ریشهٔ $x_{\text{۱}}$ در معادلهٔ : $\operatorname{arcsin} mx = -\pi - \text{۲}\operatorname{arctg} nx$

و ریشهٔ $x_{\text{۲}}$ در معادلهٔ :

$$\operatorname{arcsin} mx = \pi - \text{۲}\operatorname{arctg} nx$$

صدق می کند .

تبصره . اینکه سینوس طرفین معادلهٔ (۱) را حساب کردیم تا به معادلهٔ (۲) برسیم ، از اینجهت راحت‌تر است که معادلهٔ حاصل با سادگی بیشتری گویا میشود .

۴۸ . نمونه‌هائی از حل بعضی معادلات غیرجبری

در این بند نمونه معادلاتی را حل کرده‌ایم که شامل توابع غیر جبری از مجهول باشند .

چند مثال .

۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_a(\sin x + \cos x) = b \qquad (۱)$$

حل : معادلهٔ مفروض با معادلهٔ زیر هم ارز است :

$$\sin x + \cos x = a^b \implies \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{a^b}{\sqrt{۲}} \quad (۲)$$

شرایط لازم‌وکافی برای‌اینکه معادلهٔ(۲) جواب داشته‌باشداینست که‌داشته‌باشیم:

$$\left|\frac{a^b}{\sqrt{۲}}\right| \leqslant ۱ \implies ۰ < a^b \leqslant \sqrt{۲} \qquad (۳)$$

اگر مبنای‌لگاریتم $a > ۱$ باشد ، نامساویهای (۳) هم‌ارز نامساوی زیرند :

$$-\infty < b \leqslant \frac{۱}{۲}\log_a ۲$$

و اگر $a < ۱$ باشد : $\frac{۱}{۲}\log_a ۲ \leqslant b < +\infty$

با وجود شرایط (۳) ، سری جوابهای زیر را برای معادلهٔ مفروض خواهیم داشت :

$$x = (-۱)^n \arcsin\frac{a^b}{\sqrt{۲}} - \frac{\pi}{۴} + n\pi$$

۲ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{۳}\sin a^x + \cos a^x = b \qquad (۱)$$

حل : معادلهٔ زیر راکه هم ارز معادلهٔ (۱) است حل می‌کنیم :

$$\sin\left(a^x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2} \qquad (2)$$

اگر $|b|>2$ باشد ، معادلهٔ (۲) جواب ندارد ، اگر $|b|\leq 2$ باشد معادلهٔزیر راکه هم ارز (۲) است با پارامتر صحیح n بدست می‌آوریم :

$$a^x=(-1)^n \arcsin\frac{b}{2}-\frac{\pi}{6}+n\pi$$

معادلهٔ اخیر را میتوان بصورت دومعادلهٔ زیر نوشت :

$$a^x=\arcsin\frac{b}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad (3)$$

$$a^x=\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{b}{2}+2k\pi \qquad (3')$$

با توجه باینکه a^x مثبت است، جوابهای قابل قبول k را میتوان معین کرد:

۱°. برای معادلهٔ (۳) داریم :

$$\arcsin\frac{b}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi>0$$

از آنجا :

$$k=\begin{cases} 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots \text{ و } m \text{ و } \ldots & (1<b\leq 2) \\ 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots \text{ و } m \text{ و } \ldots & (-2\leq b\leq 1) \end{cases}$$

۲°. برای معادلهٔ (۳′) داریم :

$$\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{b}{2}+2k\pi>0$$

از آنجا:

$$k=0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots \text{ و } m \text{ و } \ldots$$

باین ترتیب اگر $|b|\leq 2$ باشد ، معادله دوسری جواب دارد :

$$x=\log_a\left(\arcsin\frac{b}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \;;$$

$$x=\log_a\left(\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{b}{2}+2k\pi\right)$$

که در آنها مقادیر k متناظراً با شرایط ۱° و ۲° معین میشود .

۳ . این معادله را حل کنید :

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arccotg} x)$$

حل : اگر فرض کنیم $u = \pi \operatorname{arctg} x$ ، بدست می‌آید :

$$\sin u = \cos u \implies u = \frac{\pi}{٤} + k\pi$$

بنابراین برای تعیین x ، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\operatorname{arctg} x = \frac{۱}{۴} + k$$

مقادیر قابل قبول k ازشرایط زیر بدست می‌آید :

$$-\frac{\pi}{۲} < \frac{۱}{۴} + k < \frac{\pi}{۲} \implies k = ۰ \text{ و } ۱ \text{ و } -۱$$

و معادله دارای سه جواب است :

$$x = tg\frac{۱}{۴}\ ;\ x = -tg\frac{۳}{۴}\ ;\ x = tg\frac{۵}{٤}$$

۴ . این معادله را حل کنید :

$$\log(\operatorname{arctg} x) + \log(\operatorname{arccotg} x) = a$$

حل : مقادیر قابل قبول مجهول از نامساویهای زیر معین میشود :

$$\operatorname{arctg} x > ۰\ ;\ \operatorname{arccotg} x > ۰ \implies x > ۰$$

داریم :

$$\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arccotg} x = ۱۰^{a}$$

اگر فرض کنیم $t = \operatorname{arctg} x$ ، دستگاه مختلط زیر را خواهیم داشت :

$$t^{۲} - \frac{\pi}{۲}t + ۱۰^{a} = ۰\ ;\quad ۰ < t < \frac{\pi}{۲}$$

ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم چنین اند :

$$t = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^{۲} - ۱۶ \times ۱۰^{a}}}{٤}$$

ریشه‌ها وقتی حقیقی هستند که داشته باشیم :

$$\pi^{2}-16\times 10^{a}\geqslant 0 \Longrightarrow a\leqslant 2\log\frac{\pi}{4}$$

با این شرط ، t_1 و t_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم مثبت هستند و نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ خارج ریشه‌ها واقع است ، زیرا داریم : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}-\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}+10^{a}>0$ و $0<t_1\leqslant t_2<\frac{\pi}{2}$ ، زیرا $\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ بنابراین با شرط $a<2\log\frac{\pi}{4}$ معادله دارای دوجواب است :

$$x=\log\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^{2}-16\times 10^{a}}}{4}$$

۵ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(\cos x)^{\cos 3x+2\cos x}=1$$

حل : مقادیر قابل قبول مجهول ازشرط $\cos x>0$ بدست می‌آید . با این‌شرط ، اگر ازطرفین تساوی بالالگاریتم بگیریم، داریم :

$$(\cos 3x+2\cos x)\log\cos x=0$$

معادلهٔ اخیر به دومعادلهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$\cos 3x+2\cos x=0\ ;\ \log\cos x=0$$

معادلهٔ اول را میتوان باین‌صورت نوشت :

$$(4\cos^{2}x-1)\cos x=0$$

از آنجاسه‌سری‌جواب‌زیر بدست می‌آید:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

و از معادلهٔ دوم سری‌چهارم بدست می‌آید :

$$\cos x=1 \Longrightarrow x=2k\pi$$

برای سری اول جوابها شرط $\cos x>0$ صادق است .

برای سری دوم جوابها داریم $\cos x<0$ ، بنابراین ، سری دوم ، جزو

جوابهای خارجی است .

برای سری سوم جوابها، سمت چپ معادله بصورت صفر بتوان صفر درمی آید یعنی مفهوم خود را ازدست می دهد . با استفاده از اصل عبور حدی خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x(4\cos^2 x-1)} = \lim_{z\to 0} z^{z(4z^2-1)} =$$

$$= \lim 10^{(4z^2-1)z\log z} = 1$$

زیرا داریم : $\lim z\log z = 0$. بنابراین سری سوم، جزو جوابهای خاص است.

سری چهارم جوابها در معادله صدق می کند .

باین ترتیب دوسری جواب غیرخاص داریم :

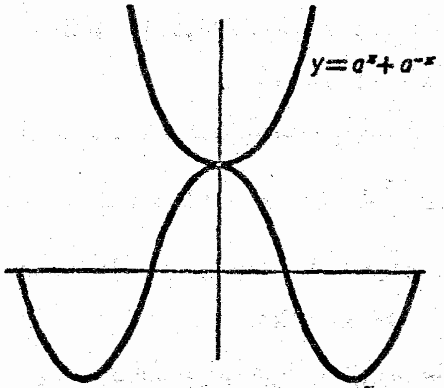
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ x = 2k\pi$$

و یك سری جواب خاص : $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

۶ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$a^x + a^{-x} = 2\cos x$$

حل : سمت چپ تساوی یعنی $a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x}$ بازاء $x = 0$ مساوی ۲ ، حداقل مقدار خود، می باشد و سمت راست تساوی بازاء : $x = 2k\pi$ مساوی حد اکثر مقدار خود یعنی ۲ می شود . بنابراین تساوی دوطرف بازاء $x = 0$ برقرار است و معادله تنها همین یك جواب $x = 0$ را دارد (شکل ۱۷۳) .



ت ۱۷۳

۷ . این معادله را حل کنید :

$$\left(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\right)^{\sin x}=p \qquad (۱)$$

حل : توجه‌می کنیم که: $\sqrt{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}$ ،

اگر فرض کنیم : $t=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{\sin x}{۲}}$

معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

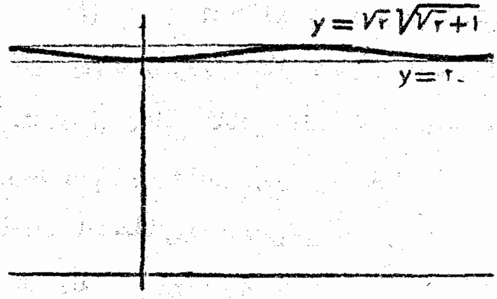
$$f(t)=t^{۲}-pt+۱=۰ \qquad (۲)$$

سمت چپ معادلهٔ (۱) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$y=a^{\sin x}+a^{-\sin x} \qquad (a=\sqrt{\sqrt{۲}+۱});$$

این تابع زوج است و حد اقل آن $y=۲$ بازاء $\sin x=۰$ وحد اکثر آن :

$$y=\sqrt{\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}=\sqrt{۲}\times\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$$



ش ۱۷۴

بازاء $\sin x=۱$ بدست می‌آید . بنابراین منحنی آن با خط $y=p$ بشرطی متقاطع است که داشته باشیم (شکل ۱۷۴) :

$$۲<p<\sqrt{۲}\times\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$$

با رعایت این شرط ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر به وضع زیر خواهند بود:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\leqslant t_1=\frac{1}{t_2}\leqslant 1\leqslant t_2\leqslant\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

باین ترتیب اگر داشته باشیم : $2\leqslant p\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{2}+1}$

معادله سری جوابهای زیر را خواهد داشت :

$$x=\pm\arcsin\frac{2\log\frac{p+\sqrt{p^2-4}}{2}}{\log(\sqrt{2}+1)}+n\pi$$

۴۹ . نامعادلات سادهٔ مثلثاتی

نامعادلاتی بصورت :

$$f(x)<m \quad \text{یا} \quad f(x)>m \qquad (f)$$

را ،که در آن $f(x)$ تابع‌مفروض مثلثاتی باشد، نامعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی‌نامند. با توجه به متناوب بودن تابع مثلثاتی ،کافی است مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ (f) راکه در فاصلهٔ یك دور تناوب تابع مفروض قراردارند ، محاسبه کنیم .

نامعادلات سادهٔ مثلثاتی را بررسی می‌کنیم :

۱°. نامعادلهٔ $\cos x>m$

اگر $m<-1$ باشد ، هر عدد حقیقی دلخواهی جواب نسامعادله خواهد بود : $-\infty<x<+\infty$

اگر $m\geqslant 1$ باشد ، نامعادله جواب ندارد .

اگر $-1\leqslant m<1$ باشد ، جوابهای نامعادله روی نیمدایرهٔفوقانی چنین است : $0\leqslant x<\arccos m;$

زیرا ، با توجه به نزولی بودن کسینوس در فاصلهٔ بستهٔ $۰\leqslant x\leqslant\pi$ ، داریم :

$$\cos x > \cos(\arccos m) = m$$

و روی نیمدایرهٔ تحتانی جوابهای نامعادله بصورت زیر است :

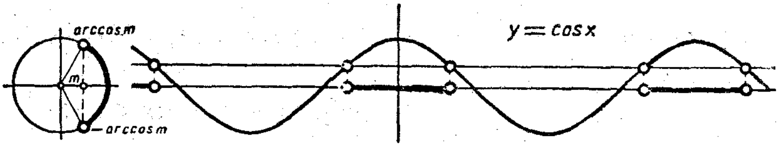
$$-\arccos m < x \leqslant ۰$$

بنابراین در فاصلهٔ $\pi-$ تا π جوابهای زیررا برای نامعادله خواهیم‌داشت:

$$-\arccos m < x < \arccos m .$$

جواب‌کلی عبارتست از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر :

$$(-\arccos m + ۲k\pi \;\text{و}\; \arccos m + ۲k\pi)$$ (شکل ۱۷۵)



ش ۱۷۵

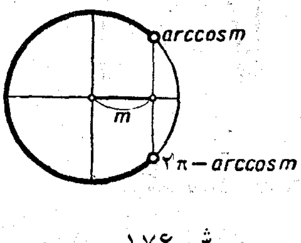
جواب نامعادلهٔ $\cos x < m$ در یك فاصله تناوب عبارتست از :

$$\arccos m < x < ۲\pi - \arccos m$$ (شکل ۱۷۶)

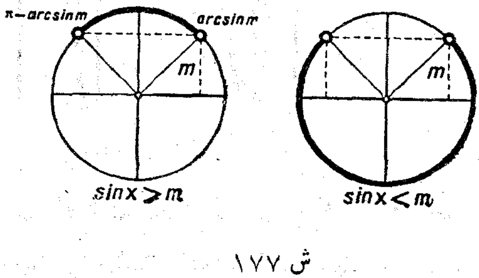
و جوابهای‌کلی از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر تشکیل شده است :

$$(\arccos m + ۲k\pi \;\text{و}\; -\arccos m + ۲(k+۱)\pi)$$

۲°. نامعادلهٔ سادهٔ $\sin x > m$. شبیه حالت قبل داریم (شکل ۱۷۷) :



ش ۱۷۶



ش ۱۷۷

$m<-1$	$-1\leq m<1$	$m\geq 1$
فاصله : $(-\infty, \infty)$	مجموعهٔ فواصل: $\arcsin m+2k\pi<x<(\pi-\arcsin m)+2k\pi$	جواب ندارد

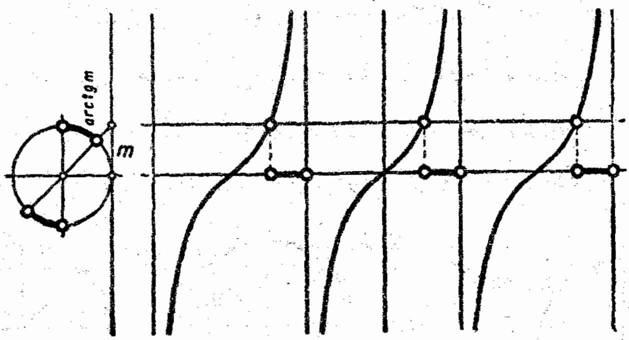
جوابهای نامعادلهٔ $\sin x<m$ (که‌در آن $-1<m<1$ باشد) در یك‌فاصلهٔ تناوب عبارتست‌از:

$$-\pi-\arcsin m<x<\arcsin m$$

۳°. نامعادلهٔ سادهٔ $\operatorname{tg} x>m$ (که درآن m عدد حقیقی دلخواهی است) روی نیمدایرهٔ راست (با توجه به‌صعودی بودن تانژانت) درفاصلهٔ $\operatorname{arctg} m<x<\frac{\pi}{2}$ صدق می‌کند.

جواب کلی عبارتست از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل:

$$\operatorname{arctg} m+k\pi<x<\frac{(2k+1)}{2}\pi \qquad \text{(شکل ۱۷۸)}$$



ش ۱۷۸

دستگاه نامعادلات مثلثاتی رابه این ترتیب‌حل می‌کنیم‌که ابتدافواصلی راکه (در یك‌دور تناوب)در هریك‌از نامعادلات‌صدق می‌کنند ، بطورجداگانه

بدست می‌آوریم وسپس فاصلهٔ مشترك آنها را معین می‌کنیم .

نامعادله‌ای بصورت زیر در نظر می‌گیریم : $f(ax)>m$،

که درآن $f(x)$ تابع مثلثاتی مفروض و a عدد مثبتی است . مثلا نامعادلهٔ $\cos ax>m$ را مورد توجه قرارمی‌دهیم، داریم :

$$-\arccos m+2k\pi<ax<\arccos m+2k\pi$$

ازآنجا :

$$-\frac{\arccos m}{a}+\frac{2k\pi}{a}<x<\frac{\arccos m}{a}+\frac{2k\pi}{a}$$

درحالت خاص اگر $a=p$ راعدد صحیح ومثبتی‌فرض کنیم، تابع $\cos px$ دارای دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{p}$ وهر فاصلهٔ بستهٔ 2π شامل p دورهٔ تناوب سمت چپ تساوی‌است. بنابراین‌روی دایرهٔ واحدم p قوس‌مختلف هندسی‌وجوددارد که‌اگر انتهای قوس x روی هر یك از آنها باشد ، در نامعادله صدق می‌کند . این قوسها بوسیلهٔ نامساویهای زیر معین می‌شوند :

$$-\frac{\arccos m}{p}+\frac{2k\pi}{p}<x<\frac{\arccos m}{a}+\frac{2k\pi}{p}$$

بازاء $k=0$ و 1 و 2 و ... و $p-1$

در شکل ۱۷۹ ، قوسهائی از دایرهٔ واحد که در نامعادلهٔ $\cos 5x>\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند ، مشخص شده است .

چند مثال

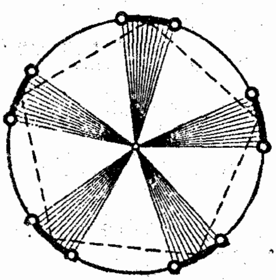
۱ .	نامعادله	جواب عمومی
(a	$\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi$
(b	$\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2k\pi$
(c	$\cos x<-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

(d $\quad tg\,x > tg\,۲ \qquad arctg\,۲ + k\pi < x < \frac{\pi}{۲} + k\pi$

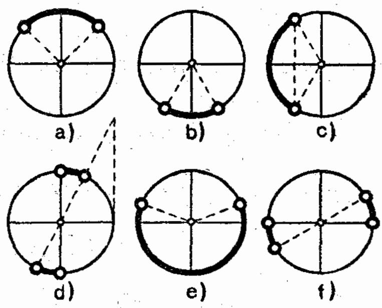
(e $\quad sin\,x < sin\,۰/۳ \qquad -۰/۳ + (۲k-۱)\pi <$
$< x < ۰/۳ + ۲k\pi$

(f $\quad cotg\,x > \sqrt{۳} \qquad k\pi < x < \frac{\pi}{۶} + k\pi$

در شکل ۱۸۰ قوسهائی از دایرهٔ واحد که در . این نامعادلات صدق می‌کنند معین شده است .



ش ۱۷۹



ش ۱۸۰

۲ . دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید :

$$tg\,x > ۱ \quad , \quad cos\,۳x > -\frac{۱}{۲}$$

حل : ۲π دورهٔ تناوب مشترك توابع $tg\,x$ و $cos\,۳x$ است ، بایددراین دورهٔ تناوب ، قوسی را معین کنیم که درهردو نامعادلهٔ مفروض صدق کند .

نامعادلهٔ اول در دو فاصلهٔ زیر صدق می‌کند :

$$\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \ ; \ \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \qquad (۱)$$

و نامعادلهٔ دوم در سه فاصلهٔ زیر :

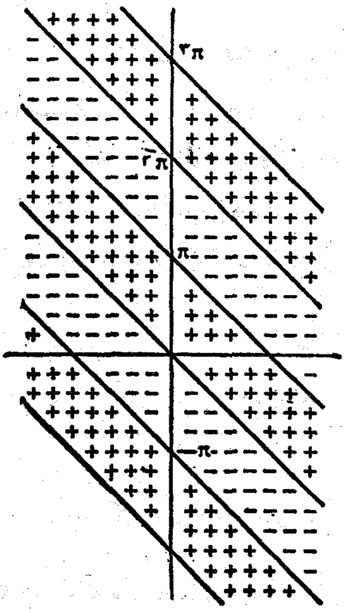
$$-\frac{۲\pi}{۹} < x < \frac{۲\pi}{۹} \ ; \ \frac{۴\pi}{۹} < x < \frac{۸\pi}{۹} \ ; \ \frac{۱۰\pi}{۹} < x < \frac{۱۴\pi}{۹} \qquad (۲)$$

دودستگاه نامساویهای (۱) و (۲) فصل‌مشترکی بصورت دو نامساوی زیر دارند:

$$\frac{۴\pi}{۹}<x<\frac{\pi}{۲}\ ;\ \frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۲}$$

۳ . نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin(x+y)>۰$$



ش ۱۸۱

حل : داریم :

$$۲k\pi<x+y<(۲k+۱)\pi$$

یا :

$$۲k\pi-x<y<(۲k+۱)\pi-x$$

بازاء هر مقدار صحیح k ، نامساویهای بدست آمده منطقه‌ای از صفحه را که بین دو خط موازی قرار گرفته‌اند، معین می‌کند : زیر خط راست $y=-x+۲k\pi$ و بالای خط راست $y=-x+(۲k+۱)\pi$ باین ترتیب اگر به k مقادیر صحیح را نسبت دهیم ، مجموعهٔ بی‌نهایت منطقه‌های موازی بدست می‌آید (شکل ۱۸۱) .

در زیر مثالی از معادلهٔ مثلثاتی می‌آوریم که بحث دربارهٔ آن منجر به حل نامعادلات مثلثاتی میشود :

۴ . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg(\alpha+x)\,tg(\alpha-x)=۱-۲\cos ۲x \qquad (۱)$$

حل : معادله را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)}=\frac{۱-۲\cos ۲x}{۱} \qquad (۲)$$

اگر از این‌خاصیت تناسب :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{b+a}{b-a}=\frac{d+c}{d-c}$$

استفاده کنیم ، بدست می‌آید :

$$\frac{\cos ۲x}{\cos ۲\alpha}=\frac{۱-\cos ۲x}{\cos ۲x} \qquad (۳)$$

اگر $t=\cos ۲x$ و $\beta=۲\alpha$ درنظر بگیریم ، معادلهٔ درجه دوم‌زیر را خواهیم‌داشت:

$$t^۲+t\cos\beta-\cos\beta=۰ \qquad (۴)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۴) وقتی حقیقی هستندکه داشته باشیم :

$$\Delta=\cos^۲\beta+۴\cos\beta=\cos\beta(\cos\beta+۴)>۰$$

ازآنجا (دریك فاصلهٔ تناوب تابع $\cos\beta$) داریم :

$$-\frac{\pi}{۲}<\beta<\frac{\pi}{۲}$$

۱°. اگر $\cos\beta=۰$ باشد ، معادلهٔ (۴) دارای ریشهٔ مضاعف است :

$$t=۰$$

۲°. اگر $\cos\beta>۰$ یعنی $-\frac{\pi}{۲}<\beta<\frac{\pi}{۲}$ باشد ، از ریشه‌های‌معادلهٔ (۴) ، آنکه قدر مطلقش بزرگتر است مثبت و آنکه قدر مطلقش کوچکتر است منفی است .

اگر در سمت چپ $t=۱$ قرار دهیم: $f(۱)=۱>۰$ میشود، بنابراین ریشهٔ مثبت از ۱ کوچکتر است .

اگر $t=-۱$ قرار دهیم : $f(-۱)=۱-۲\cos\beta$ میشود .

a) اگر $f(-۱)>۰$ و $\Delta>۰$ باشد ، ریشهٔ کوچکتر در فاصلهٔ (۰ و ۱-] واقع میشود و داریم : $\cos\beta<\frac{۱}{۲}$ و $\cos\beta>۰$ ، از آنجا دو فاصلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{2}\ ;\ -\frac{\pi}{2}<\beta<-\frac{\pi}{3}$$

در این‌حالت داریم: $-1<t_1<0<t_2<1$

b) اگر $f(-1)<0$ و $\Delta>0$ یعنی $\cos\beta>\frac{1}{2}$ و $\cos\beta>0$ باشد

$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{3}$ میشود و ریشهٔ کوچکتر در خارج فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۱ —] قرار

می‌گیرد. در این‌حالت داریم:

$$t_1<-1<0<t_2<1$$

حالت ۱° در زیر بعنوان حالت‌خاص معادلهٔ (۳) بررسی میشود.

حالت ۲° ــ a) وقتی وجود دارد که داشته باشیم:

$$\frac{\pi}{6}+k\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ و } -\frac{\pi}{4}+k\pi<\alpha<-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

و جواب کلی معادلهٔ (۱) با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-\cos2\alpha\pm\sqrt{\cos2\alpha(\cos2\alpha+4)}}{2}+n\pi$$

حالت ۲° ــ b) وقتی وجود دارد که داشته باشیم:

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi<\alpha<\frac{\pi}{6}+k\pi$$

و جواب کلی معادلهٔ (۱) بوسیلهٔ رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-\cos2\alpha+\sqrt{\cos2\alpha(\cos2\alpha+4)}}{2}+k\pi$$

تشکیل تناسب و تبدیل آن به معادلهٔ (۳) ممکن‌است‌منجر به معادله‌ای شود که هم ارز معادلهٔ مفروض نباشد. در زیر حالتهای خاص را بررسی می‌کنیم:

۳°. $\cos2\alpha=0$ ، ازآنجا $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$. در این‌حالت معادلهٔ (۱)

بصورت زیر در می‌آید :

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+x+k\frac{\pi}{2}\right)tg\left(\frac{\pi}{4}-x+k\frac{\pi}{2}\right)=1-2\cos 2x\ ;$$

اگر k عدد زوجی باشد ، بدست می‌آید :

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1-2\cos 2x \Longrightarrow 1=1-2\cos 2x$$

ازآنجا $\cos 2x=0$ و معادله سری جوابهای خاص زیر را خواهد داشت :

$$x=\frac{\pi}{4}+m\frac{\pi}{2}$$

وقتی‌که k فرد باشد ، معادله بصورت زیر در می‌آید :

$$cotg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)cotg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1-2\cos 2x \Longrightarrow 1=1-2\cos 2x$$

بنابراین در این‌حالت هم‌همان سری‌جوابهای خاص‌را خواهیم داشت .

۴° . $\cos 2x=0$ و فرض می‌کنیم که برخلاف حالت قبل $\cos 2\alpha \neq 0$ باشد . داریم : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. اگر در سمت چپ معادلهٔ مفروض قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$tg(\alpha+x)tg(\alpha-x)=-tg(x+\alpha)tg(x-\alpha)=-1$$

و این معادله جواب ندارد .

متذکر می‌شویم که‌برای‌معادلهٔ(۱) ممکن‌است ازاینجهت‌هم حالت‌خاصی پیدا شود که یکی از عوامل سمت‌چپ مفهوم‌خود را از دست بدهد وعامل‌دیگر مساوی صفرشود . مثلا فرض‌کنید :

$$x+\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ x-\alpha=m\pi$$

در اینصورت داریم :

$$2x=\frac{\pi}{2}+(k+m)\pi\ ;\quad \cos 2x=0$$

و این حالت را هم بحث‌کرده‌ایم .

۵۰. نمونه‌هائی از نامعادلات مثلثاتی وسایر نامعادلات غیر جبری

I . با توجه به قواعد کلی مربوط به اعمال اصلی روی نـامساویهائی که شامل مقادیر مطلق هستند و بر اساس خواص توابع مثلثاتی: محدود بودن آنها : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
یکنوائی آنها وغیره ، میتوان نامساویهای مختلفی را اثبات کرد که مقـادیر توابع مثلثاتی آنها درفواصل مختلفی قرار داشته باشند. در اینجا نمونه‌هائی از نامساویهای مختلف ذکرشده‌است ولی‌متذکر میشویم که‌در این‌باره‌هیچگونه نظریهٔ کلی که طبق آن بتوان وجود نامساوی را از قبل پیش‌بینی کردنمیتواند وجود داشته باشد .

چند مثال

۱. ثابت کنید که وقتی x زاویه‌ای حاده داشته‌باشد، داریم :

$$\sin x + \cos x > 1$$

حل : اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

برای‌زوایای‌حاده‌داریم: $1 > \sin x > 0$ وبنا براین $\sin^2 x < \sin x$ و همچنین $\cos^2 x < \cos x$ است ، ازآنجا نامساوی‌موردنظراثبات میشود (آنرا تعبیر هندسی‌کنید) . برای زاویهٔ حادهٔ x نامساویهای زیر هم بسادگی ثابت میشود :

۲. $\sin x < tg\,x$. زیرا داریم $tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $0 < \cos x < 1$

۳. $\sin(x+y) < \sin x + \sin y$. (از رابطه $S_{\alpha+\beta}$ استفاده کنید).

۴. $\sin 2x < 2\sin x$. زیرا $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $0 < \cos x < 1$

۵. $tg\,2x < 2tg\,x$، با شرط $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، زیرا داریم ،

$$tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1 - tg^2 x}$$

II . نامعادله‌ای که نسبت بیکی از توابع مثلثاتی گویا باشد :

$$R(f(x)) > 0\ ,$$

با تبدیل $f(x) = t$ حل میشود ، ضمناً نا مساوی .

$$(R)\qquad R(t) > 0$$

در حالتی که $f(x)$ نماینده سینوس یا کسینوس است ، باید همراه‌با نامساویهای $-1<t<1$ در نظر گرفته شود . وقتی که نسامساوی (R) را نسبت به آوند واسطهٔ t حل کنیم، مسئله منجر به حل‌یك نامعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی‌می‌شود.

اگر سمت‌چپ تساوی نسبت به چند تابع گویا باشد ، با گویانش آن (حالتهای مختلف گویانش در بند ۳۰ مورد بحث قرار گرفته است) نامعادله را به‌حالت قبل تبدیل می کنیم .

چند مثال

۱ نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x > \cos^2 x$$

حل : $t = \sin x$ فرض می‌کنیم ، دستگاه نامعادلات زیر بدست‌می‌آید

$$t^2 + t - 1 > 0\ ;\quad -1<t<1$$

با حل نامعادلهٔ اول مجموعهٔ دو فاصلهٔ زیر بدست‌می‌آید :

$$-\infty < t < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} < t < +\infty$$

که با توجه به نامساویهای دوم ، جوابهای مشترك چنین‌خواهند بود :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<t<1$$

بنابراین نامعادلهٔ مثلثاتی مفروض با نامعادلهٔ زیر هم ارز است :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\sin x$$

و از آنجا :

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi<x<-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(2k+1)\pi$$

(از جدول میتوان پیدا کرد : $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\neq 0.66$).

۰۲ نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}>0$$

حل : اگر $t=tg\frac{x}{2}$ فرض کنیم (پس از تبدیل و سپس ساده کـردن) خواهیم داشت :

$$\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{1-t}{1+t}>0$$

از آنجا دو دستگاه خطی زیر بدست می‌آید :

$$(I)\begin{cases}1-t>0\\1+t>0\end{cases}\quad و \quad(II)\begin{cases}1-t<0\\1+t<0\end{cases}$$

دستگاه اول‌جواب $-1<t<1$ راقبول‌دارد ودستگاه دوم‌جواب ندارد.

بنابراین : $-1<tg\frac{x}{2}<1$

ازآنجا در فاصلهٔ یك دور تناوب داریم :

$$-\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$$

و جواب کلی از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل $(\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ و $\frac{۲k-۱}{۲}\pi)$ تشکیل شده است (قوسهائی که به نیمدایرهٔ راست ختم شده‌اند) .

تبصره. در نقطهٔ $x=۰$ ، مقدار سمت‌چپ نامعادلهٔ مفروض طبق‌اصل ادامهٔ اتصال چنین است :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x+\cos x-۱}{\sin x-\cos x+۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-t}{۱+t}=۱$$

III . برای حل نـامعادلات مثلثاتی میتوان از روش عمومی زیر استفاده کرد .

فرض کنیم که معادلهٔ : $\quad (f) \qquad f(x)=۰$

قابل حل ، یعنی تمام ریشه‌های آن معلوم، باشد. در اینصورت اگر ریشه‌های این معادله را به ترتیب صعودی منظم کنیم ، حوزه‌ای را که تابع $f(x)$ معین است ، به مجموعهٔ چند یا بی‌نهایت فواصل تقسیم می‌کند . $x_{i-۱}$ و x_i را دو ریشهٔ مجاور معادلهٔ (f) فرض می‌کنیم ، اگر تابع $f(x)$ متصل باشد ، در فاصلهٔ $(x_{i-۱}$ و $x_i)$ علامت ثابتی خواهد داشت ، زیرا در این فـاصله بسمت صفر میل نمی‌کند . در این‌حالت ، ریشه‌های معادلهٔ (f) ، حوزه‌ای‌را که تابع $f(x)$ معین است، به فواصل باعلامت ثابت تقسیم می‌کند. دراینصورت جواب عمومی نامعادلهٔ $f(x)>۰$ عبارتست ازمجموعهٔ همهٔ فواصلی که درآنها تابع $f(x)$ مثبت است .

اگر تابع $f(x)$ به صورت ضرب : $f=f_۱f_۲\dots f_k$ تبدیل شود و برای هریك ازعوامل (بطور جداگانه) فواصل باعلامت ثابت معین‌شده باشد میتوان به‌کمك آنها $f(x)$ را در حوزه‌ای که معین است‌به فواصل باعلامت‌ثابت تقسیم کرد.

چند مثال .

۱. نامعادلهٔ زیر را حل کنید : $\sin x > \sin 3x$

حل : نامعادلهٔ هم ارز آنرا حل می‌کنیم :

$$\sin x - \sin 3x > 0 \implies -2\cos 2x \sin x > 0 \;;$$

نامعادلهٔ اخیر هم ارز نامعادلهٔ زیر است :

$$\cos 2x \sin x < 0 \qquad (1)$$

ریشه‌های معادلهٔ زیر را معین می‌کنیم :

$$\cos 2x \cdot \sin x = 0$$

فاصلهٔ بستهٔ $[-\pi, \pi]$ را میتوان یك دورهٔ تناوب مشترك عوامل سمت چپ تساوی دانست. باحل معادلات $\cos 2x = 0$ و $\sin x = 0$، جوابهای : $x = \pm\frac{\pi}{4}$ و $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ و $x = 0$ و $x = \pm\pi$ بدست می‌آید . جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\pi$	$<x<$	$-\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{4}$	$<x<$	0	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	π
$\cos 2x$	+	+	0	−	0	+	+	+	0	−	0	+	+
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	0
$\cos 2x \cdot \sin x$	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

بنابراین جوابهای نامعادلهٔ (۱) دریك فاصلهٔ تناوب چنین‌اند :

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) ; \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) ; \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$$

وجواب کلی از سه‌سری فواصل زیر تشکیل شده است :

$$\left((2k-1)\pi, \left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi\right) ; \left(\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi, 2k\pi\right) ;$$

$$\left(\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi, \left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi\right)$$

۲. نامعادلهٔ زیر را حل کنید : $tg\frac{x}{2} < tg\,x$

حل : دورهٔ تناوب مشترک سمت راست وسمت چپ نامساوی برابر است با 3π . داریم :

$$tg\,x - tg\frac{x}{3} > 0 \Longrightarrow \frac{\sin\frac{2x}{3}}{\cos x \cos\frac{x}{3}} > 0$$

جدولی راکه علامت عوامل صورت ومخرج را تعیین می‌کند تشکیل می‌دهیم:

x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{5\pi}{2}$	$<x<$	3π
$\sin\frac{2x}{3}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\cos x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$\cos\frac{x}{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{\sin\frac{2x}{3}}{\cos x\cos\frac{x}{3}}$	0	$+$		$-$		$+$		$-$	0

فواصل $(\frac{\pi}{2} \text{ و } 0)$ و $(\frac{3\pi}{2} \text{ و } \frac{5\pi}{2})$ در نامعادله صدق می‌کنند .

IV . برای حل نامعادلات میتوان از محورهای مختصات هم استفاده کرد . از آنجاکه $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ طول وعرض نقاط دایرهٔ واحدهستند ، حل نامعادلهٔ: $f(\cos\varphi , \sin\varphi) > 0$

باحل دستگاه مختلط جبری زیر هم‌ارزاست :

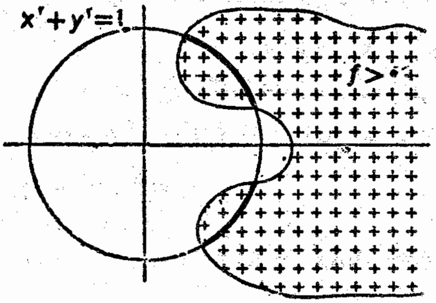
$$f(x,y) > 0 \text{ و } x^2+y^2=1;$$

این دستگاه قسمتی از دایرهٔ واحدرا معین می‌کند که درحوزهٔ $f(x,y) > 0$

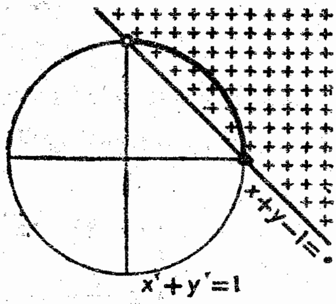
واقع باشد (شکل ۱۸۲). جوابهای دستگاه معادلات :

$$f(x \text{ و } y)=0 \text{ و } x^2+y^2=1$$

انتهای قوسهائی را ، که در نامعادلهٔ مثلثاتی صدق می‌کنند ، معین می‌کند .



ش ۱۸۲



ش ۱۸۳

چند مثال

۱. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\cos\varphi+\sin\varphi>1$$

حل : دستگاه مختلط زیر را حل می‌کنیم :

$$x+y-1>0 \text{ و } x^2+y^2=1$$

باید قوسی از دایره را پیدا کرد که در بالای خط $y=-x+1$ واقع باشد

نقاط تلاقی این خط را با دایره پیدا می‌کنیم :

$$x^2+y^2=1 \text{ و } y=-x+1$$

از این دستگاه ، مختصات دو انتهای قوس بدست می‌آید :

$$x_1=1\ ;\ y_1=0 \text{ و } x_2=0\ ;\ y_2=1$$

که در نیم صفحهٔ بالا نسبت به خط $y=-x+1$ (شکل ۱۸۳) قوس

$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ قرار گرفته است.

جواب عمومی معادله ازمجموعهٔ بی‌نهایت فواصل $(2k\pi \text{ و } \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ تشکیل

شده است (قوسهائی که به ربع اول ختم شده‌اند) .

۳. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin\varphi > 4\sqrt{3}\cos^3\varphi$$

حل : دستگاه مختلط زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$y < 4\sqrt{3}x^3 \;;\; x^2+y^2=1$$

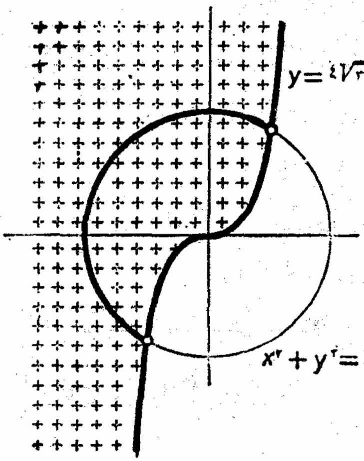
جواب این دستگاه مختلط عبارتست از قوسی از دایرهٔ واحد که در بالای منحنی درجه سوم $y=4\sqrt{3}x^3$ واقع است . نقاط تلاقی دایره و منحنی درجه‌سوم را پیدا می کنیم :

$$\begin{cases} y=4\sqrt{3}x^3 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Longrightarrow 48x^6+x^2=1$$

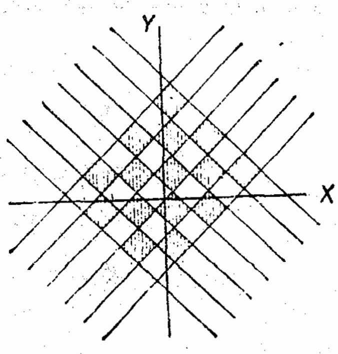
معادلهٔ اخیر دو ریشهٔ حقیقی دارد : $x=\pm\frac{1}{2}$. قوس $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{4\pi}{3}$ قوسی از دایرهٔ واحد است که در بالای منحنی درجه سوم قرار گرفته است (شکل ۱۸۴) .

جواب عمومی از مجموعهٔ بی‌نهایت فواصل زیر تشکیل شده است :

$$\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ و } \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)$$



ش ۱۸۴



ش ۱۸۵

V . در زیر نمونه‌ای از نامعادلات مثلثاتی که شامل دو مجهول‌اند ، ذکر شده است :

مثال : نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x > \sin y$$

حل : حل نامعادله را بطریق هندسی می‌دهیم . داریم :

$$\sin x - \sin y > 0 \Longrightarrow \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} > 0$$

عامل اول وقتی مثبت است که داشته باشیم :

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$(4k-1)\pi - x < y < (4k+1)\pi - x$$

همچنین باشرط زیر عامل اول منفی است :

$$(4k+1)\pi - x < y < (4k+3)\pi - x$$

عامل دوم وقتی مثبت است که $\sin\frac{y-x}{2} < 0$ باشد، یعنی :

$$(2k+1)\pi < \frac{y-x}{2} < 2(k+1)\pi$$

یا : $$(4k+2)\pi + x < y < 4(k+1)\pi$$

همین عامل دوم با شرط $4k\pi + x < y < (4k+2)\pi + x$ منفی است . قسمتهائی از صفحهٔ مختصات که در آنجا دو عـامل هم‌علامت‌اند مجموعهٔ بی‌نهایت مربع خواهد بود که بشکل خانه‌های شطرنج منظم شده‌اند. درشکل ۱۸۵ این مربع‌ها را هاشور زده‌ایم .

VI . نامعادلات ساده‌ای هم که شامل توابع معکوس مثلثاتی باشند ، مستقیماً حل میشوند ؛ کافی استازخاصیت یکنوائی‌تابع استفاده کنیم‌وحوزه‌ای راکه تابع مفروض معین است و مجموعهٔ مقادیر آنرا در نظر داشته باشیم .

باین ترتیب نامعادلهٔ : $\arcsin x < a$

وقتی که $\frac{\pi}{2} < a$ باشد، بازاء تمام‌مقادیری که آرک‌سینوس معین‌است‌صادق‌است، یعنی در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$. وقتی که $-\frac{\pi}{2} < a \leqslant \frac{\pi}{2}$ باشد داریم :

$$\arcsin x < \arcsin(\sin a) \Longrightarrow -1 \leqslant x < \sin a$$

و وقتی که $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$ باشد نامعادله جواب ندارد ، زیرا $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x$ است .

چند مثال

	نامعادله	جواب عمومی
۱.	$\arcsin x < 1$	$-1 < x < \sin 1$
۲.	$\arcsin x < 5$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
۳.	$\arccos x > \arccos \frac{1}{3}$	$-1 < x < \frac{1}{3}$
۴.	$\operatorname{arctg} x > 5$	جواب ندارد
۵.	$\operatorname{arctg} x < 5$	$-\infty < x < +\infty$
۶.	$\arccos x > 0$	$-1 \leqslant x < 1$
۷.	$\arccos x < -\frac{\pi}{3}$	جواب ندارد
۸.	$\arcsin x < -\frac{\pi}{6}$	$-1 \leqslant x < -\frac{1}{2}$
۹.	$\operatorname{arccotg} x > \frac{3\pi}{4}$	$-\infty < x < -1$
۱۰.	$\operatorname{arccotg} x > \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < 0$
۱۱.	$\arcsin x \leqslant -2$	جواب ندارد

۱۲ . این نامعادله را حل کنید :

$$\operatorname{arctg}^{2}x - 4\operatorname{arctg}x + 3 > 0 \qquad (1)$$

حل : $t = \operatorname{arctg}x$ فرض می‌کنیم ودستگاه زیر را حل می‌کنیم :

$$t^{2} - 4t + 3 > 0;\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

جوابهای نامعادلهٔ‌درجه‌دوم‌دردوفاصلهٔ $-\infty < t < 1$ و $3 < t < +\infty$

وجوابهای دستگاه(۲) در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2} < t < 1$ قرار دارد . جوابهای (۱)

را باشرط $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}x < 1$ پیدا می‌کنیم که‌در اینصورت‌داریم:

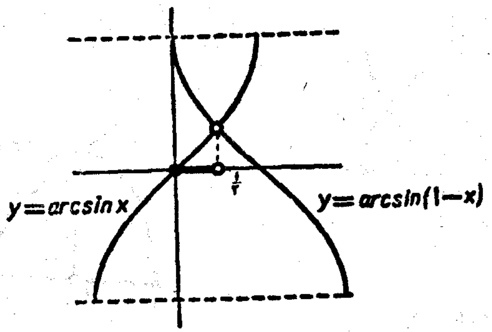
$$-\infty < x < \operatorname{tg}1$$

VII . در اینجا نمونه‌هائی از حل نامعادلاتی‌راذکر می‌کنیم که شامل توابع غیر جبری نسبت‌به مجهول باشند .

۱. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arcsin x < \arcsin(1 - x)$$

حل : سمت‌چپ نامساوی‌درفاصلهٔ‌بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ وسمت راست‌نامساوی در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 2$ معین است که مقدار مشترک آنها $0 \leqslant x \leqslant 1$ میباشد .



ش ۱۸۶

با توجه به صعودی بودن آرک سینوس داریم :

$$0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{و} \quad x<1-x$$

و از آنجا فاصلهٔ $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ بدست می‌آید (شکل ۱۸۶).

۲. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

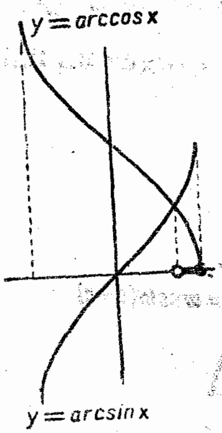
$$\arcsin x\geqslant\arccos x$$

حل : اگر $x<0$ باشد ، نا معادله نمیتواند برقرار باشد ، زیرا در اینصورت $\arcsin x<0$ و $\arccos x>0$ خواهد بود . بنابراین کافی است جوابهای نامعادله را در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ پیدا کنیم . با این فرض سمت چپ وسمت راست نامعادله در ربع اول (بسته) قرار می گیرند ، که در آنجا (باتوجه به یکنوائی سینوس) داریم:

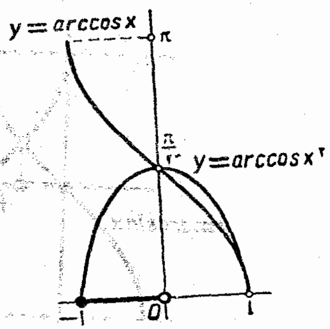
$$\sin(\arcsin x)>\sin(\arccos x)\Longrightarrow x>\sqrt{1-x^2}$$

از آنجا $x^2>1-x^2$ و بالاخره $\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1$ (شکل ۱۸۷).

نامساوی $\arcsin x<\arccos x$ درفاصلهٔ $-1\leqslant x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ صادق است .



ش ۱۸۷



ش ۱۸۸

۳. این نامعادله را حل کنید :

$$\arccos x > \arcsin x^2$$

حل : سمت راست و سمت چپ نامساوی در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leq x \leq 1$ معین است . با توجه به نزولی بودن آرک کسینوس داریم :

$$x < x^2 \quad و \quad -1 \leq x \leq 1$$

و از آنجا $-1 \leq x < 0$ (شکل ۱۸۸) .

۴. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\arcsin(x^2+1) < 2$$

حل : سمت‌چپ تساوی تنها بازاء $x=0$ معین است وبازاء این مقدار هم نامعادله‌برقراراست. بنابراین‌نامعادله‌تنهایك‌جواب $x=0$ راقبول دارد.

۵. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$a^{\sin x} > a^{\cos x} \qquad (a > 0)$$

حل : بازاء $a > 1$ نامعادلهٔ مفروض‌هم ارز نامعادلهٔ مثلثاتی زیراست:

$$\sin x > \cos x \Longrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

و :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

بازاء $a < 1$ نامعادله باینصورت درمی‌آید :

$$\sin x < \cos x \Longrightarrow -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

بازاء $a = 1$ نامعادله جواب ندارد .

۶. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin(4\cos x) > 0$$

حل : اگر فرض کنیم $u = 4\cos x$ ، چون داریم : $-4 \leq u \leq 4$ باید دستگاه زیر را حل کنیم :

$$\sin u < 0; \quad -4 \leq u \leq 4$$

فاصلهٔ بستهٔ [۴ و ۴ —] را به فواصل زیر تقسیم می‌کنیم :

$$-۴\leqslant u<-\pi \;;\; -\pi\leqslant u\leqslant ۰ \;;\; ۰<u\leqslant\pi \;;\; \pi<u\leqslant ۴$$

نامعادلهٔ $\sin u>۰$ در فواصل زیر برقرار است :

$$-۴\leqslant u<-\pi \;;\; ۰<u<\pi$$

از آنجا دو دستگاه نامعادله بدست می‌آید :

$$-۱\leqslant \cos x\leqslant -\frac{\pi}{٤};\quad ۰<\cos x<\frac{\pi}{٤}$$

در فاصلهٔ یك‌دور تناوب کسینوس، دستگاه اول جوابهای زیر راقبول دارد:

$$\pi-\arccos\frac{\pi}{٤}<x<\pi+\arccos\frac{\pi}{٤}$$

و دستگاه دوم در فواصل زیر صادق است :

$$\arccos\frac{\pi}{٤}<x<\frac{\pi}{۲}\;;\; -\frac{\pi}{۲}<x<-\arccos\frac{\pi}{٤}$$

جواب عمومی از سه سری فاصله تشکیل شده است :

$$(۲k+۱)\pi-\arccos\frac{\pi}{٤}<x<(۲k+۱)\pi+\arccos\frac{\pi}{٤}$$

$$\arccos\frac{\pi}{٤}+۲k\pi<x<\frac{۴k+۱}{۲}\pi;$$

$$\frac{۴k-۱}{۲}\pi<x<۲k\pi-\arccos\frac{\pi}{٤}\cdot$$

۷. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg\,\frac{\pi x}{۴(x+۱)}>۱$$

حل : نامعادله وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$\frac{\pi}{۴}+k\pi<\frac{\pi x}{۴(x+۱)}<\frac{\pi}{۲}+k\pi$$

از آنجا :
$$۱+۴k<\frac{x}{x+۱}<۲+۴k \qquad (۲)$$

توجه می‌کنیم که بازاء هرمقدار مفروض وصحیح k اعداد $۱+۴k$ و $۲+۴k$ هم علامت‌اند ، درحقیقت :

$$۱+۴k>۰ \Rightarrow k>-\frac{۱}{٤} \Rightarrow k\geqslant ۰ ;$$

$$۲+۴k>۰ \Rightarrow k>-\frac{۱}{۲} \Rightarrow k\geqslant ۰$$

و بهمین ترتیب‌هردو عبارت بازاء $k<۰$ منفی هستند . بنا براین بازاء هر مقدار دلخواه صحیح k ، نامعادلهٔ (۲) هم ارز نامعادلهٔ زیر است :

$$(۳) ; \frac{۱}{۱+۴k}>۱+\frac{۱}{x}>\frac{۱}{۲+۴k} \Rightarrow \frac{-۴k}{۱+۴k}>\frac{۱}{x}>\frac{-۴k-۱}{۲+۴k}$$

اعداد $\frac{-۴k}{۱+۴k}$ و $\frac{-۴k-۱}{۲+۴k}$ بازاءهر مقدارصحیح $k\neq ۰$ هم علامت‌اند (هر دو منفی‌اند) . درحقیقت ، وقتی $k>۰$ باشد . صورت هردو کسر منفی ومخرج آنها مثبت است و وقتی $k<۰$ باشد صورتها مثبت و مخرجها منفی است . بنابراین ، بازاء هر مقدار صحیح $k\neq ۰$ نامعادلات (۳) هم ارز با نا معادلات زیرند :

$$-\frac{۱+۴k}{۴k}<x<-\frac{۲+۴k}{۴k+۱} \qquad (۴)$$

بازاء $k=۰$ از نامعادلات (۳) بدست می‌آید :

$$۰>\frac{۱}{x}>-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\infty<x<-۲$$

جواب عمومی (۱) عبارتست ازمجموعهٔ بی‌نهایت‌فواصل (۴) و فاصلهٔ (۲ — و $-\infty$)

۸. نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

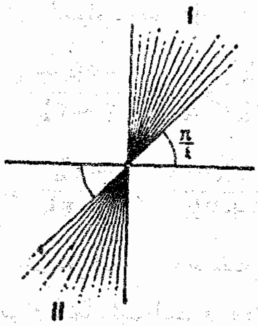
$$\operatorname{arc}tg\frac{y}{x}>۱$$

حل : نامعادلهٔ مفروض هم ارز نامعادلهٔ $\frac{y}{x}>\frac{\pi}{٤}$ است .

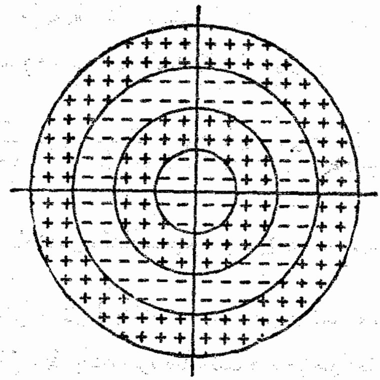
بازاء $x>0$ داریم : $\frac{\pi}{4}x<y<+\infty$

و بازاء $x<0$ داریم : $-\infty<y<\frac{\pi}{4}x$

از لحاظ هندسی ، جواب‌عمومی از دوقسمت (I) و (II) (نقاط واقع درداخل دو زاویهٔ روبرو) تشکیل‌شده است (شکل ۱۸۹) .



ش ۱۸۹



ش ۱۹۰

۹. این نامعادله را حل کنید :

$$\sin \pi(x^2+y^2)<0$$

حل : داریم : $(2k+1)\pi<\pi(x^2+y^2)<2(k+1)\pi$

که باتوجه باینکه $x^2+y^2\geqslant 0$ است ، ... و۳ و ۲ و ۱ و $k=0$ خواهدبود،

بنابراین : $\sqrt{2k+1}<\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2(k+1)}$

ازنظر هندسی، مجموعهٔ جوابهای نامعادله تشکیل شده است ازمجموعهٔ بی‌نهایت حلقه‌های متحدالمرکز (باز) بمرکز مبداء مختصات (درشکل ۱۹۰، این حلقه‌ها با علامت + مشخص شده‌اند) .

۵۱ . نامساویهائی که شامل آوند و توابع مثلثاتی آن باشند

در این بند از نامساویهائی صحبت خواهیم کرد که هم شامل آوند و هم توابع مثلثاتی آن باشند . در این موارد آوندهای همهٔ توابع مثلثاتی برحسب رادیان بیان می‌شوند . این نامساویها در محاسبات تقریبی و بخصوص در تنظیم جداول مثلثاتی و ارزیابی خطاها مورد استعمال دارند (به بند ۶۷ مراجعه کنید) .

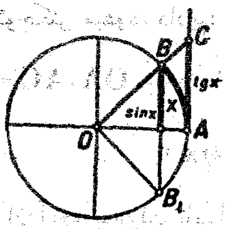
۱ . برای همهٔ مقادیر حقیقی x نامساوی زیر برقرار است :

$$|\sin x| \leqslant |x| \qquad (۱)$$

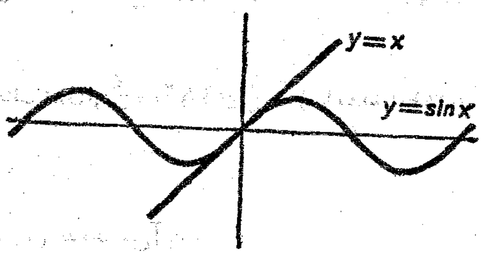
علامت تساوی تنها درمورد $x=0$ صادق است .

بعبارت دیگر قدر مطلق سینوس هرگز از مقدار آوند آن تجاوز نمی‌کند .

اثبات . وقتی که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد ، نامساوی برقرار است ، زیرا طول نصف وتر BB_1 از دایرهٔ واحد (شکل ۱۹۱) ، یعنی $\sin x$ ، کوچکتر است از طول نصف قوس متناظر آن ، یعنی x (x عبارتست از اندازهٔ قوس



ش ۱۹۱



ش ۱۹۲

AB برحسب رادیان) . باین ترتیب بازاء $\cdot < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم :

$$\cdot < \sin x < x$$

وقتی‌داشته‌باشیم: $-\frac{\pi}{۲} < x < \cdot$ ، طولهای نصف وتر و نصف قوس مقادیر $|\sin x|$ و $|x|$ را بیان می‌کنند و بنابراین در این حالت هم نامساوی برقرار است .

اگر $|x| > \frac{\pi}{۲}$ باشد ، واضح است که $|\sin x| < |x|$ است ، زیرا $\frac{\pi}{۲} > ۱$ و $|\sin x| < ۱$ می‌باشد .

باین ترتیب نامساوی(۱) بازاءهمهٔ مقادیر $x \neq \cdot$ برقرار استوبازاء $x = \cdot$ هم نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود .

تعبیر هندسی . چون بازاء $x > \cdot$ داریم : $\sin x < x$ و بازاء $x < \cdot$ داریم : $x < \sin x$ ، در نیم صفحهٔ راست مختصات $(x > \cdot)$ منحنی سینوسی زیر نیمسازربع اول $(y = x)$ و در نیم صفحهٔ چپ $(x < \cdot)$ بالای این نیمساز قرار می‌گیرد(شکل۱۹۲)

۲. در فاصلهٔ $\cdot < x < \frac{\pi}{۲}$ نامساوی زیر همیشه برقرار است :

$$x < tg\, x \qquad (۲)$$

اثبات . در حقیقت ، مثلث OAC (شکل ۱۹۱) شامل قطاع OAB از دایرهٔواحد است وبنابراین، مساحت‌قطاع OAB ازمساحت مثلث OAC کوچکتر میشود، داریم:

$$(\text{مساحت‌قطاع}\, OAB) = \frac{۱}{۲} x OA^۲ = \frac{x}{۲}; (\text{مساحت‌مثلث}\, OAC) = \frac{۱}{۲} OA \cdot AC =$$

$$= \frac{۱}{۲} tg\, x ,$$

و از آنجا بسهولت نامساوی (۲) بدست می‌آید .

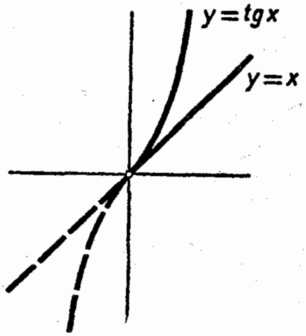
در شکل ۱۹۳ تعبیر هندسی نامساوی (۲) داده شده است .

نتایج : ۱° . در فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}>x>0$ دستگاه نامساوی زیر برقرار است:

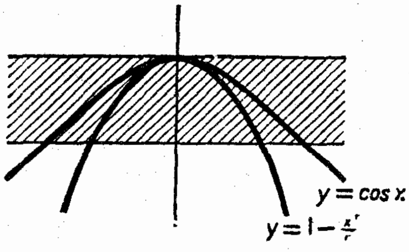
$$\sin x<x<tg\,x$$

۲°. بازاء $|x|\neq 0$ نامساوی $|x|<\arcsin x|$ برقرار است . این نامساوی باین ترتیب بدست می‌آید که در نامساوی $|\sin y|<|y|$ فرض کنیم:

$$y=\arcsin x$$



ش ۱۹۳



ش ۱۹۴

۳ . بازاء هرمقدار x نامساوی زیر برقرار است :

$$1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2} \quad \text{یا} \quad 1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos x \qquad (3)$$

حالت تساوی بازاء $x=0$ برقرار است .

اثبات . درحقیقت داریم :

$$0\leqslant 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

ولی با توجه به نامساوی (۱) داریم : $\sin^2\frac{x}{2}\leqslant\frac{x^2}{4}$ ، از آنجا نامساوی (۳) نتیجه میشود .

تعبیر هندسی . منحنی $y=\cos x$ بین خط $y=1$ وسهمی $y=1-\frac{x^2}{2}$

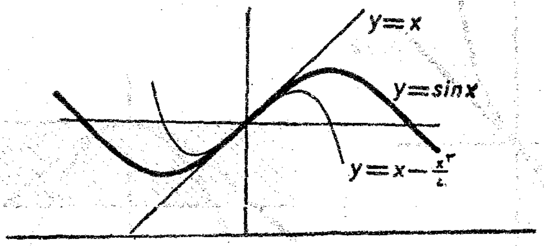
واقع است (شکل ۱۹۴) .

۴ . درفاصلهٔ (π و ۰) نامساوی زیر برقرار است :

$$x-\frac{x^3}{4}<\sin x \qquad (4)$$

اثبات . داریم :

$$\sin x=2\,tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\,tg\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$



ش ۱۹۵

با توجه به نامساویهای (۱) و(۲) داریم :

$$tg\frac{x}{2}>\frac{x}{2} \text{ و } \sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{4}$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$\sin x>x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

تعبیر هندسی . از نامساویهای $x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x$ نتیجه میشود که درحوالی نقطهٔ O ، منحنی سینوسی بین خط $y=x$ و منحنی درجه سوم $y=x-\frac{x^3}{4}$ واقع است (شکل ۱۹۵) .

۵ . نامساوی زیر در فاصلهٔ (π و ۰) برقرار است :

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16} \qquad (5)$$

اثبات . داریم :

$$\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}-(1-\cos x)=\frac{x^2}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=$$

$$=2\left(\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

که با توجه به نامساویهای (۴) و (۱)، نامساوی زیر را که هم ارز (۵)است بدست می‌آوریم :

$$\cos x-1+\frac{x^2}{2}<2\times\frac{x^3}{32}\times\frac{2x}{2}=\frac{x^4}{16}$$

نامساویهائی راکه در بالا ثابت کردیم :

$$x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x \quad ; \quad 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}$$

حدود توابع مثلثاتی را درحوالی راست نقطهٔ O ، بصورت کثیرالجمله‌هائی ، بدست می‌دهد . نامساویهائی دقیق‌تر از (۱) و (۵) (یعنی نامساویهائی که اختلاف سمت‌راست وسمت‌چپ آنها کمتر باشد)راهم میتوان باروشهای مقدماتی بدست آورد و در اینجا چند نمونه از آنها ذکر می‌شود :

۶. ثابت کنید که در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ نامساوی زیر برقرار است :

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \qquad (6)$$

اثبات : ۱° . از اتحاد زیر استفاده می کنیم :

$$3^n\sin\frac{x}{3^n}-4\left(\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right)=\sin x$$

(به بند ۲۸ تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۱۱ مراجعه کنید) .

با توجه به نامساوی (۴) داریم :

$$3^n\sin\frac{x}{3^n}>3^n\left(\frac{x}{3^n}-\frac{x^3}{4\times 3^{3n}}\right)=x-\frac{x^3}{4\times 3^{2n}}$$

و با توجه به نامساوی (۱) داریم :

$$\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+\dots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\leqslant$$

$$\leqslant x^3\left(\frac{1}{3^3}+\frac{3}{3^6}+\dots+\frac{3^{n-1}}{3^{3n}}\right)=\frac{x^3}{27}\left(1+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{2n-2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x^3}{27}\left(1+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{2n-2}}+\dots\right)=\frac{x^3}{27}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)=\frac{x^3}{24}$$

که اگر در اتحاد قرار دهیم ، نامساوی زیر بدست می‌آید :

$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{4\times 3^{2n}}\leqslant \sin x$$

وچون n عدد طبیعی دلخواهی است ، در حدخواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{4\times 3^{2n}}\right)=x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x$$

۲°. طبق آنچه ثابت کردیم در فاصله $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم :

$$0<x-\frac{x^3}{6}<\sin x\ ^{*}$$

همچنین :

$$0<\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\times 6}\leqslant \sin\frac{x}{2}\qquad (a)$$

$$0<\frac{x}{4}-\frac{x^3}{2^6\times 6}\leqslant \sin\frac{x}{4}$$

با مجذور کردن طرفین نامساوی اخیر خواهیم داشت :

$$\frac{x^2}{2^4}-\frac{x^4}{3\times 2^8}+\frac{x^6}{2^{14}\times 3^2}\leqslant \sin^2\frac{x}{4}$$

---

*) نامساوی $0<x\left(1-\frac{x^2}{6}\right)=x-\frac{x^3}{6}$ در فاصلهٔ $0<x<\sqrt{6}$ صادق است و بنا بر این در حالت خاص $0<x<\frac{\pi}{2}$ هم صادق خواهد بود .

و بنابراین روشن است که :

$$0 \le \frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3\times 2^8} \le \sin^2\frac{x}{4} \qquad (b)$$

از ضرب نامساویهای (a) و (b) خواهیم داشت :

$$\frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} < \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3\times 6}\right)\left(\frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3\times 2^8}\right) < \sin\frac{x}{2}\,\sin^2\frac{x}{4} \qquad (c)$$

اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sin\frac{x}{2}\,\sin^2\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin x$$

در نتیجه با توجه به نامساوی (c) بدست می‌آید :

$$1 \qquad \sin x \le 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}\ ; \qquad (6_1)$$

$$2 \qquad \sin\frac{x}{2} \le 2\sin\frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^3\times 8} + \frac{x^5}{2^7\times 2^5}\ ; \qquad (6_2)$$

$$2^2 \qquad \sin\frac{x}{4} \le 2\sin\frac{x}{8} - \frac{x^3}{2^6\times 8} + \frac{x^5}{2^7\times 4^5}\ ; \qquad (6_3)$$

. . . .

$$2^{n-1} \qquad \sin\frac{x}{2^{n-1}} \le 2\sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3(n-1)}\times 8} + \frac{x^5}{2^{5(n-1)}\times 2^7} \qquad (6_n)$$

نامساویهای (6_1) تا (6_n) را بترتیب در ۱ و ۲ و ۴ و ... و 2^{n-1} ضرب و سپس باهم جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$\sin x \le 2^n \sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) +$$

$$+ \frac{x^5}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{4n-4}}\right)$$

که پس از جمع جملات تصاعدها داریم :

$$\sin x \le 2^n \sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6\times 4^n} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{120\times 2^{4n}}$$

که با توجه به‌نا مساوی $2^n \sin\frac{x}{2^n} < x$ و وجود حد آن (بازاء $n \to +\infty$)

نامساوی زیر بدست می‌آید :

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

۷. بازاء $0 < x < \frac{\pi}{2}$ نامساوی زیر برقرار است :

$$x + \frac{x^3}{3} < tg\, x$$

اثبات . با توجه به نامساویهای (۵) و (۶) داریم :

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} > \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}}$$

و چون بازاء $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم :

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{48}(5 - x^2) < x - \frac{x^3}{6};$$

در اینصورت :

$$\frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}} > x + \frac{x^3}{3}$$

از آنجا بسادگی نامساوی (۷) بدست می‌آید .

۸. ثابت کنید بازاء $|x| < \sqrt{2m}$ نامساوی زیر برقرار است :

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m - x^2}$$

که در آن m عدد صحیح و مثبت دلخواهی است .

اثبات . با توجه به نامساوی (۱) داریم : $\sin^2 \frac{x}{2m} < \frac{x^2}{4m^2}$

بترتیب خواهیم داشت :

$$\cos^m \frac{x}{m} = \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2m}\right)^m > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m =$$

$$=1-m\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)+\frac{m(m-1)}{1\times 2}\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2-\dots+$$

$$+(-1)^k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k+\dots+$$

$$+(-1)^m\frac{m(m-1)\dots(m-m+1)}{m!}\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^m>$$

$$>1-\frac{m}{1}\cdot\frac{x^2}{2m^2}-m^2\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2-\dots-m^k\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k-m^m\times$$

$$\times\left(\frac{x}{2m^2}\right)^m>1-\frac{x^2}{2m}\left[1+\frac{x^2}{2m}+\dots+\left(\frac{x^2}{2m}\right)^k+\dots\right]$$

با جمع جملات تصاعد هندسی (که بازاء $|x|>\sqrt{2m}$ نزولی و متقارب است)، بدست می‌آید:

$$\cos^m\frac{x}{m}>1-\frac{x^2}{2m\left(1-\frac{x^2}{2m}\right)}=1-\frac{x^2}{2m-x^2}$$

در دو مثال زیر مورد استعمال نامساویهای اثبات شده در بحث توابع آمده است.

۹. ثابت کنید، تابع: $f(x)=x-\sin x$

در فاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ صعودی است.

اثبات. باید ثابت کنیم که تفاضل:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-\sin x_2)-(x_1-\sin x_1)$$

بازاء هر مقدار دلخواه x_1 و x_2 مثبت است. $x_1<x_2$ فرض می کنیم، داریم:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)-(\sin x_2-\sin x_1)=$$

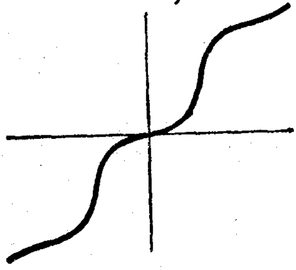
$$=(x_2-x_1)-2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}$$

با شرط $x_2-x_1>0$ خواهیم داشت:

$$\left|2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|<|x_2-x_1|=x_2-x_1$$

بنابراین علامت تفاضل $f(x_۲)-f(x_۱)$ همان علامت $x_۲-x_۱$ است، یعنی $f(x_۲)-f(x_۱)>۰$ و تابع $f(x)$ صعودی است .

$f(x)$ تابعی است فرد و منحنی نمایش آن درشکل ۱۹۶ داده شده است . باید توجه داشت که، باستناد نامساوی(۴) ، درحوالی مبداء مختصات ، منحنی این تابع بین منحنی درجه سوم $y=\frac{x^۳}{۴}$ و محور طول قرار دارد، و تفاضل بین نیمساز محورهای مختصات $Y=x$ و منحنی $y=f(x)$ عبارتست ازتابع متناوب $Y-y=\sin x$.



ش ۱۹۶

۱۰ . ثابت کنید که تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ در فاصلهٔ (۰ و π) نزولی است .

اثبات . ابتدا ثابت می‌کنیم که این تابع در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{۲}$ و ۰) نزولی است . فرض می‌کنیم $۰<x_۱<x_۲<\frac{\pi}{۲}$ باشد ، ثابت می‌کنیم :

$$\frac{\sin x_۱}{x_۱}>\frac{\sin x_۲}{x_۲} \qquad (۱۰)$$

فرض می‌کنیم $x_۲-x_۱=h>۰$ باشد ، تفاضل زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{\sin x_۱}{x_۱}-\frac{\sin x_۲}{x_۲}=\frac{(x_۱+h)\sin x_۱-x_۱\sin(x_۱+h)}{x_۱x_۲}=$$

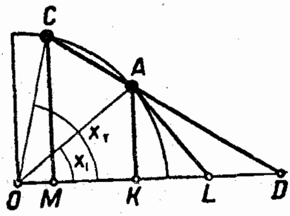
$$=\frac{۱}{x_۱x_۲}\left[x_۱\sin x_۱(۱-\cos h)+h\cos x_۱\left(tg x_۱-x_۱\frac{\sin h}{h}\right)\right]. \quad (*)$$

وچون داریم : $۰<h<\frac{\pi}{۲}$ و $۰<x_۱<\frac{\pi}{۲}$ ، خواهیم داشت :

$$۱-\cos h>۰\ ;\ ۰<\frac{\sin h}{h}<۱\ ;\ tg x_۱-x_۱>۰$$

بنابراین مقدار داخل کروشه مثبت میشود و داریم :

$$\frac{\sin x_1}{x_1}-\frac{\sin x_2}{x_2}>0$$



ش ۱۹۷

اثبات هندسی . در شکل ۱۹۷ زوایای x_1 و x_2 مشخص شده است و AL مماس بر دایرهٔ واحد است ، داریم :

$$\frac{\sin x_2}{\sin x_1}=\frac{CM}{AK}=\frac{CD}{AD}=1+\frac{AC}{AD}$$

وچون داریم : $AC<x_2-x_1$ و $AD>AL=tg\,x_1>x_1$

خواهیم داشت : $\frac{\sin x_2}{\sin x_1}<1+\frac{x_2-x_1}{x_1}=\frac{x_2}{x_1}$

ازآنجا نامساوی (۱۰) نتیجه میشود .

نزولی بودن تابع در فاصلهٔ $(\pi$ و $\frac{\pi}{2}]$ واضح است . زیرا در این‌فاصله $\sin x$ نزولی است . وقتی‌که تابع در فواصل $[\frac{\pi}{2}$ و $0)$ و $(\pi$ و $\frac{\pi}{2}]$ نزولی باشد، در فاصلهٔ $(\pi$ و $0)$ نزولی خواهد بود .

۵۲ . بعضی حدود مهم

باکمك نامساویهائی‌که در بند ۵۱ ثابت‌کردیم ، میتوان بعضی حدود را بدست آوردکه دررشته‌های‌مختلف ریاضی‌موارد استعمال فراوان دارند .

۱ . ثابت‌کنید: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

اثبات . بازاء $|x|<\frac{\pi}{2}$ و $x\neq 0$ داریم :

$$|\sin x|<|x|<|tg\, x|$$

از آنجا : $$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|} \qquad (۱)$$

وچون در فواصل $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ و $(0, \frac{\pi}{2})$ توابع $\frac{x}{\sin x}$ و $\cos x$ مثبت‌هستند میتوان علامتهای قدر مطلق را برداشت . از نامساوی (۱) بدست می‌آید :

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

و : $$0<\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{|x|^2}{2};$$

باین ترتیب : $$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{|x|^2}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تبصره. برای اثبات از نامساویهای زیر هم میتوانستیم استفاده کنیم :

$$x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x \Longrightarrow 1-\frac{x^2}{4}<\frac{\sin x}{x}<1$$

نتیجه : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$$

درحقیقت اگر فرض کنیم $y=ax$ ، بازاء $a\neq 0$ داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{y\to 0} a\frac{\sin y}{y}=a$$

بازاء $a=0$ حکم واضح است .

۲ . $$\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}=1$$

زیرا داریم : $$\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}=\lim\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1$$

۳. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

زیرا اگر فرض کنیم $y=\arcsin x$ ، بدست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

۴. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

درحقیقت داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\times\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$$

۵. $$\lim_{x\to}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

اثبات . با استفاده از نامساوی (۶) بند قبل ، بازاء $0<x<\frac{\pi}{2}$

داریم :

$$\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}<x-\sin x<\frac{x^3}{6}\Rightarrow\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}<\frac{x-\sin x}{x^3}<\frac{1}{6}$$

دستگاه نامساویهای اخیر ، با توجه به زوج بودن جملات آن ، در فاصلهٔ ($\frac{\pi}{2}$ و ۰) وهم در فاصلهٔ (۰ و $-\frac{\pi}{2}$) برقرار است و باکمك آن بسادگی حکم مورد نظر ثابت می‌شود .

۵۳ . مسائلی دربارهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم

مسائل مربوط به جستجوی مقادیر ماکزیمم ومی‌نیمم مستقیماً به‌اثبات نامساویها بستگی‌دارند. اگر y_{Min} ، مقدار می‌نیمم تابع $f(x)$ در فاصله ای

باشد ، در این فاصله نامساوی زیر برقرار خواهد بود :

$$y_{Min} \leqslant f(x)$$

بهمین ترتیب اگر y_{Max} .مقدارماکزیمم تابع‌درفاصلهٔ مفروضی‌باشد ،

در این فاصله داریم : $f(x) \leqslant y_{Max}$

و اگر در این‌فاصله هم ماکزیمم و هم‌می‌نیمم وجود داشته باشد، دراینصورت:

$$y_{Min} \leqslant f(x) \leqslant y_{Max}^{*}$$

در اینجا مسائلی از ماکزیمم و می‌نیمم و در نتیجه مسائل مربوط به نامساویهای‌متناظر آنها را می‌آوریم :

I . تابع : $y = a\sin x + b \quad (\text{یا } y = a\cos x + b)$

که نسبت به سینوس (یا کسینوس)خطی است . ماکزیمم ومی‌نیممی باین‌صورت

دارد : $y_{Min} = b - |a \quad ; \quad y_{Max} = b + a|$

درحقیقت $|\sin x| \leqslant 1$ است ، بنابراین حد اکثر وحد اقل‌مقدارسینوس (یاکسینوس) مساوی ۱ و ۱ — است و نامساویهای زیرراخواهیم داشت :

$$b - |a| \leqslant a\sin x + b \leqslant b + |a|$$

II . ماکزیمم و می‌نیمم تابع :

$$y = a\sin x + b\cos x$$

که نسبت به سینوس وکسینوس خطی است ، برابر است با :

$$y_{Min} = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad y_{Max} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

در حقیقت با استفاده از زاویهٔ کمکی $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ بدست می‌آید (صفحهٔ ۲۲۷ را به بینید) :

$$y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$$

---

*) در آنالیز ثابت می‌کنندکه اگر تابع متصل باشد ، در هر فاصلهٔ بسته همبسته y_{Min} و y_{Max} وجود دارد .

و ازآنجا صحت حکم بسادگی تایید می‌شود . یعنی داریم :

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a\sin x + b\cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

III . ماکزیمم ومی‌نیمم سه جمله‌ای همگن مثلثاتی درجه دوم زیررا پیدا کنید :

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$$

سه جمله‌ای را برحسب توابع مثلثاتی آوند دو برابر می‌نویسیم :

$$y = \frac{a}{2}(1-\cos 2x) + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{2}(1+\cos 2x) =$$

$$= \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\left[(c-a)\cos 2x + b\sin 2x\right]$$

عبارت مفروض همزمان با مقدار داخل کروشه ماکزیمم یامی‌نیمم‌است.

ماکزیمم ومی‌نیمم‌داخل کروشه هم(مسئلهٔ قبل) : $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}$ و $-\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}$ است . باین ترتیب :

$$y_{Max} = \frac{a+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2}$$

$$y_{Min} = \frac{a+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2}$$

IV . ماکزیمم و می‌نیمم حاصلضرب زیر را درفاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ بدست آورید :

$$y = \cos^p x \sin^q x$$

که در آن p و q اعدادی‌مثبت وگویا هستند .

حل . اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad (1)$$

و فرض می‌کنیم $\cos^{۲}x = u$ و $\sin^{۲}x = v$ ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$y = u^{\frac{p}{۲}} \cdot v^{\frac{q}{۲}} \quad ; \quad u + v = ۱$$

ولی میدانیم که اگر مجموع دو متغیر مثبت u و v مقدار ثابتی باشد ،

حاصلضرب y وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{۲u}{p} = \frac{۲v}{q} \Longrightarrow u = \lambda\frac{p}{۲} \; ; \; v = \lambda\frac{q}{۲}$$

که λ را میتوان از شرط زیر بدست آورد :

$$\lambda\frac{p}{۲} + \lambda\frac{q}{۲} = ۱ \Longrightarrow \lambda = \frac{۲}{p+q}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$u = \frac{p}{p+q} \; ; \; v = \frac{q}{p+q} ;$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{p}{p+q}} \; ; \; \sin x = \sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

$$x = \arccos\sqrt{\frac{p}{p+q}} ; \; y_{Max} = \sqrt{\frac{p^{p} \cdot q^{q}}{(p+q)^{p+q}}}$$

و برای می‌نیمم داریم : $y_{Min} = ۰$. بنابراین در فاصلهٔ بستهٔ

$۰ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}$ داریم :

$$۰ \leqslant \cos^{p}x \sin^{q}x \leqslant \sqrt{\frac{p^{p} \cdot q^{q}}{(p+q)^{p+q}}}$$

۷ . اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ و p و q اعدادی گویا و مثبت باشند، می‌نیمم

عبارت زیر را پیدا کنید :

$$y = tg^{p}x + cotg^{q}x$$

حل : شبیه تمرین قبل حل می کنیم .

فرض می کنیم $u = tg^p x$ و $v = cotg^q x$ ، مجموع $y = u + v$ ،

وقتی که حاصلضرب $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} = ۱$ است، می‌نیمم است بشرطی که داشته باشیم:

$pu = qv = \lambda$ ، از آنجا :

$$u = \frac{\lambda}{p} \text{ و } v = \frac{\lambda}{q} \text{ و } \lambda = (p^p \cdot q^q)^{\frac{1}{p+q}}$$

و بنابراین :

$$y_{Min} = \lambda\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{p+q}{p \cdot q}(p^p \cdot q^q)^{\frac{1}{p+q}}$$

و بسادگی روشن می‌شود که بازاء هرمقدار دلخواه ومفروض x نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{p+q}{p \cdot q}(p^p \cdot q^q)^{\frac{1}{p+q}} \leq \left| tg^p x + cotg^q x \right|$$

VI . ماکزیمم ومی‌نیمم تابع زیر را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ پیدا کنید:

$$f(x) = sin^2 x + p \sin x + q$$

حل . $t = \sin x$ فرض کنید ، در اینصورت مسئله منجر به جستجوی ماکزیمم و می‌نیمم تابع درجه‌دوم زیر میشود :

$$y = t^2 + pt + q \qquad (\text{در فاصلهٔ بستهٔ } -1 \leq t \leq 1)$$

این سه جمله‌ای در فاصلهٔ $-\infty < t < +\infty$ دارای می‌نیممی است :

$$y_{Min} = -\frac{p^2 - 4q}{4} \qquad (\text{بازاء } t = -\frac{p}{2})$$

سه‌جمله‌ای درفاصلهٔ ($-\frac{p}{2}$ و $-\infty$) نزولی و در فاصلهٔ ($+\infty$ و $-\frac{p}{2}$) صعودی است. سه‌حالت زیر را خواهیم‌داشت :

حالت اول) $-\frac{p}{2} \leq -1$ یعنی $p \geq 2$. در این‌حالت سه‌جمله‌ای مفروض

در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant t \leqslant 1$ صعودی است ، بنابراین می‌نیمم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -\frac{\pi}{2}$ و ماکزیمم آن در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود (بازاء $t = \pm 1$)

$$f_{Min} = 1 - p + q \;;\; f_{Max} = 1 + p + q$$

حالت دوم) $-\frac{p}{2} \geqslant 1$ یعنی $p \leqslant -2$. در این‌حالت سه جمله‌ای در فاصلهٔ بستهٔ $-1 \leqslant t \leqslant 1$ نزولی است، بنابراین می‌نیمم $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ و ماکزیمم آن در نقطهٔ $x = -\frac{\pi}{2}$ خواهد بود :

$$f_{Min} = 1 + p + q \;;\; f_{Max} = 1 - p + q$$

حالت سوم) $-2 < p < 2$. در این حالت می‌نیمم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -\arcsin\frac{p}{2}$ است :

$$f_{Min} = f(-\arcsin\frac{p}{2}) = -\frac{p^2 - 4q}{4}$$

و ماکزیمم آن ، بزرگترین مقدار از دومقدار حدی $f(-\frac{\pi}{2})$ و $f(\frac{\pi}{2})$ است

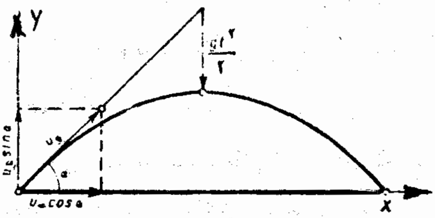
یعنی :
$$f_{Max} = 1 + |p| + q$$

چند مثال

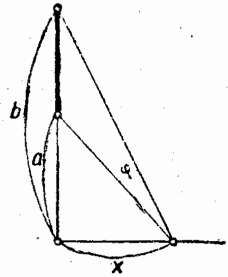
۱ . گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 از دهانهٔ توپ خارج شده است، بنحوی که با افق زاویهٔ α می‌سازد . زاویهٔ α را چنان پیدا کنید که برد گلوله حداکثر باشد (از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود) .

حل . معادلهٔ پارامتری مسیر گلوله را در نظر می گیریم (شکل ۱۹۸):

$$x = tv_0 \cos\alpha \;;\; y = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$



ش ۱۹۸



ش ۱۹۹

(که در آن t پارامتر است) . زمان پرواز گلوله عبارتست از ریشهٔ مثبت

$y=0$ ، یعنی $t=\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. و برد گلوله برابر است با : $x=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

از صورت مسئله روشن است که کافی است α را زاویه ای حاده در نظر

بگیریم : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، برد حد اکثر وقتی است که $x=\frac{\pi}{4}$ باشد و داریم:

$$x_{Max}=\frac{v_0^2}{g}$$

۲ . قاب عکسی را روی دیوار چنان آویزان کرده ایم که کنار پائین آن a متر و کنار بالای آن b متر از چشم تماشاچی فاصله دارد . تماشاچی در چه فاصلهٔ x از دیوار قرار بگیرد تا قاب عکس را با حد اکثر زاویه به‌بیند.

حل . با توجه به شکل ۱۹۹ ، زاویهٔ φ را محاسبه می کنیم :

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{x}-\operatorname{arctg}\frac{a}{x}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\operatorname{arctg}\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

با توجه به یکنوائی تانژانت ، ماکزیمم φ بازاء مقادیر $x>0$ وقتی است که مخرج کسری که جلو آرك تانژانت (در آخرین عبارت) قرار دارد می‌نیمم باشد و چون داریم $x\times\frac{ab}{x}=ab$ ، مجموع $x+\frac{ab}{x}$ وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم :

$$x=\frac{ab}{x} \Longrightarrow x=\sqrt{ab}$$

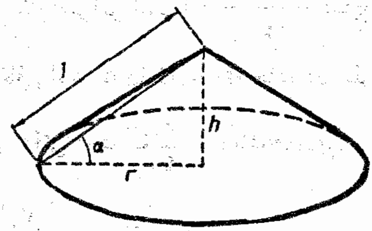
۳. مطلوبست ماکزیمم محیط مثلث قائم‌الزاویه ای که وتر آن مفروض باشد.

حل. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن‌مساوی c ویکی از زوایای حاده‌اش α باشد بارابطهٔ زیر معین می‌شود:

$$2p=c+c\cos\alpha+c\sin\alpha=c[1+\sqrt{2}\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})]$$

ماکزیمم‌محیط عبارتست از: $2p=c(1+\sqrt{2})$، یعنی وقتی که مثلث متساوی الساقین باشد:

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$



ش ۲۰۰

۴. بازاء چه مقدار پارامتر m، معادلهٔ زیر دارای جوابست:

$$\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=m$$

حل. ماکزیمم ومی‌نیمم‌مقدار سه‌جمله‌ای‌همگن‌درجه‌دوم سمت‌چپ‌تساوی چنین‌است (مسئلهٔ (III) را به‌بینید):

$$\frac{-1-\sqrt{10}}{2} \text{ و } \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$$

بنابراین شرط لازم وکافی برای اینکه معادلهٔ مفروض جواب داشته باشد، اینست که مقدار m محدود باین دومقدار باشد:

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2}<m<\frac{\sqrt{10}-1}{2}$$

۵. مخروط دواری با حجم ماکزیمم پیدا کنید که مولد آن مساوی l باشد (شکل ۲۰۰).

حل . α را زاویهٔ مخروط باصفحهٔ قاعدهٔ آن فرض می کنیم ، داریم :

$$V=\frac{\pi r^{۲}h}{۳}=\frac{\pi l^{۳}}{۳}\cos^{۲}\alpha \sin\alpha$$

ماکزیمم V وقتی است که داشته باشیم (درمسئلهٔ IV، $p=۲$ و $q=۱$ فرض کنید):

$$V_{xaM}=\frac{\pi l^{۳}}{۳}\sqrt{\frac{۲^{۲}\times ۱}{۳^{۳}}}=\frac{۲\pi l^{۳}}{۹\sqrt{۳}}$$

که دراینصورت داریم :

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\,;\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\ ;\ r=l\sqrt{\frac{۲}{۳}}\ ;\ h=\frac{l}{\sqrt{۳}}$$

۵۴ . دربارهٔ جوابهای تقریبی معادلات غیرجبری

مسئلهٔ مربوط به حل عددی وترسیمی معادلات، مربوط به دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی است . بخاطر می‌آوریم که روش ترسیمی معمولا تقریب اولیه حدود جوابهای معادله را بدست می‌دهد و سپس با روش تقسیم فاصله میتوان مقدار عددی ریشه‌ها را باهر تقریب دلخواه بدست آورد .

فرض کنیم $f(a)$ و $f(b)$ $(a<b)$ ، اعداد مختلف‌العلامه‌ای باشندودر فاصلهٔ (a و b) تنها یك ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ قرارگرفته باشد . بامحاسبهٔ مقدار تابع $f(x)$ در نقاط واقع در فاصلهٔ (a و b) میتوان ریشهٔ موردنظر را با هر تقریب دلخواه پیدا کرد .

ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $f(x)=۰$ عبارتست از طول نقطهٔ تلاقی محور طول با وتری که دو نقطهٔ (a و $f(a)$) و (b و $f(b)$) از منحنی $y=f(x)$ را بهم وصل می کند . این‌مقدار تقریبی از رابطه زیر معین می‌شود :

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

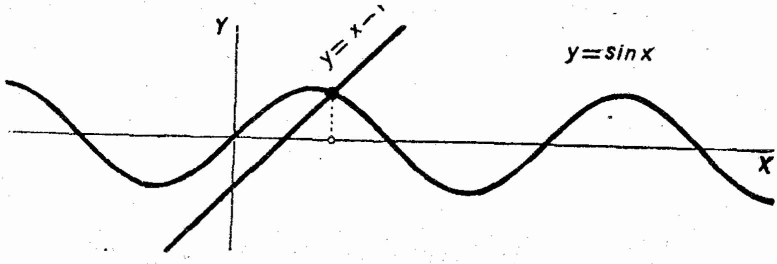
جملهٔ :
$$\Delta x = x_1 - a = -\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

را خطا گویند که باید آنرا به مقدار اولیهٔ $x=a$ اضافه کرد .

چند مثال

۱ . معادلهٔ زیر را درنظر می گیریم :

$$\sin x - x + 1 = 0$$



ش ۲۰۱

با توجه به‌شکل ۲۰۱ (که در آنجا منحنی تابع $y=\sin x$ و خط $y=x-1$ رسم شده است) روشن می‌شود که ریشهٔ معادله درفاصلهٔ (π و $\frac{\pi}{2}$) واقع است . اگر مقدار تابع متصل $f(x)=\sin x - x + 1$ را در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و π محاسبه‌کنیم ، مقادیر مختلف‌العلامه‌ای بدست می‌آید :

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \ ; \ f(\pi) = -\pi + 1 < 0$$

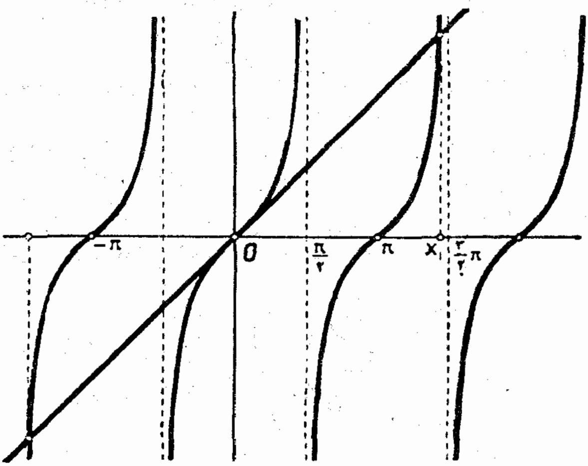
مقدار تابع $f(x)$ را در وسط فاصلهٔ (π و $\frac{\pi}{2}$) حساب می کنیم ، نتیجه منفی حاصل می‌شود :

$$f(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4} + 1 \# -0/64 < 0$$

بنابراین ریشهٔ مورد نظر در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴})$ قرار دارد .

اگر محاسبهٔ مقدار تابع را در نقاط واقع در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{٤})$ ادامه دهیم ، میتوانیم مقدار ریشه را با هر تقریب دلخواه محاسبه کنیم .

۲ . معادلهٔ $tg\,x = x$ را در نظر می‌گیریم . با توجه به فردبودن تابع مفروض ،کافی است فقط جوابهای مثبت را جستجو کنیم . ازشکل ۲۰۲ دیده می‌شودکه معادله بی‌نهایت جواب مثبت دارد ؛ در فاصلهٔ $(۰$ و $\frac{\pi}{۲})$ ریشه‌ای



ش ۲۰۲

وجود ندارد، زیرا $x < tg\,x$ است اولین‌ریشهٔ مثبت در فاصلهٔ $(\pi$ و $\frac{۳\pi}{۲})$ قرار دارد، ریشهٔ دوم در فاصلهٔ $(۲\pi$ و $\frac{۵\pi}{۲})$ ، سومی در فاصلهٔ $(۳\pi$ و $\frac{۷\pi}{۲})$ وغیره.

kامین ریشه در فاصلهٔ $(k\pi$ و $\frac{۲k+۱}{۲}\pi)$ قرار دارد وضمناً با بزرگ‌شدن k ریشه به $\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ نزدیك می‌شود .

کوچکترین ریشهٔ مثبت را تا ۰/۱ تقریب محاسبه می‌کنیم . معادلهٔ مفروض را به معادلهٔ زیر که هم‌ارز آنست، تبدیل می‌کنیم :

$$\sin x - x\cos x = ۰$$

که سمت چپ آن در فاصلهٔ بستهٔ $[\frac{۳\pi}{۲}$ و $\pi]$ متصل است . فرض می‌کنیم :

$f(x) = \sin x - x\cos x$. در نقطهٔ $۳/۹۲۵۰ \# \frac{۵\pi}{٤}$ (= ۲۲۵ درجه) ٭

(یعنی در وسط فاصلهٔ بستهٔ مفروض) داریم :

$$f(\frac{۵\pi}{٤}) = \sin ۲۲۵^\circ(۱ - ۳/۹۲۵۰) = ۲/۰۶۸ > ۰$$

و چون $f(\frac{۳\pi}{۲}) = -۱ < ۰$ است ، ریشهٔ مورد نظر در فاصلهٔ $(\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۵\pi}{٤})$ واقع است .

مقدار خطارا محاسبه می‌کنیم ($b = \frac{۳\pi}{۲}$ و $a = \frac{۵\pi}{٤}$) :

$$\Delta x = -\frac{(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{۵\pi}{٤})f(\frac{۵\pi}{٤})}{f(\frac{۳\pi}{۲}) - f(\frac{۵\pi}{٤})} = \frac{\frac{\pi}{٤} \times ۲/۰۶۸}{۱ + ۲/۰۶۸} =$$

$$= ۰/۵۲۹۲ (= ۳۰^\circ \text{ و } ۱۹')$$

بنابراین : $x_۱ = \frac{۵\pi}{٤} + \Delta x = ۴/۴۵۴۲ (= ۲۵۵^\circ \text{ و } ۱۹')$

$f(x_۱)$ را محاسبه می‌کنیم ، داریم :

$$f(x_۱) = \sin ۲۵۵^\circ \text{ و } ۱۹' - ۴/۴۵۴۲\cos(۲۵۵^\circ \text{ و } ۱۹') =$$

$$= -\cos ۱۴^\circ \text{ و } ۴۱' + ۴/۴۵۴۲\sin ۱۴^\circ \text{ و } ۴۱' = ۰/۱۶۱ > ۰$$

٭) مقدار آوند را در داخل پرانتز به آن جهت برحسب درجه داده‌ایم که معمولا جداول مثلثاتی برحسب درجه تنظیم شده‌اند .

چون $f(\frac{3\pi}{2})=-1$ و $f(4/4542)=0/161$، بنابراین ریشهٔ موردنظر در فاصلهٔ $(\frac{3\pi}{2}$ و $4/45)$ واقع است . مقدار $f(4/4542)$ به صفر نزدیکتر است ، بنابراین طبیعی است که ریشه به ۴/۴۵ نزدیکتر باشد تا به $\frac{3\pi}{2}=4/71$. با آزمایش روشن میشود که $f(4/5)<0$ است . ریشهٔ مورد‌نظر ξ بین ۴/۴۵ و ۴/۵۰ قراردارد ومحاسبهٔ دقیق‌ترمقدار زیررا بما می‌دهد:

$$\xi=4/4934\ldots$$

۵

محاسبهٔ اجزاء اشکال هندسی

موارد استعمال مثلثات

۵۵ • مفاهیم کلی

در هندسه از اجزاء مختلف اشکال هندسی بحث می‌شود ، مثلا :

در هندسهٔ مسطحه : اضلاع ، زوایا (داخلی و خارجی) ، مساحت و محیط چند ضلعی مفروض ، ارتفاع ، میانه ، نیمساز ، شعاع دایرهٔ محیطی و غیره .

و در هندسهٔ فضائی : یال، وجه ، فرجه ، زاویهٔ مسطحه یك‌چندوجهی و غیره .

در مثلثات مسائل متنوعی دربارهٔ‌محاسبهٔ اجزاء مجهول یك‌شکل‌هندسی بامفروض بودن اجزاء مشخصی از آن ، مورد مطالعه قرار می گیرد .

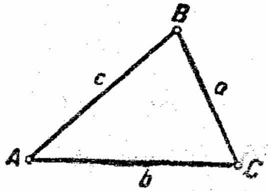
برای سهولت بیان ، در مثلثات خود جزء شکل و اندازهٔ عددی آنرا با یك بیان ذکر می کنند ، مثلاکلمهٔ «ضلع» میتوانند بمعنای عنصر هندسی (یعنی پاره خط) ویا طول آن باشد، یا جملهٔ «سطح جانبی» ممکن است‌خودسطح‌را بیان کند و یامساحت آنرا و غیره .

اکثر در مثلثات صحبت از «**حل‌مثلث**» می‌شود که منظور **محاسبهٔ اجزاء مختلف مثلث برحسب اجزاء معلوم** آنست . این مطلب را هم متذکر شویم که معمولامحاسبهٔ اجزاء اشکال بغرنجتر هندسی (مسطحه یافضائی) به‌محاسبهٔ اجزاء یك رشته مثلث منجر میشود که امکان می‌دهد ، اجزاء مجهول را با کمك اجزاء معلوم بدست آورد .

تعریف : **اضلاع و زوایای مثلث اجزاء اصلی و بقیهٔ اجزاء مثلث ،**

اجزاء فرعی آن نامیده می‌شوند .

اگر رئوس مثلث مفروضی را با A ، B و C نشان داده باشیم ، همین حروف A و B و C را برای بیان زوایای مثلث (وهمچنین اندازهٔ این‌زوایا) بکار می‌بریم و ازحروف a و b و c هم برای اضلاع (وهمچنین اندازهٔاضلاع) استفاده‌می کنیم، بنحوی که هر زاویه باضلع روبرویش همنام‌باشد(شکل۲۰۳).



ش ۲۰۳

اجزاء اصلی یك مثلث دارای شرایط زیر هستند :

۱°. هرسه‌زاویه A و B و C مثبت‌هستند و (درهندسهٔ اقلیدسی) مجموع آنها برابر است با π :

$$A<0 \;;\; B<0 \;;\; C<0 \quad A+B+C=\pi$$

۲°. هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر آن کوچکتر است .

۵٦ . روابط بین اجزاء اصلی مثلث

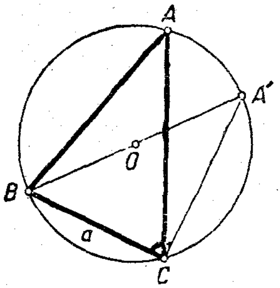
I . **قضیهٔ سینوسها .** درهر مثلث ، اضلاع متناسبند باسینوس زوایای روبرو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

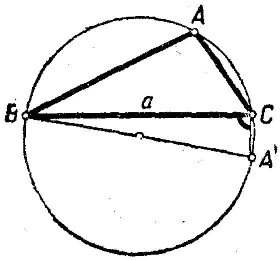
(R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض است) .

اثبات . A را یکی از زوایای مثلث فرض می کنیم ، برای اثبات‌قضیه کافی است صحت تساوی زیر را ثابت‌کنیم :

$$a=2R\sin A \qquad (1)$$



ش ۲۰۴



ش ۲۰۵

حالت اول) A زاویه‌ای حاده است (شکل ۲۰۴) . قطری از دایرهٔ محیطی مثلث راکه از رأسی غیر از A ، ومثلا B ، می‌گذرد (قطر BA) رسم می‌کنیم . زاویهٔ A' از مثلث $A'BC$ برابر است با زاویهٔ A ، زیرا هر دو محاطی و روبـروی به قوس BC هستند . از مثلث قـائم‌الزاویهٔ $A'BC$ رابطهٔ (۱) بدست می‌آید .

حالت دوم)زاویهٔ A منفرجه است (شکل ۲۰۵).شبیه حالت قبل‌قطری راکه از B می‌گذرد رسم می‌کنیم . در این‌حالت زاویهٔ A' روبروی به‌قوس BAC که‌با قوس‌روبروی به زاویهٔ A مجموعاً مساوی ۲π می‌شود. بنا براین $A' = \pi - A$. از مثلث $A'BC$ بدست می‌آید :

$$a = ۲R \sin A' = ۲R \sin A$$

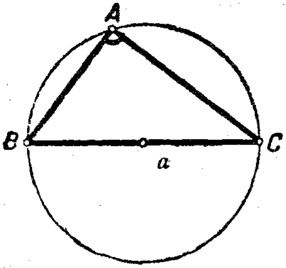
حالت سوم) زاویهٔ A قائمه است (شکل ۲۰۶) . از مثلث ABC مستقیماً بدست می‌آید :

$$a = ۲R = ۲R \sin \frac{\pi}{۲} = ۲R \sin A$$

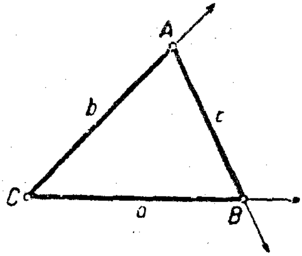
از این به‌بعد ، دستگاه تساویهای :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} & \text{(I)} \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

را **دستگاه اصلی** روابط خواهیم نامید .



ش ۲۰۶



ش ۲۰۷

II . **قضیهٔ تصاویر** در هر مثلث دستگاه روابط زیر برقرار است :

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases} \qquad (II)$$

اثبات . ABC را مثلث مفروض در نظر بگیرید ، تصویر خط شکستهٔ CAB روی CB مساوی CB یعنی a است . باین‌ترتیب (شکل ۲۰۷) :

$$(\text{تصویر } CAB) = (\text{تصویر } CA) + (\text{تصویر } AB) = b\cos C + c\cos B = a$$

بهمین ترتیب دو رابطهٔ دیگر دستگاه (II) هم بدست می‌آید .

III . **قضیهٔ کسینوسها** . درهر مثلث دستگاه روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \\ b^{۲} = c^{۲} + a^{۲} - ۲ca\cos B \\ c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos C \end{cases} \qquad (III)$$

اثبات . در هندسه روابط زیررا داریم (شکل ۲۰۸) :

a) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲b \cdot AD \qquad \left(A < \frac{\pi}{۲}\right)$

b) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + ۲b \cdot AD \qquad \left(A > \frac{\pi}{۲}\right)$

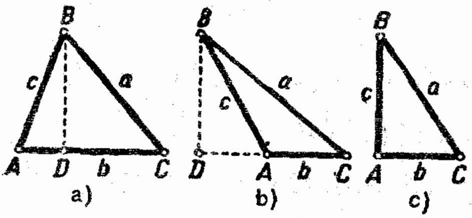
c) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \qquad \left(A = \frac{\pi}{۲}\right)$

با توجه باینکه : (تصویر AB روی AC) $=AD$ و درحالت (b) این تصویر منفی است ، میتوان هرسه رابطه را به صورت رابطهٔ زیر نوشت :

$$a^2=b^2+c^2-2b\times(\text{تصویر } AB \text{ روی } AC)$$

از طرف دیگر داریم : $\quad(\text{تصویر } AB \text{ روی } AC)=c\cos A$

باین ترتیب اولین رابطهٔ تساوی III بدست می‌آید . بهمین ترتیب‌دو رابطه‌دیگر هم ثابت می‌شود .



ش ۲۰۸

قضیه . اگر ۶ عدد a و b و c و A و B و C در شرایط زیر صدق کنند :

$1)\ a>0\ ;\ b>0\ ;\ c>0\ ;$

$$2)\quad 0<A<\pi\ ;\quad 0<B<\pi\ ;\ 0<C<\pi$$

و اگر بین این اعداد یکی از دستگاه روابط (I) ، (II) و (III) برقرار باشد ، دو رابطهٔ دیگر هم برقرار خواهد بود .

توضیح . اگر زوایا برحسب رادیان نباشند ، باید بجای π مقدارش را برحسب واحد زاویه قرار داد ، در حالت خاصی که زوایا بر حسب درجه بیان شده باشند ، نامساویهای (۲) چنین خواهند بود :

$$0^\circ<A<180^\circ\ ;\ 0^\circ<B<180^\circ\ ;\ 0^\circ<C<180^\circ$$

با اثبات این‌قضیه ثابت می‌شود که دستگاههای (I) و (II) و (III)هم‌ارزند و با در دست داشتن یکی ازآنها می‌توان دو دستگاه دیگر را بعنوان‌نتیجه‌ای از دستگاه اول بدست آورد .

اثبات . ۱° . ثابت می‌کنیم که ازدستگاه (I) میتوان دستگاههای(II) و (III) را نتیجه گرفت . در حقیقت :

$$A=\pi-B-C$$

از آنجا :

$$\sin A = \sin B\cos C + \cos B \sin C \qquad (۱)$$

اگر نسبتهای مساوی (I) را برابر $۲R$ فرض کنیم (بدون توجه به مفهوم هندسی آن)، خواهیم داشت :

$$a = ۲R\sin A \;\; ; \;\; b = ۲R\sin B \;\; ; \;\; c = ۲R\sin C$$

با ضرب طرفین رابطهٔ (۱) در $۲R$ اولین رابطهٔ (II) بدست می‌آید و بهمین ترتیب سایر روابط (II) بدست می‌آید.

طرفین رابطهٔ (۱) را مجذور کرد وتبدیلات زیر را انجام‌می‌دهیم :

$$\sin^۲ A = \sin^۲ B\cos^۲ C + \cos^۲ B\sin^۲ C + ۲\sin B\sin C\cos B\cos C =$$
$$= \sin^۲ B(۱ - \sin^۲ C) + (۱ - \sin^۲ B)\sin^۲ C +$$
$$+ ۲\sin B\sin C\cos B\cos C = \sin^۲ B + \sin^۲ C +$$
$$+ ۲\sin B\sin C(\cos B\cos C - \sin B\sin C) =$$
$$= \sin^۲ B + \sin^۲ C + ۲\sin B\sin C\cos(B + C)$$

وبا توجه باینکه $B + C = \pi - A$ است بالاخره بدست‌می‌آید :

$$\sin^۲ A = \sin^۲ B + \sin^۲ C - ۲\sin B\sin C\cos A$$

طرفین این رابطه‌را در $(۲R)^۲$ضرب می‌کنیم ، اولین رابطهٔ دستگاه (III) و بهمین ترتیب سایر روابط این دستگاه بدست می‌آید.

۲°. ثابت‌می‌کنیم‌که از دستگاه (II)، میتوان دستگاههای (I) و(III) را نتیجه‌گرفت . تساویهای (II) را بترتیب در a ، b و $-c$ ضرب وسپس با هم‌جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$a^۲ + b^۲ - c^۲ = (ab\cos C + ac\cos B) + (bc\cos A + ba\cos C) -$$
$$-(ca\cos B + cb\cos A) = ۲ab\cos C$$

و ازآنجا :

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

و شبیه آن سایر روابط (III)هم بدست می‌آید . باین ترتیب دستگاه(III)

نتیجه‌ای از دستگاه (II) است .

c رااز تساویهای (II) حذف‌می‌کنیم : رابطهٔ اول این دستگاه‌رادرa ورابطهٔ دوم‌را در b ضرب و از هم‌کم می‌کنیم ، دراینصورت بدست می‌آید :

$$a^2 - b^2 = c(a\cos B - b\cos A)$$

و بجای c از رابطهٔ سوم قرار می‌دهیم ، میشود :

$$a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$$

ازآنجا : $$a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A \Longrightarrow a\sin B = b\sin A$$

(زیرا a ، b ، A و B مقادیری مثبت هستند) و بنابـراین :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

بهمین ترتیب میتوان ثابت‌کرد :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} ; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

اگر در رابطهٔ اول (II) ، که نسبت به a و b و c خطـی است ، بجای a وb وc اعداد متناسب با آنهاراقرار دهیم، بدست‌می‌آید :

$$\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$$

و ازآنجا : $$\sin A = \sin(B+C)$$

که با توجه‌باینکه $0 < A < \pi$ و $0 < B+C < 2\pi$ است، بدست می‌آید:

a) $A = B+C$ یا $A+B+C = \pi$ یا

و از دو تساوی مشابه آن :

b) $B = C+A$ یا $A+B+C = \pi$ یا

c) $C = A+B$ یا $A+B+C = \pi$ یا

اگر $A = B+C$ باشد ، اولین رابطهٔ (b) نمیتواند وجود داشته بـاشد ، زیرا دراینصورت $C = 0$ می‌شود ، بنابراین همیشه داریم :

$$A+B+C = \pi$$

(هردورابطهٔ (a) می‌توانندبشرط $A=B+C=\frac{\pi}{2}$ وجودداشته‌باشد).

باین ترتیب دستگاه (I) ازتساویهای (II) نتیجه می‌شود.

۳°. ثابت می‌کنیم که‌میتوان‌از دستگاه (III)، دستگاههای (I) و(II) را نتیجه‌گرفت. دوتساوی اول دستگاه (III) را جمع می‌کنیم، پس ازساده کردن، تساوی سوم دستگاه (II) بدست می‌آید.

چون ازدستگاه III، دستگاه (II) رانتیجه‌گرفتیم واز دستگاه (II) دستگاه (I) را، بنابراین دستگاه (I) هم از دستگاه (III) نتیجه می‌شود.

قضیه. اگرشش مقدار a، b، c، A، B و C باشرایط:

$$1)\qquad a>0\ ;\ b>0\ ;\ c>0;$$

$$2)\qquad 0<A<\pi;\ \ 0<B<\pi;\ \ 0<C<\pi.$$

دریکی ازدستگاههای (I)، (II) یا (III) صدق‌کنند ، تنها یك مثلث وجود خواهد داشت‌که aوbوc اضلاع آن و A و B و C زوایای روبرو به‌این اضلاع هستند.

توضیح. مثلثهای مساوی‌که در اوضاع مختلف قرارگرفته باشند ، از نظرما دراینجا مختلف نیستند.

اثبات. اگریکی ازدستگاههای (I)، (II) و(III)وجود داشته باشد، بدلیل هم‌ارزی آنها؛ دودستگاه دیگرهم وجود خواهند داشت. ازتساوی‌اول دستگاه (II) داریم:

$$a<b|\cos C|+C|\cos B|<b+c$$

وازدوتساوی دیگراین دستگاه بدست می‌آید:

$$b<c+a;\quad c<a+b.$$

بنابراین سه عددa، b، و c چنانندکه هریك از آنها ازمجموع‌دوتای دیگرکوچکتراست ودرهندسه روشن شده است‌که دراین صورت تنها یك مثلث وجوددارد‌که اضلاع‌آن با اعداد a، b، و c بیان شود.

A'، B' و C' را زوایای مقابل به‌اضلاع a، b و c در این مثلث فرض میکنیم، دراینصورت‌ازدستگاه روابط (III)، که‌برای‌هرمثلث‌برقرارند، داریم:

$$A' = \arccos \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

وچون همین‌دستگاه روابط (III) برای اعداد a، b، c، A، B و C نیز برقرارند، برای زاویهٔ A هم همان‌رابطهٔ زاویهٔ A' بدست می‌آید وبنابراین $A = A'$ می‌شود، بهمین ترتیب $B = B'$ و $C = C'$ هم بدست میآیدومثلث ABC، مثلث‌موردنظراست.

ازدستگاههای روابط اساسی‌میتوان‌برای محاسبهٔ اجزاء اصلی یك‌مثلث بامعلوم بودن سه جزء آن استفاده‌کرد (که از این سه جزء مجهول باید لااقل یکی ضلع باشد- بند ۶۱ راببینید).

۵۷. اتحادها ونامساویهائی که بین زوایای مثلث وجود دارد

دراین بند ازروابطی (تساوی یانامساوی) صحبت خواهیم‌کرد که، در حالت‌کلی، بین زوایای یك مثلث وجود دارد. روابطی راکه دراینجا اثبات می‌کنیم مفهوم کلی‌تری دارند: آنهـا برای هرسه زاویه‌ای که به‌مجموع π باشند: $A+B+C=\pi$، صدق می‌کنند ودرحالت خاص، یعنی وقتی A، B و C زوایای یك مثلث هستند نیز صادق خواهند بود.

۱. ازرابطهٔ $A = \pi-(B+C)$، بااستفاده‌ازرابطهٔ تبدیل $[\pi-\varphi]$ اتحادهای زیر نتیجه میشود:

$$\sin A = \sin(B+C); \quad \cos A = -\cos(B+C);$$

$$tg\,A = -tg(B+C) \qquad (۱)$$

که با تبدیل دوری آنها نسبت به آوندهای A، B و C ، شش رابطهٔ مشابه دیگر نیز بدست می‌آید.

۲. ازرابطهٔ $\frac{A}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{B+C}{۲}$ اتحادهای زیر نتیجه میشود:

$$sin\frac{A}{۲}=cos\frac{B+C}{۲};\quad cos\frac{A}{۲}=sin\frac{B+C}{۲};\quad tg\frac{A}{۲}=cotg\frac{B+C}{۲} \quad (۲)$$

که باتبدیل دوری این سه رابطه نسبت به A،B وC، شش رابطهٔ مشابه آنها بدست می‌آید.

۳. $$tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\,tg\,B\,tg\,C \qquad (۳)$$

اثبات. داریم:

$$tg(A+B+C)=\frac{tg\,A+tg\,B+tg\,C-tg\,A\,tg\,B\,tg\,C}{۱-tg\,A\,tg\,B-tg\,B\,tg\,C-tg\,C\,tg\,A}=۰$$

وازآنجا رابطهٔ (۳) نتیجه میشود:

۴. $$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}+tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}+tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}=۱ \qquad (۴)$$

اثبات: چون داریم: $\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ در اینصورت (بند ۲۱ صفحهٔ ۱۴۲) خواهیم داشت:

$$cos\left(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}\right)=cos\frac{A}{۲}cos\frac{B}{۲}cos\frac{C}{۲}\left(۱-tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}-\right.$$

$$\left.-tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}-tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}\right)=۰$$

ازآنجارابطهٔ (۴) بدست می‌آید.

۵. $$sin\,A+sin\,B+sin\,C=۴cos\frac{A}{۲}cos\frac{B}{۲}cos\frac{C}{۲}=$$

$$=۴\,sin\frac{B+C}{۲}sin\frac{C+A}{۲}sin\frac{A+B}{۲} \qquad (۵)$$

اثبات: داریم:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(A+B)=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

که برای رسیدن به‌اتحاد (۵) کافی است از تساوی (۲) استفاده کنیم.

۶. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (۶)

اثبات. داریم:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$$

$$+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)=2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]+1=$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$$

ازآنجا بااستفاده ازروابط (۲)، اتحادهای (۶) بدست می‌آید.

بهمین‌ترتیب اتحادهای زیرراهم می‌توان اثبات کرد:

۷. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (۷)

۸. $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$ (۸)

۹. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ (۹)

۱۰. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-$
$-4\cos A\cos B\cos C$ (۱۰)

۱۱. $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C$ (۱۱)

۱۲. $(12)\quad \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

اثبات. کافی‌است سمت چپ تساوی را برحسب کسینوس قوس دو برابر بنویسیم وازرابطهٔ (۱۰) استفاده کنیم.

۱۳. $(13)\quad \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

۱۴. $(14)\quad \sin A\cos B\cos C+\sin B\cos A\cos C+$
$$+\sin C\cos A\cos B=\sin A\sin B\sin C$$

اثبات. ازرابطهٔ $\sin(A+B+C)=0$ استفاده کنید.

۱۵. $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$
$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\qquad(15)$$

اثبات. ازشرط $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=0$ استفاده کنید.

حالا به‌بعضی از نامساویهائی که در مورد زوایای مثلث وجود دارد، می‌پردازیم.

۱۶. $$(16)\qquad tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$$

اثبات. با توجه به‌اتحاد (۴) داریم:

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}-1=tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}-$$
$$-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}-tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}-tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)^2+\left(tg\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}\right)^2\right]\geqslant 0$$

۱۷. $$(17)\qquad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

اثبات. اگرسمت چپ نامساوی را k فرض کنیم، داریم:

$$k=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

اگر $x=\sin\frac{C}{2}$ فرض کنیم، معادلهٔ درجه دوم زیر را خواهیم داشت:

$$x^2-x\cos\frac{A-B}{2}+2k=0$$

وچون باید ریشه‌های این معادله حقیقی باشند، داریم:

$$\Delta=\cos^2\frac{A-B}{2}-8k\geqslant 0$$

از آنجا:

$$k\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

۱۸.
$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2} \qquad (18)$$

اثبات. با استفاده از اتحاد (۶) ونامساوی (۱۷) بدست میآید:

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 1+4\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

۱۹.
$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (19)$$

اثبات. با استفاده ازقضیهٔ مربوط به‌توابع محدب داریم:

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۲۰.
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad (20)$$

اثبات. کافی است ازاتحاد (۵) ونامساوی (۱۹) استفاده کنیم.

۲۱.
$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad (21)$$

اثبات. باتوجه به‌مجموع ثابت:

$$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}+tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}+tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}=۱$$

حاصلضرب:

$$\left(tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}\right)\left(tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}\right)\left(tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}\right)=\left(tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}\right)^۲$$

وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}=tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}=tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}$$

ازآنجا $A=B=C=\frac{\pi}{۳}$. برای مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

وبرای مثلثهای غیرمتساوی‌الاضلاع نامساوی (۲۱) برقراراست.

۰۴۴ ثابت کنید:

$$\sin^۲A+\sin^۲B+\sin^۲C\begin{cases}>۲ & \text{(برای مثلث حاده‌الزاویه)}\\ <۲ & \text{(برای مثلث منفرجه‌الزاویه)}\\ =۲ & \text{(برای مثلث قائم‌الزاویه)}\end{cases}$$

اثبات. با توجه به اتحاد (۱۲) داریم:

$$\sin^۲A+\sin^۲B+\sin^۲C-۲=۲\cos A\cos B\cos C$$

وسمت راست این تساوی درمورد مثلث حاده‌الزاویه مثبت، برای مثلث منفرجه‌الزاویه منفی وبرای مثلث قائم‌الزاویه برابرصفراست.

۵۸۰ درجات مختلف اجزاء، ردیف نسبتهای مساوی

تعریف. عبارت:

$$F(a، b، c، A، B، C)$$

که ازاجزاء اصلی مثلث تشکیل شده است، نسبت به این اجزاء از درجهٔ n نامیده می‌شود وقتی که‌نسبت به‌آوندهای a، b، c تابعی‌مثبت وهمگن‌ازدرجهٔ n باشد. بعبارت دیگر با تبدیل آوندهای a، b، c به ka، kb، kc، عبارت در k^n ضرب شود:

$$F(ka، kb، kc، A، B، C)=k^nF(a، b، c، A، B، C)،$$

که درآن k عددی است مثبت و دلخواه.

در دوحالت خاص: وقتی‌که نسبت به‌اجزاء ازدرجهٔ صفرباشد، **اجزاء زاویه‌ای** و وقتی‌که از درجهٔ اول باشد، **اجزاء خطی** نامیده میشود.

برای‌اینکه اضلاع مثلث را k مرتبه بزرگ کنیم، طولهای آنها a، b، c رابه ka، kb، kc تبدیل می‌کنیم ، خود مثلث به مثلث متشابهی باضریب تشابه k تبدیل می‌شود. در این تبدیل همهٔ اجزاء درجهٔ n باندازهٔ k^nمرتبه تغییرمی‌کنند.

برای تبدیل به مثلث متشابه، اجزاء زاویه‌ای تغییرنمی‌کنند (در این حالت $n=0$ و $k^n=1$ است). بعنوان نمونهٔ اجزاء زاویه‌ای میتوان‌زوایای A، B، C مثلثی رادانست‌که توابع مثلثاتی آنها با عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ بیان شود وغیره.

در تبدل به‌مثلث متشابه، هریك ازاجزاء خطی k مرتبه تغییرمی‌کنند (دراین حالت $n=1$ و $k^n=k$). نمونه‌های اجزاء خطی مثلث عبارتند از اضلاع، نیمسازها، میانه‌ها، ارتفاعات، اشعهٔدوایر محاطی‌ومحیطی ومحیط‌مثلث.

بعنوان نمونهٔ جزء درجه دوم میتوان از مساحت مثلث نام برد که در درتبدیل به مثلث متشابه با نسبت تشابه k به‌اندازهٔ k^2 مرتبه تغییرمی کند.

قضیه. جزء U تنها وقتی زاویه‌ای است‌که بتواند بوسیلهٔ رابطه‌ای‌که تنها شامل زوایای مثلث است، بیان شود.

اثبات. وقتی‌که جزء U بوسیلهٔرابطهٔ:

$$U = F(A،B،C)$$

قابل بیان باشد (که‌شامل اضلاع نیست)، دراینصورت باتغییر a ،b ،c به ka،kb،kc تغییر نمی‌کند، یعنی U یك جزء زاویه‌ای است.

برعکس، اگر $U = F(a،b،c،A،B،C)$، جزء زاویه‌ای باشد، باید باتبدیل a،b،c به اعداد متناسب با آنها (باضرب در $\frac{۱}{۲R}$) تغییر نکند:

$$\sin A = \frac{a}{۲R} \;\; ; \;\; \sin B = \frac{b}{۲R} \;\; ; \;\; \sin C = \frac{c}{۲R}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$F(a،b،c،A،B،C) = F(\sin A، \sin B، \sin C، A، B، C)$$

مثلا: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{۲p}{a}$ (p نصف محیط است) یك جزء زاویه‌ای است.

قضیه. نسبت دوجزء هم‌درجه یك جزء زاویه‌ای است.

اثبات. اگر:

$$F_۱(a،b،c،A،B،C) \quad ، \quad F_۲(a،b،c،A،B،C)$$

دوجزءدرجه n باشند، درتبدیل به‌مثلث‌متشابه، نسبت‌آنها تغییر نمیکند:

$$\frac{F_۱(ka،kb،kc،A،B،C)}{F_۲(ka،kb،kc،A،B،C)} = \frac{k^n F_۱(a،b،c،A،B،C)}{k^n F_۲(a،b،c،A،B،C)} =$$

$$= \frac{F_۱(a،b،c،A،B،C)}{F_۲(a،b،c،A،B،C)}$$

بنابراین این نسبت یك جزء زاویه‌ای است.

نتیجه. درحالت خاص، نسبت دوجزء خطی، یك جزء زاویه‌ای است.

فرض‌کنید $L = L(a،b،c،A،B،C)$ یك‌جزء خطی ازمثلث باشد. a،b،c را به $۲R\sin A$، $۲R\sin B$، $۲R\sin C$ تبدیل‌می‌کنیم. اگرضریب $۲R$ را خارج کنیم بدست می‌آید:

$$L(a,b,c,A,B,C)=۲R.L(\sin A,\sin B,\sin C,A,B,C)$$

$L(\sin A,\sin B,\sin C,A,B,C)$ عبارت یك جزء زاویه‌ای است و دراین مورد ما آنرا جزء زاویه‌ای متناظر با جزء خطی L می‌نامیم وباعلامت $L(U)$ نشان می‌دهیم، بنا براین:

$$L=۲R.U(L) \qquad (۱)$$

مثلاجزء زاویه‌ای متناظر بامحیط مثلث $۲p=a+b+c$ عبارتست‌از:

$$U(۲p)=\sin A+\sin B+\sin C$$

وجزء زاویه‌ای متناظر با مجموع اضلاع $a+b$ عبارتست از:

$$U(a+b)=\sin A+\sin B$$

اگر به‌اجزاءاصلی مثلث، اجزاءخطی جدید L را اضافه‌کنیم، باتوجه به‌رابطهٔ (۱)، میتوانیم رشتهٔ نسبتهای مساوی را (که قضیهٔ سینوسها را بیان می‌کردند) ادامه دهیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{L}{U(L)}(=۲R)$$

اگرجزء F ازدرجهٔ $n>۱$ باشد، دراینصورت $\sqrt[n]{F}$ ، جزء خطی خواهدبود، دراینصورت به‌رشتهٔ نسبتهای‌مساوی بایدنسبت زیرراهم‌اضافه‌کرد:

$$\frac{\sqrt[n]{F}}{U(\sqrt[n]{F})}$$

۵۹. روابط بین اجزاء مختلف مثلث

I. قضیهٔ تانژانتها. نسبت تفاضل دوضلع برمجموع آنها برابراست با

نسبت تانژانت نصف تفاضل زوایای روبروی به این دوضلع بر تانژانت نصف مجموع آنها:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{A-B}{۲}}{tg\frac{A+B}{۲}}$$

(دو رابطهٔ مشابه دیگر از تبدیل دوری این رابطه نسبت به حروف بدست می‌آید).

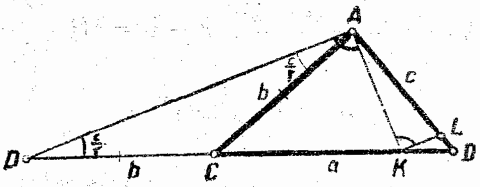
اثبات. اجزاء زاویه‌ای متناظر با مجموع و تفاضل اضلاع مثلث را مینویسیم:

$$a+b=۲R(\sin A+\sin B)=۴R\sin\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲};$$

$$a-b=۲R(\sin A-\sin B)=۴R\cos\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A-B}{۲};$$

و از آنجا قضیهٔ تانژانتها نتیجه میشود.

اثبات هندسی. برای سهولت کار $a>b$ فرض می‌کنیم (شکل ۲۰۹). پاره‌خط $BD=a+b$ و $BK=a-b$ رامیسازیم.



ش ۲۰۹

داریم :

$$\widehat{ACD}=\pi-C;$$

$$\widehat{ADC}=\widehat{DAC}=\frac{\pi-(\pi-C)}{۲}=\frac{C}{۲};$$

$$\widehat{CAK}=\widehat{CKA}=\frac{\pi-C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲};$$

$$\widehat{KAB}=A-\frac{\pi}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{A-B}{۲}\,.$$

پاره‌خط KL را موازی AD رسم می‌کنیم. مثلثهای DAK ، AKL قائم‌الزاویه هستند. ازتشابه دومثلث DAB و LKB داریم:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{BK}{DB}=\frac{KL}{AD}=\frac{AK\cdot tg\frac{A-B}{۲}}{AK\cdot tg\frac{C}{۲}}=\frac{tg\frac{A-B}{۲}}{tg\frac{A+B}{۲}}$$

II. **رابطهٔ مولوید.** مجموع (تفاضل) دوضلع مثلث نسبت به‌ضلع سوم برابر است باکسینوس (سینوس) نصف تفاضل زوایای روبری این دو ضلع به‌سینوس (کسینوس) نصف زاویهٔ روبروبه‌ضلع سوم.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{۲}}{\sin\frac{C}{۲}}\;;\;\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{۲}}{\cos\frac{C}{۲}}$$

اثبات. با توجه به‌روابط زیر:

$$a+b=۴R\cos\frac{C}{۲}\cos\frac{A-B}{۲};\quad a-b=۴R\sin\frac{C}{۲}\sin\frac{A-B}{۲};$$

$$c=۴R\cos\frac{C}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

میتوان بسادگی روابط مورد نظر را بدست‌آورد.

اثبات‌هندسی. ازشکل ۲۰۹ استفاده میکنیم. قضیهٔ سینوسها را درمثلث ADB می‌نویسیم:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin(A+\frac{C}{۲})}{\sin\frac{C}{۲}}=\frac{\sin(A+\frac{\pi-A-B}{۲})}{\sin\frac{C}{۲}}=\frac{\cos\frac{A-B}{۲}}{\sin\frac{C}{۲}}$$

رابطهٔ دوم‌راهم‌بااستفاده ازقضیهٔ‌سینوسهادرمثلث KAB می‌توان‌نوشت.

III. روابط مربوط به‌بیان زوایای مثلث برحسب اضلاع.

ازروابط کسینوسها (بند ۵۶، روابط III) میتوان کسینوس زوایا را برحسب اضلاع آن بدست آورد:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (1)$$

برای محاسبه به‌کمك جدولهای لگاریتم بهتراست‌توابع مثلثاتی‌زوایای $\frac{A}{2}$ ، $\frac{B}{2}$ ، $\frac{C}{2}$ را برجسب اضلاع مثلث بدست می‌آوریم.

ازرابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

اگرفرض‌کنیم $a+b+c=2p$ ، خواهیم داشت:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

بهمین ترتیب میتوان‌بسادگی بدست‌آورد:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

وبالاخره:

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

شش رابطهٔ مشابه دیگر رامیتوان با تبدیل دوری این روابط نسبت به حروف بدست‌آورد.

ضریب $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ نسبت به آوندهای a، b، c

متقارن است و بنابراین:

$$tg\frac{A}{۲}=\frac{r}{p-a};\quad tg\frac{B}{۲}=\frac{r}{p-b};\quad tg\frac{C}{۲}=\frac{r}{p-c}$$

IV. روابطی‌که اجزاء مختلف مثلث را برحسب اجـزاء اصلی آن بیان می‌کنند.

محیط. داریم:

$$۲p=a+b+c=۲R(\sin A+\sin B+\sin C)=$$

$$=۸R\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$$

جزء زاویه‌ای متناظر بامحیط عبارتست از:

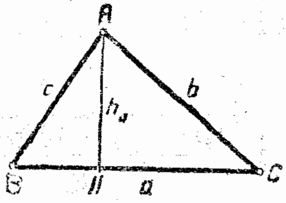
$$U(۲p)=\sin A+\sin B+\sin C=۴\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$$

ارتفاعات. فرض‌کنید $AH=h_a$ ، ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع a باشد. ازمثلث BAH داریم:

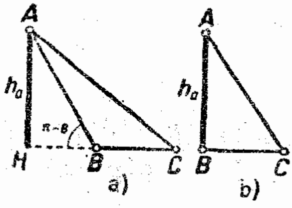
$h_a=c\sin B$ (درحالتی‌که زاویهٔ B حاده است. شکل ۲۱۰)

$h_a=c\sin(\pi-B)=c\sin B$ (درحالتی‌که زاویهٔ B منفرجه‌است. شکل ۲۱۱—a)

$h_a=c=c\sin\frac{\pi}{۲}=c\sin B$ (وقتی‌که زاویهٔ B قائمه است. شکل ۲۱۱—b)



ش ۲۱۰



ش ۲۱۱

باین ترتیب بدون ارتباط به‌مقدار زاویهٔ B داریم:

$$h_a=c\sin B$$

بهمین ترتیب میتوانستیم از مثلث CAH ، رابطهٔ $h_a=b\sin C$ را

بدست آوریم. باین ترتیب:

$$h_a = c\sin B = b\sin C = ۲R\sin B\sin C$$

جزء زاویه‌ای متناظر با ارتفاع h_a برابر است با:

$$U(h_a) = \sin B\sin C$$

روابط مربوط به سایر ارتفاعات را میتوان باتبدیل دوری رابطهٔ h_a نسبت به‌حروف بدست آورد.

مساحت. قضیه. مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دوضلع مجاور درسینوس زاویهٔ بین این دوضلع.

$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin C = \frac{۱}{۲}bc\sin A = \frac{۱}{۲}ac\sin B$$

اثبات. فرض کنید h_b ، ارتفاع وارد برضلع b باشد: $h_b = a\sin C$، بنابراین:

$$S = \frac{۱}{۲}b\cdot h_b = \frac{۱}{۲}ab\sin C$$

بهمین ترتیب میتوان دورابطهٔ مشابه را درمورد مساحت بدست آورد.

مساحت جزء درجهٔ دوم است، $\sqrt{S}$ عنصر خطی است و عنصر زاویه‌ای متناظر باآن چنین است:

$$U(\sqrt{S}) = \sqrt{\frac{۱}{۲}\sin A\sin B\sin C}$$

رابطهٔ هرون که درهندسه ثابت شده است:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مساحت مثلث رابرحسب اضلاع آن بیان میکند.

نیمسازها. فرض کنید $AD = b_a$، نیمساز زاویهٔ A باشد. از مثلث BAD بدست می‌آید (شکل ۲۱۲):

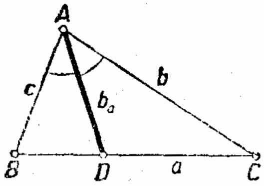
$$\frac{b_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin(ADB)} \qquad (۲)$$

ازطرف دیگرداریم:

$$\widehat{ADB}=\pi-B-\frac{A}{۲}=\pi-B-\frac{\pi-(B+C)}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{B-C}{۲}$$

بنا براین با توجه به تناسب (۲) خواهیم داشت:

$$b_a=\frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{۲}}$$



ش ۲۱۲

جزء زاویه‌ای متناظر با نیمساز b_a چنین است:

$$U(b_a)=\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{B-C}{۲}}$$

اگر b'_a نیمسازخارجی زاویهٔ A باشد، درحالت $B=C$ ، b'_a وجود ندارد و اگر $B>C$ باشد، ازمثلث $D'AB$ بدست میآید (شکل ۲۱۳):

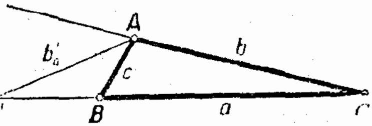
$$\frac{b'_a}{\sin(\pi-B)}=\frac{c}{\sin(AD'B)}$$

ازطرف دیگرداریم:

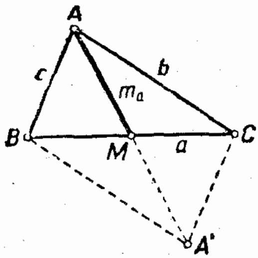
$$\widehat{AD'B}=\pi-(\pi-B)-\frac{B+C}{۲}=\frac{B-C}{۲}$$

بنا براین خواهیم داشت:

$$b'_a=c\frac{\sin B}{\sin\frac{B-C}{۲}} \quad \text{و} \quad U(b'_a)=\frac{\sin C\sin B}{\sin\frac{B-C}{۲}}$$



ش ۲۱۳



ش ۲۱۴

میانه‌ها . $AM=m_a$ را میـانهٔ مثلث که از رأس A گذشته است ، فرض کنید (شکل ۲۱۴) .

میانهٔ m_a را باندازهٔ MA' مساوی MA ادامه می‌دهیم . چهـار ضلعی $A'BAC$ متوازی‌الاضلاع است . در متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اضلاع برابر است با مجموع مربعات اقطار ، ازآنجا خواهیم داشت :

$$4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$$

بنابراین :

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

جزء زاویه‌ای متناظر با میانهٔ m_a برابر است با :

$$U(m_a)=\frac{1}{2}\sqrt{2\sin^2B+2\sin^2C-\sin^2A}$$

شعاع دایرهٔ محاطی . فرض کنید r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد . با وصل‌مرکز دایرهٔ محیطی بهسه رأس مثلث ، مثلث ABC رابه‌سه مثلث OAB ، OBC و OAC تقسیم می‌کنیم . اگر S مساحت مثلث ABC باشد ، داریم (شکل ۲۱۵) :

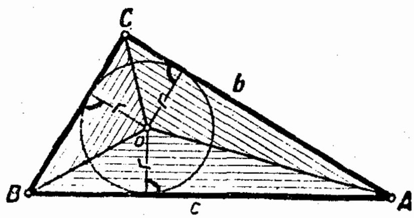
$$S=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAC}$$

$$=\frac{1}{2}rc+\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb=rp$$

باین ترتیب داریم :

$$r=\frac{S}{p}$$

که با استفاده از رابطهٔ هرون خواهیم داشت :



ش ۲۱۵

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

و اگر بجای S و p مقادیر آنهارا برحسب زوایای مثلث قراردهیم،
بدست می‌آید :

$$r=\frac{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\cdot 2R=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}(2R).$$

جزء زاویه‌ای متناظر با r برابر است با :

$$U(r)=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

تبصره. در روابطی که عبارتهای $tg\frac{A}{2}$، $tg\frac{B}{2}$ و $tg\frac{C}{2}$ برحسب اضلاع مثلث داده شد (صفحهٔ ۵۰۲) صورت کسرها یعنی r همان شعاع دایرهٔ محاطی است.

اگر r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس برضلع a باشد، با توجه به شکل ۲۱۶ داریم :

$$S=S_{ABO_a}+S_{ACO_a}-S_{BCO_a}=\frac{1}{2}cr_a+\frac{1}{2}br_a-\frac{1}{2}ar_a=$$

$$=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)=(p-a)r_a$$

باین ترتیب :

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{1}{p-a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{p-a}r.$$

و چون داریم :

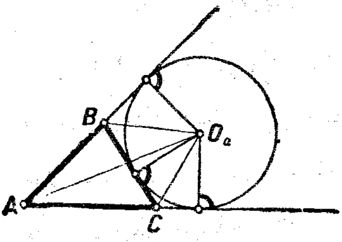
$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ ;\ \ r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ ;$$

$$p-a=2R(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin A)=$$

$$=4R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=4R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{B+C}{2}\right)=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

خواهیم داشت :



ش ۲۱۶

$$r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ ,$$

$$U(r_a)=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

تبصره . روابط مربوط به تانژانت نصف زوایای مثلث‌را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}=\frac{r_a}{p};\ tg\frac{B}{2}=\frac{r_b}{p};\ tg\frac{C}{2}=\frac{r_c}{p}\ ;$$

۷ . رشته نسبتهـــای مساوی که شامل اجـزاء خطی مثلث هستند .

توجه به اجزاء زاویه‌ای متناظر با اجزاء خطی مختلفی که بدست آوردیم بما امکان می‌دهد که رشته تساویهای زیر را بنویسیم :

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}}=$$

$$=\frac{h_a}{\sin B\sin C}=\frac{b_a}{\dfrac{\sin B\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}}}=\frac{m_a}{\frac{1}{2}\sqrt{2\sin^2B+2\sin^2C-\sin^2A}}=$$

$$=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\dots$$

روشن است که باین رشته نسبتهای مساوی میتوان ، نسبتهائی را هم که از تبدیل دوری آنها نسبت به حروف a ، b ، c و A ، B ، C بدست‌می‌آید

اضافه‌کرد . مثلا با توجه به نسبت $\frac{h_a}{\sin B \sin C}$ میتوان دو نسبت زیر راهم به نسبتهای مساوی فوق اضافه‌کرد :

$$\frac{h_b}{\sin C \sin A} \quad و \quad \frac{h_c}{\sin A \sin B}$$

VI . رشته نسبتهای مساوی وسیله‌ای برای حل بسیاری از مسائل مربوط به مثلث هستند . این مسائل می‌توانند انواع کاملامختلفی باشند ، مثلا : اثبات روابطی بین اجزاء مختلف مثلث ، تعیین وضع مثلث با معلوم بودن روابطی بین اجزاء آن ، مسائل مربوط به مقادیرحد اکثر و حد اقل وغیره .

چند مثال

۱. ثابت‌کنید :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

حل : داریم :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin B \sin C}+\frac{1}{\sin C \sin A}+\frac{1}{\sin A \sin B}\right)=$$

$$=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R \sin A \sin B \sin C}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{16R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{r}$$

۲. صحت تساوی نسبتهای زیر را ثابت‌کنید :

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

حل . داریم :

$$a = 2R\sin A \;;\; \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2R\sin B\sin C}$$

رابطهٔ :
$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$$

نسبت به اجزاء اصلی متقارن است و بنابراین برای هرسه نسبت همین مقدار بدست می‌آید .

تبصره . تساوی نسبتهای فوق را ازتساویهای زیر هم می‌توانستیم نتیجه بگیریم :
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$$

۰۳ ثابت کنید رابطهٔ زیر بین اجزاء مثلث برقرار است :

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$$

حل : هریك از جملات سمت چپ تساوی را می‌توان باتبدیل دوری یك جملهٔ دیگر نسبت به آورنده‌ای a ، b ، c و A ، B ، C بدست آورد . بنابراین کافی است حاصل کسر اول را بدست آوریم :

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} = \frac{4R^2 \sin^2 A \sin(B-C)}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} =$$

$$= 4R^2 \frac{\sin^2 A \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} =$$

$$= 4R^2\left(4\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right) = 4R^2(1-\cos A) \times$$

$$\times (\cos C - \cos B) = 4R^2[\cos C - \cos B - \cos A(\cos C - \cos B)]$$

با تبدیل دوری این عبارت نسبت به حروف میتوان حاصل دو کسر دیگر را هم بدست آورد که از جمع آنها اتحاد مفروض نتیجه میشود .

۴. زوایای مثلث متساوی‌الساقینی را چنان پیدا کنید که در آن نسبت $\frac{r}{R}$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

حل : اگر $B=C$ فرض کنیم ، داریم : $B=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$، بنابراین:

$$\frac{r}{R}=۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}=۴\sin\frac{A}{۲}\sin^{۲}\frac{B}{۲}=$$

$$=۲\sin\frac{A}{۲}(۱-\cos B)=۲\sin\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲})=$$

$$=\frac{۱}{۲}-(\sqrt{۲\sin\frac{A}{۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}$$

نسبت $\frac{r}{R}$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\sqrt{۲\sin\frac{A}{۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۰ \Longrightarrow A=\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین $B=C=\frac{\pi}{۳}$ و مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شود .

عبارت $\frac{۱}{۲}-(\sqrt{۲\sin\frac{A}{۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}$ درفاصلهٔ بستهٔ[π و ۰] بازاء مقدار $A=۰$ حد اقلی مساوی صفر دارد . و در اینحـالت مثلث بیك پاره خط تبدیل می‌شود .

۵. زوایای مثلث قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که اضلاع آن تشکیل تصاعد حسابی داده باشند .

حل : A را کوچکترین زاویهٔ مثلث و c را وتر آن فرض می‌کنیم . بنابر شرط مسئله، اضلاع مثلث یعنی : $c\sin A$ و $c\cos A$ و c تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ، ازآنجا معادلهٔ مثلثاتی زیر بدست می‌آید :

$$c\cos A=\frac{c\sin A+c}{۲} \Longrightarrow ۲\cos A-\sin A=۱$$

که با تبدیل عمومی $t = tg\frac{x}{2}$ خواهیم داشت :

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

این معادله یك جواب مثبت $t = \frac{1}{3}$ را قبول دارد و بنابراین $tg\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$،

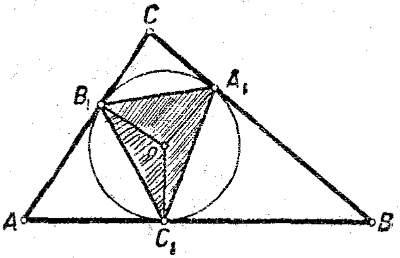
زاویهٔ B از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$tg\frac{B}{2} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

باین ترتیب‌داریم :

$$A = 2\,\mathrm{arc}tg\frac{1}{3} \;;\; B = 2\,\mathrm{arc}tg\frac{1}{2}\,.$$

۶. مطلوبست محاسبهٔ نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ ، بشرطی‌که A_1 و B_1 و C_1 نقاط تماس دایرهٔ محاطی مثلث با اضلاع آن باشند .



شکل ۲۱۷

حل : S و S_1 را بترتیب‌مساحت مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ فرض می‌کنیم. S_1 را محاسبه می‌کنیم ، داریم (شکل۲۱۷) :

$$S_1 = S_{OA_1B_1} + S_{OA_1C_1} + S_{OB_1C_1} = \frac{1}{2}r^2 \sin(\pi - A) +$$

$$+ \frac{1}{2}r^2 \sin(\pi - B) + \frac{1}{2}r^2 \sin(\pi - C) =$$

$$= \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

بنا براین :

$$\frac{S_۱}{S}=\frac{۲r^۲\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}}{۲R^۲\sin A\sin B\sin C}=\frac{r^۲}{۸R^۲\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}=$$

$$=\frac{r^۲}{۲R(۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲})}=\frac{r^۲}{۲R\cdot r}=\frac{r}{۲R}$$

۷. ثابت کنید :

$$S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$$

حل : داریم :

$$r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c=۲^۸R^۴\left(\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\right)\left(\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}\right)\left(\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\right)=$$

$$=۲^۲R^۴\sin^۲A\sin^۲B\sin^۲C=S^۲$$

راه حل دوم : داریم :

$$r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c=r^۴\frac{p^۳}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$\frac{(p-a)^۲(p-b)^۲(p-c)^۲}{p^۲}\times\frac{p^۳}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=p(p-a)(p-b)(p-c)=S^۲$$

۸. صحت تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$$

حل : داریم :

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{4R}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{r}$$

راه حل دوم : داریم :

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{rp}+\frac{p-b}{rp}+\frac{p-c}{rp}=\frac{3p-(a+b+c)}{rp}=$$

$$=\frac{p}{rp}=\frac{1}{r}$$

۶۰ • اصل کلی «تاراپوف» درحل مثلث

اصل **تاراپوف** عبارتست از روش کلی تشکیل معادلات برای محاسبهٔ اجزاء مجهول مثلث به‌کمك اجزاء معلوم آن . فرض‌کنید دو جزء زاویه‌ای زیر مفروض باشد :

$$U_1(A \text{ و } B \text{ و } C)=m_1 \ ; \ U_2(A \text{ و } B \text{ و } C)=m_2$$

دستگاه اصلی مختلط زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} U_1(A \text{ و } B \text{ و } C) = m_1 \ ; \ U_2(A \text{ و } B \text{ و } C) = m_2 \ ; \\ A+B+C=\pi \ ; \ A>0 \text{ و } B>0 \text{ و } C>0 \end{cases} \qquad (U)$$

هرجواب دستگاه (U) ، مثلث را ازلحاظ شکل مشخص می کند. کافی است یکی از مثلثها را بازوایای محاسبه شده در نظر بگیریم ، دراینصورت‌هر مثلث متشابه باآن در شرایط مسئله صدق می کند .

باین ترتیب **هرجواب دستگاه (U) (اگر وجود داشته باشد)، مجموعهٔ بی‌نهایت مثلثهای متشابه رامعین می‌کند** . حالت خاصی‌که دستگاه U جواب ندارد ، باین معناست کـه مثلثی وجود ندارد که روابط مفروض بین‌زوایای آن برقرار باشد .

مسائـل مختلف مـربوط به حـل مثلث را بطریق زیر به سه نوع تقسیم می کنیم :

مسائل نوع اول

وقتی‌که دو جزء زاویه‌ای $U_1=m_1$ و $U_2=m_2$ و یك جزء خطی $L=k$ مفروض باشد .

با معلوم بودن U_1 و U_2 میتوان دستگاه (U) را برای محـاسبهٔ زوایای A و B و C تشکیل داد . وقتی‌که A ، B و C معلوم باشد ، هرجزء زاویه‌ای‌دلخواه ، منجمله‌جزء $U(L)$ ، متناظر با Lرا میتوان بدست‌آورد. مقدار L امکان می‌دهدکه اجزاء مثلث را محاسبه‌کنیم وهر جزء خطی L'را بدست آوریم . درحقیقت از نسبتهای :

$$\frac{L}{U(L)} = \frac{L'}{U(L')} \; (=2R)$$

بدست‌می‌آید :

$$L' = L\frac{U(L')}{U(L)}$$

بخصوص اضلاع مثلث را هم می‌توان محاسبه‌کرد :

$$a=L\frac{\sin A}{U(L)}\ ;\ b=\frac{\sin B}{U(L)}\ ;\ c=\frac{\sin C}{U(L)}$$

تعداد جوابهای مختلف مسئله بطریق زیر معین می‌شود : هرجواب A و B و C از دستگاه مختلط (U) مجموعهٔ بی‌نهایت مثلثهای متشابه را معین می‌کندکه اضلاع آنها از شرایط زیر بدست می‌آید :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=t.$$

که در آن $t\,(=2R)$ عدد دلخواه مثبتی است . در حقیقت هر عدد مثبت t متناظر با یك ردیف جواب برای a ، b ، c ، A ، B و C می‌باشدکه در شرایط زیر صدق می‌کنند :

$$a>0\ ;\ b>0\ ;\ c>0\ ;\ 0<A<\pi\ ;\ 0<B<\pi\ ;\ 0<C<\pi.$$

و درنتیجه تنها یك مثلث را مشخص می‌کنند (صفحهٔ ۴۸۹ را به‌بینید) .

اگر t ، نسبت مقدار مفروض k از جزء L به مقدار متناظر جزء زاویه‌ای آن $U(L)$ ، مثبت باشد :

$$t=\frac{k}{U(L)}>0\ ;$$

دراینصورت مثلثی ، که بوسیلهٔ این مقدار t مشخص می‌شود ، جواب مسئله خواهد بود . درحقیقت با توجه‌به دستگاه مختلط (U) ، اجزاء زاویه‌ای U_1 و U_2 مساوی مقادیر مفروض m_1 و m_2 هستند و مقدار جزء L هم ازشرط زیر بدست می‌آید :

$$\frac{L}{U(L)}=t\Longrightarrow L=t\cdot U(L)=k.$$

اگر نسبت $\frac{k}{U(L)}\leqslant 0$ باشد ، جوابهای متناظر دستگاه مختلط (U)، جوابی برای مسئله بدست نمی‌دهد .

باین‌ترتیب تعداد جوابهای مسئله مساوی تعداد جوابهای دستگاه‌مختلط

(U) است که برای آنها نسبت $\frac{k}{U(L)}$ مثبت باشد .

مسائل نوع دوم

وقتی که دو جزء خطی L_1 و L_2 و یك جزء زاویه‌ای $U=m_1$ مفروض باشد .

با بدست آوردن یك جزء زاویه ای دیگر ، می‌توان این مسئله را به مسئلهٔ قبل تبدیل کرد . بعنوان جزء زاویه ای دوم میتوان نسبت زیر را انتخاب کرد :

$$\frac{L_1}{L_2}=m_2 ;$$

و بعنوان جزء خطی مفروض میتوان یکی ازمقادیر L_1 یا L_2 رادرنظر گرفت.

مسائل نوع سوم

وقتی که سه جزء خطی L_1 و L_2 و L_3 مفروض باشد .

با معین کردن دو جزء زاویه‌ای میتوان مسئله را به‌حالت اول تبدیل کرد . دوجزء زاویه‌ای را میتوان از نسبتهای زیر بدست آورد :

$$U_1=\frac{L_1}{L_3} \text{ و } U_2=\frac{L_2}{L_3}$$

باین ترتیب ، **اصل تاراپوف‌طریقهٔ تشکیل دستگاه مختلط (U)متناظر با مسئلهٔ مفروض ، را بدست می‌دهد** . حل و بحث دستگاه (U) درهرمورد مشخص فرق می‌کند، زیرا وضع این‌دستگاه مربوط به اینست که چه اجزائی معلوم باشد .

در محاسبهٔ عملی،اینکه جواب آخری مسئله بچه صورتی باشد ، در موارد مختلف فرق می کند . مثلا ، برای محاسبه باکمك جدول لگاریتم‌لازم است که مقادیر مجهول برحسب مقادیر مفروض بصورت‌ضرب بیان شده‌باشند.

۶۱ . حالتهای اصلی حل مثلث

حالتهای اصلی حل مثلث به مواردی گفته می‌شود که اجزاء مثلث را برحسب سه جزء اصلی ، که مستقل از هم باشند، محاسبه نمائیم . *

در اینجا فقط به محاسبهٔ سه جزء **اصلی** مثلث برحسب سه جزء اصلی دیگر می‌پردازیم ، زیرا محاسبهٔ اجزاء دیگر مثلث اشکالی بوجود نمی‌آورد و میتوان آنها را باکمك روابطی که این اجزاء را به اجزاء اصلی مثلث مربوط می‌کند ، بدست آورد (بند ۵۹ را به‌بینید) در همهٔ مسائل مربوط به حل مثلث ، مقادیر عددی اجزاء مفروض مثبت‌فرض می‌شوند و ما درهرمورد از این بابت صحبتی نخواهیم کرد .

حل مثلث قائم‌الزاویه .

در مثلث قائم‌الزاویه یکی از اجزاء آن $C=\frac{\pi}{2}$ (مقدارزاویهٔقائمه) معلوم است ، بنابراین برای حل مثلث قائم‌الزاویه دوجزء داده می‌شود که با جزء معلوم C سه جزء مفروض مثلث‌را تشکیل می‌دهند . درکتابهای درسی ، حل مثلث قائم‌الزاویه را بطورخاص مورد بحث قرار می‌دهند، زیرا در این‌حالت میتوان اجزاءمجهول را مستقیماً وباکمك تعریف توابع‌مثلثاتی زوایای حاده (بند ۷ صفحهٔ ۴۸ را به‌بینید) و قضیهٔ فیثاغورس بدست آورد ،

---

*) میدانیم‌که درهندسهٔ اقلیدسی زوایای مثلث، اجزاء مستقلی نیستند وبوسیلهٔ رابطه $A+B+C=\pi$ بهم مربوط‌اند و اگر سه زاویهٔ مثلث مفروض باشد (که در رابطهٔ فوق صدق کنند) ، مثلث تنها با تقریب تشابه معین می‌شود .

بدون اینکه‌لازم باشد ازروابط کلی مربوط به‌مثلث غیرمشخص استفاده کنیم. ٥

با توجه به تعریف توابع مثلثاتی زوایای حاده داریم :

$$a = c\sin A = c\cos B \ ; \ b = c\sin B = c\cos A \ ;$$

$$a = b\,tg A = b\,cotg B \ ; \ b = a\,tg B = a\,cotg A \,.$$

مسائل اصلی مربوط به مثلث قائم‌الزاویه را حل می‌کنیم .

۱° . وتر c وزاویهٔ حادهٔ A مفروض است .

اجزاء دیگر با این روابط بدست می‌آید :

$$a = c\sin A \ ; \ b = c\cos A \ , \ B = \frac{\pi}{۲} - A$$

۲° . یکی از اضلاع مجاور بزاویهٔ قائمه مثلا a و یکی از زوایای حاده ، مثلا A مفروض است .

اجزاء مجهول باکمك روابط زیر بدست می‌آید :

$$B = \frac{\pi}{۲} - A \ ; \ b = a \cdot cotg A \ : \ c = \frac{a}{\sin A}$$

۳° . ضلع a و وتر c مفروض است.

اجزاء دیگر بوسیلهٔ روابط زیر بدست‌می‌آید :

$$A = \arcsin\frac{a}{c} \ ; \ B = \frac{\pi}{۲} - A \ ; \ b = \sqrt{c^{۲} - a^{۲}}$$

تبصره. اگرنسبت $\frac{a}{c}$ به واحد نزدیك باشد ، برای دقت بیشتر در محاسبهٔ باجدول ، میتوان بجای زاویهٔ A ، زاویهٔ $\frac{B}{۲}$ را با استفاده ازرابطهٔ زیر محاسبه‌کرد :

---

٥) مطالعهٔ حل مثلثهای قائم‌الزاویه بطور جداگـانه از نظر روانشناسی آموزشی اهمیت خاص دارد ، زیرا مسائل مربوط به مثلث قائم‌الزاویه را ، که از نظر بیان مثلثات اهمیت خاص دارند ، میتوان قبل از آموزش مثلثات و بدون ارتباط با بحثهای مربوط به‌حل مثلثهای غیرمشخص ، حل‌کرد .

$$tg\frac{B}{۲}=\sqrt{\frac{۱-\cos B}{۱+\cos B}}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

۴° . اضلاع مجاور بزاویهٔ قائمه یعنی a و b مفروض است .

بقیهٔ اجزاء را میتوانیم با روابط زیر بدست آوریم :

$$A=\operatorname{arc}tg\frac{a}{b}\ ;\ B=\frac{\pi}{۲}-A\ ;\ c=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

برای محاسبهٔ لگاریتمی وتر می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد :

$$c=\frac{a}{\sin A}$$

حل مثلث غیر مشخص .

مسئله I (نوع اول) .دوزاویه ویك ضلع‌مثلث داده شده ، اجزاءاصلی دیگر را محاسبه‌کنید.

وقتی که دو زاویهٔ مثلث‌معلوم‌باشد، بلافاصله‌زاویهٔ سوم (بطریق جبری) بدست می‌آید. مثلا فرض‌کنید A، B و a معلوم باشد . اجزاء اصلی مجهول از روابط زیر بدست می‌آید :

$$C=\pi-A-B\ ;\ \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\ ;\ \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

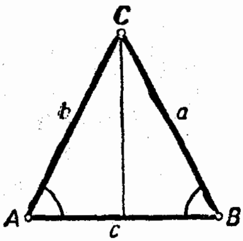
از آنجا :

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\ ;\ c=\frac{a\sin(A+B)}{\sin A}$$

مسئله با توجه به شرایط زیر تنها یك‌جواب دارد :

$$A>۰\ ;\ B>۰\ ;\ A+B<\pi\ .$$

و اگر مقادیر مفـروض A و B در این شرایط صدق نکنند ، مسئله دارای جواب‌نیست (چنین مثلثی وجود ندارد) .



ش ۲۱۸

تبصره. وقتی که $A=B$ باشدمثلث متساوی‌الساقین است وجوابهاساده‌می‌شوند (شکل ۲۱۸) :

$$C=\pi-۲A;\ b=a;\ c=۲a\cos A$$

مسائل نوع دوم . در این‌حالت دو مسئله وجود دارد .

$II_۱$. ازمثلث دو ضلع وزاویهٔ بین‌آنها داده‌شده ، اجزاء اصلی دیگر را بدست آورید .

فرض کنید a ، b و C معلوم باشد . با استفادهٔ مستقیم‌ازاصل‌تاراپوف میتوان معادلهٔ مثلثاتی را برای تعیین یکی از زوایای مجهول تشکیل‌داد .

داریم :

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin(A+C)}=\frac{\sin A}{\sin A\cos C+\cos A\sin C} \quad (۱)$$

ازآنجا : $(a\cos C-b)\sin A+a\sin C\cos A=۰$

از این معادله ، که نسبت به $\sin A$ و $\cos A$ خطی است ، میتوان‌بدست‌آورد:

$$\cot g\,A=\frac{b-a\cos C}{a\sin C}$$

و بقیهٔ اجزاء از روابط زیر بدست می‌آید :

$$B=\pi-C-A\ ;\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

برای محاسبهٔ ضلع c و زوایای مجهول میتوانستیم از روابط کسینوسها استفاده کنیم :

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C;\ \ A=\arccos\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

برای محاسبهٔ لگاریتمی معمولا جوابها را بصورت دیگری می‌دهند .

اگر جزء زاویه‌ای $\frac{a}{b}$ را بصورت $\frac{a-b}{a+b}$ تغییر دهیم (که میتوان نسبت اخیر را هم معلوم فرض کرد)، با استفاده از قضیهٔ تانژانتها(بند ۵۹ صفحهٔ ۴۹۹) بدست می‌آید :

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{cotg\frac{C}{2}}$$

از آنجا : $$tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}cotg\frac{C}{2}$$

و : $$\begin{cases} A-B=2\,arctg\left(\frac{a-b}{a+b}cotg\frac{C}{2}\right) \\ A+B=\pi-C \end{cases}$$

و این دستگاه، مقادیر A و B را بدست می‌دهد . ضلع c را میتوان از قضیهٔ سینوسها بدست آورد : $$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

مسئلهٔ II_1 با شرایط $a>0$ و $b>0$ و $0<C<\pi$ تنها یك جواب دارد .

تبصره . در حالت $a=b$ مثلث متساوی‌الساقین می‌شود و میتوان جوابها را ساده‌کرد :

$$A=B=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2};\ c=2a\sin\frac{C}{2}$$

مسئلهٔ II_2 . از مثلثی دو ضلع وزاویهٔ روبروی به یکی ازاین‌اضلاع داده شده، اجزاء اصلی مجهول را بدست‌آورید .

فرض‌کنیم a ، b و A مفروض باشند. برای تعیین‌زوایای مثلث دستگاه مختلط زیر را داریم :

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A \; ; \; A+B+C=\pi \; ; \; B>0 \; ، \; C>0 \qquad (U)$$

ضلع c را میتوان با توجه به قضیهٔ سینوسها حساب کرد:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

دستگاه مختلط مثلثاتی (U) را بحث می‌کنیم . اگر $b \sin A < a$ باشد، $\frac{b}{a}\sin A < 1$ می‌شود و معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\sin B = \frac{b}{a}\sin A$ در فاصلهٔ (π و ۰) دوجواب دارد :

$$B_1 = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right); \; B_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right)$$

برای بحث مسئله حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

۱°. $b<a$ ، در این حالت :

$$\sin B < \sin A \; ; \; B_1 < A \; ، \; B_1 < \frac{\pi}{2}$$

(از دو زاویهٔ مثلث ، آنکه کوچکتر است حاده است) ، بنابراین همیشه $B_1 < \pi - A$ یعنی $B_1 + A < \pi$ و : $C_1 = \pi - (A + B_1) > 0$

مقادیر B_1 و C_1 در تمام روابط دستگاه (U) صدق می‌کنند .

جواب دوم را در نظر می‌گیریم :

$$B_2 = \pi - B_1 \; ;$$

داریم : $A + B_2 = \pi + (A - B_1) > \pi$

یعنی بازاء B_1 ، روابط دستگاه (U) برقرار نیست .

۲°. $a=b$ و $A<\frac{\pi}{2}$. دراین حالت خواهیم داشت: $B_1 = A$ و $C = \pi - (A + B_1) > 0$. مقدار B_2 در روابط دستگاه (U) صدق نمی‌کند زیرا $A + B_2 = \pi$ است . بازاء $A \geqslant \frac{\pi}{2}$ مسئله جواب ندارد .

۳°. $b\sin A<a<b$ و $A<\frac{\pi}{2}$. دراین‌حالت $\sin B>\sin A$ است و داریم :

$$0<A<B_1<\frac{\pi}{2}\ ;\ A+B_1<\pi\ ;\ C_1=\pi-(A+B_1)>0$$

که در روابط دستگاه (U) صادق‌اند .

به جواب دوم می‌پردازیم :

$$B_2=\pi-B_1\ ;$$

داریم : $C_2=\pi-(A+B_2)=B_1-A>0$

که در همهٔ روابط دستگاه (U) صدق می‌کنند . بازاء $A\geqslant\frac{\pi}{2}$ مسئله جواب ندارد .

۴°. $b\sin A=a$ و $A<\frac{\pi}{2}$. در این‌حالت $B_1=B_2=\frac{\pi}{2}$ و $C=\frac{\pi}{2}-A$ و جواب مثلث قائم‌الزاویه است . بازاء $A\geqslant\frac{\pi}{2}$ مسئله جواب ندارد .

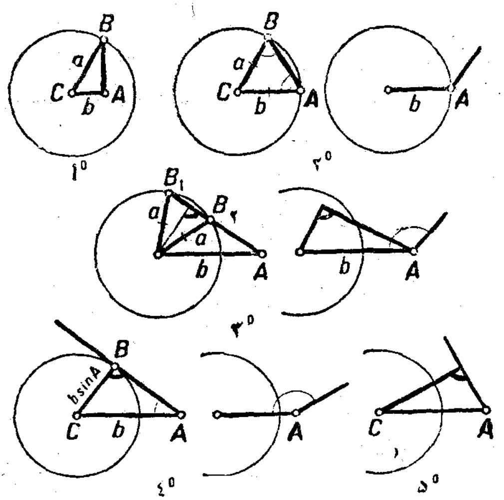
۵°. $b\sin A>a$. در این حالت معادلهٔ اول دستگاه (U) جواب ندارد ومسئله بدون جواب است .

باین ترتیب : ۱° . اگر از دو ضلع a و b ، زاویهٔ A روبروی ضلع بزرگتر باشد مسئله تنها یك‌جواب دارد .

۲°. اگر $a=b$ باشد بازاء $A<\frac{\pi}{2}$ مسئله یك جواب دارد (مثلث متساوی‌الساقین) و بازاء $A\geqslant\frac{\pi}{2}$ جواب ندارد .

۳°. اگر زاویهٔ A روبروی به ضلع کوچکتر باشد و ضمناً داشته‌باشیم

$b\sin A < a < b$ ، دراینصورت باشرط $A < \frac{\pi}{2}$ دو جواب دارد و با شرط $A \geqslant \frac{\pi}{2}$ جواب ندارد .



ش ۲۱۹

۴°. اگر $b\sin A = a$ باشد ، بشرط $A < \frac{\pi}{2}$ مسئله یك جواب دارد (مثلث قائم‌الزاویه) وبشرط $A \geqslant \frac{\pi}{2}$ جواب ندارد .

۵°. اگر $b\sin A > a$ باشد مسئله جواب ندارد .

نتـایجی راکه در این بحث بدست آوردیم میتوان روی شکـل ۲۱۹ مشاهده کرد .

مسئلهٔ نوع سوم . سه ضلع مثلثی مفروض است ، زوایای آنرا حساب کنید .

در این‌حالت برای محاسبهٔ زوایا دستگاه مختلط زیر را داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\ ;\ A+B+C=\pi \\ A>0\ ;\ B>0\ ;\ C>0\end{cases}\qquad (U)$$

از هندسه میدانیم که مثلث با اضلاع a ، b و c تنها وقتی وجود دارد که داشته باشیم :

$$a<b+c\ ;\ b<c+a\ ;\ c<a+b \qquad (1)$$

اگر شرایط (۱) وجود داشته باشد، مسئله دارای یك جواب است . بنابراین نامساویهای (۱) ، شرایط لازم و کافی برای وجود جواب (وضمناً تنها یك جواب) برای دستگاه (U) هستند . زیرا هرجوابی از این دستگاه مثلثی را با اضلاع a ، b و c مشخص می کند (به صفحهٔ ۴۸۹ مراجعه کنید) وبرعکس زوایای هر مثلثی با اضلاع a، b ، c در دستگاه (U) صدق می کند .

شرایط لازم وکافی وجود جواب (و تنها یك جواب) برای دستگاه (U) را میتوان بطریق تحلیلی و بدون اینکه از تعبیر هندسی استفاده کنیم ، بدست آورد . در حقیقت اگر دستگاه (U) جواب داشته باشد ، دستگاه روابط (II) هم باید صادق باشد (قضیهٔ تصویر ، بند ۵۶) . دربند ۵۶ (صفحهٔ ۴۸۹) هم ثابت کردیم که میتوان ازدستگاه (II) نامساویهای (۱) را برای اعداد a ، b و c نتیجه گرفت . بااین‌ترتیب ، این نامساویها شرایط‌لازم برای جواب‌داشتن دستگاه (U) است .

ثابت می‌کنیم که اگر شرایط (۱) برقرار باشد ، دستگاه (U) تنها یك جواب دارد . دستگاه مختلط زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;\ \ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B;\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;\\ 0<A<\pi\ ;\ 0<B<\pi\ ;\ 0<C<\pi\ ;\end{cases}\qquad (U')$$

که درآن a و b و c اعدادی مفروض و A و B و C مجهول‌اند . چون دستگاه روابط (I) و (II) و (III) هم‌ارزند (بند۵۶ صفحهٔ ٤۸۶ را ببینید)، دستگاه(U') هم‌ارز دستگاه (U)خواهد بود . از معادلات دستگاه (U') معادلات ساده‌ای برای محاسبهٔ زوایا بدست می‌آید :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \qquad (2)$$

دو معادلهٔ دیگر با تبدیل دوری این معادله نسبت به حروف بدست می‌آید . ثـابت می‌کنیم که برای صادق بودن نامساویهای (۱) باید داشته باشیم :

$$|b^۲+c^۲-a^۲|<۲bc \qquad (۳)$$

و دو نامساوی دیگر ،که از تبدیل دوری این نامساوی نسبت به حـروف بدست می‌آید . از نامساویهای (۱) داریم :

$$b-c<a \text{ و } c-b<a$$

بنا براین:

$$|b-c|<a \implies b^۲+c^۲-۲bc<a^۲$$

یا :

$$b^۲+c^۲-a^۲<۲bc$$

و با مجذورکردن طرفین اولین نامساوی (۱) بدست می‌آید :

$$a^۲-(b^۲+c^۲)<۲bc ;$$

ازآنجا نـامساوی (۳) نتیجه میشود . باتوجه به این نامساوی (وهمچنین دو نامساوی دیگر شبیه آن) ، معـادلهٔ (۲) (و دومعادلهٔ نظیرآن) در فاصلهٔ (π و ۰) تنها یك‌جواب دارد :

$$A=\arccos\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

درنتیجه ، دستگاه (U) هم تنها یك‌جواب دارد و بنا براین نـامساویهای (۱) شرایط لازم وکافی را برای وجود جواب (وضمنا یك جواب) درمورد دستگاه (U) هستند .

ب. معلوم بودن اضلاع a ، b ، c میتوان زوایای مثلث را از روابط کسینوسها بدست آورد (دستگاه روابط III) :

$$A=\arccos\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

(دو رابطهٔ مشابه دیگر از تبدیل دوری همین رابطه نسبت به حروف بدست می‌آید) .

این روابط برای محاسبهٔ باکمك جدول لگاریتم مناسب نیستند. برای محاسبات لگاریتمی از روابط زیر استفاده می‌کنند :

$$tg\frac{A}{۲}=\frac{r}{p-a}; tg\frac{B}{۲}=\frac{r}{p-b}, tg\frac{C}{۲}=\frac{r}{p-c}$$

که در آن $p=\frac{a+b+c}{۲}$ (نصف محیط)و

$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ (شعاع دایرهٔ محاطی) می‌باشند

(بند ۵۹ صفحهٔ ۵۰۵ را به‌بینید) .

۶۲ . حالتهای فرعی حل مثلث

حالتهای فرعی حل مثلث عبارتست از مسائلی‌که با مفروص بودن سه جزء آن (که در بین آنها ممکن است اجزاء فرعی هم وجود داشته باشد) محاسبهٔ اجزاء مختلف‌مثلث راخواسته باشند . اصل‌کلی تاراپوف مربوط به حل مثلث (بند ۶۰ را به‌بینید) ، روش تشکیل دستگاه مختلط مثلثاتی‌را برای تعیین زوایای مثلث مورد نظر معلوم می‌کند .

در مسائل زیر ، که مربوط به حالتهای فرعی حل‌مثلث است ، هرجا که مسئله بیکی ازحالتهای اصلی‌منجر شود، آنرا حل‌شده خواهیم دانست .

مسائل نوع اول . ساده‌ترین مسائل این نوع‌آنهائی هستندکه‌دوزاویه از مثلث را داده باشند . در این‌حالت محاسبهٔ هرجزء خطی مستقیماً به جزء خطی مفروض منجر میشود .

چند مثال .

۱. A ، B و pمفروض است ، اضلاع ومساحت مثلث رامحاسبه‌کنید.

حل . زاویهٔ C بلافاصله‌بدست می‌آید : $C=\pi-(A+B)$

فرض می‌کنیم $A+B<\pi$ باشد ، زیرا در غیراینصورت مسئله‌جواب ندارد . داریم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}}$$

بنابراین :

$$a=\frac{p\sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$S=\frac{p^2\sin A\sin B\sin C}{8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=p^2 tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=$$

$$=p^2 tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}cotg\frac{A+B}{2}$$

همهٔ مسائل این نوع‌را میتوان با همین روش حل‌کرد مثلا: مطلوبست تعیین اضلاع مثلثی‌که : ۱) زوایا و مساحت آن معلوم باشد ، ۲) زوایا و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم باشد ، ۳) زوایا و یکی از نیمسازهای مثلث معلوم باشد و غیره .

در مثالهای ۲ و۳ که در زیر داده میشود ، مسائلی از نوع اول ذکر شده‌است که‌در آنها اجزاء زاویه‌ای (یا یکی از آنها) بصورت تابعی اززوایای مثلث داده شده است .

۲. اضلاع مثلثی را معلوم‌کنید‌که از‌آن r و نسبت $\frac{h_b+h_c}{b+c}=k$ و زاویهٔ B معلوم باشد .

حل . جزء زاویه‌ای $\frac{h_b+h_c}{b+c}$ را بصورت تابعی از زوایای مثلث می‌نویسیم . داریم :

$$\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{\sin A\sin C+\sin A\sin B}{\sin B+\sin C}=\sin A$$

باین ترتیب داریم :

$$\sin A = k \implies A = \arcsin k \; ; \; C = \pi - A - B$$

(برای اینکه مسئله‌جواب داشته باشد باید $0 < k < 1$ باشد)، سپس داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \; ;$$

از آنجا :

$$a = \frac{r\sin a}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

بهمین ترتیب سایر اضلاع مثلث هم محاسبه می‌شوند .

۳. مسئلهٔ پاسکال . زاویهٔ A و نسبت $\frac{b-c}{h_a} = k$ مفروض است . زوایای B و C را بدست آورید .

حل . داریم :

$$k = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} =$$

$$= \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} = \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) + \cos A}$$

از آنجا برای تعیین $B-C$ معادلهٔ مثلثاتی زیر را خواهیم داشت :

$$k\cos(B-C) - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} + k\cos A = 0$$

با تبدیل $\cos(B-C)$ به $1 - 2\sin^2\frac{B-C}{2}$ و بفرض $t = \sin\frac{B-C}{2}$

معادلهٔ درجه دوم زیر بدست می‌آید :

$$k\cdot t^{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot t-k\cos^{2}\frac{A}{2}=0$$

از اینجا $B-C$ بدست می‌آید که با توجه به معادلهٔ $B+C=\pi-A$ مقادیر B و C محاسبه می‌شوند .

مسائل نوع دوم . ساده‌ترین مسائل این نوع آنهائی هستند که در آنها یکی از زوایا ودو جزء خطی مستقیماً داده شده باشد .

گاهی ضمن ساده کردن نسبت دوجزء خطی مفروض L_1 و L_2 آنرا بصورت نسبت $\frac{L_1+L_2}{L_1-L_2}$ تبدیل می‌کنند (مثل مسئلهٔ اصلی II ، که درآن دو ضلع و زاویهٔ بین آنها مفروض بود) . از این روش معمولا موقعی استفاده میشود که زاویهٔ A و اجزاء متناظر بازوایای مجهول B و C : $L_1=L_b$ و $L_2=L_c$ معلوم‌باشد (مثل : h_b و h_c یا r_b و r_c یا b_b و b_c وغیره) .

چند مثال

۱. اجزاء اصلی‌مثلثی را معین‌کنید که ازآن $2p$ ، r و Aمعلوم باشد.

حل . اجزاء زاویه‌ای معلوم عبارتند از :

$$\frac{2p}{r}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

برای تعیین زوایای B و C دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}=\frac{2p}{r}tg\frac{A}{2};\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

روش حل این دستگاه را در بند ۴۶ دیده‌ایم . ولی در این مسئله میتوان‌از راه حل کلی مثلث استفاده نکرد ، رابطهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

که از آن بدست می‌آید :

$$A = p - r\,cotg\frac{A}{۲}$$

سپس $b+c = ۲p - a$. با استفـاده از رابطهٔ «مول‌وید» (صفحهٔ ۵۰۰)
دستگاه زیر را برای محاسبهٔ B و C خواهیم داشت :

$$cos\frac{B-C}{۲} = \frac{b+c}{a}sin\frac{A}{۲}\ ;\ \frac{B+C}{۲} = \frac{\pi}{۲} - \frac{A}{۲}\ ;\ B>۰ \text{ و } C>۰$$

حل و بحث این دستگاه طبق معمول انجـام می‌گیرد که پس از آن
مسئله منجر به‌حالت اصلی اول ازحل مثلث میشود .

۲. اجزاء اصلی مثلث را محاسبه‌کنید ، بشرطی‌که داشته باشیم :

$$a^۲ - b^۲ = k^۲\ ;\ C \text{ و } A$$

حل : رابطهٔ $\frac{a^۲-b^۲}{c^۲}$ ، جزء زاویه‌ای مفروض است :

$$\frac{a^۲-b^۲}{c^۲} = \frac{k^۲}{c^۲} \Longrightarrow \frac{sin^۲A - sin^۲B}{sin^۲C} = \frac{k^۲}{c^۲}$$

از طرف دیگر داریم :

$$sin^۲A - sin^۲B = \frac{۱}{۲}(cos۲B - cos۲A) = sin(A-B)\,sin(A+B)$$

بنابراین :

$$\frac{sin(A-B)}{sinC} = \frac{k^۲}{c^۲} \Longrightarrow \frac{sin(A-B)}{sin(A+B)} = \frac{k^۲}{c^۲}$$

که با تبدیل تناسب‌خواهیم داشت :

$$\frac{sin(A-B) - sin(A+B)}{sin(A-B) + sin(A+B)} = \frac{k^۲-c^۲}{k^۲+c^۲} \Longrightarrow$$

$$\frac{cosA\,sinB}{sinA\,cosB} = \frac{c^۲-k^۲}{c^۲+k^۲}$$

ازآنجا:

$$tgB = \frac{c^۲-k^۲}{c^۲+k^۲}tgA$$

باید این معادله را نسبت به B با شرایط $0<B<\pi-A$ حل کرد که بعدازآن مسئله منجر به مسئلهٔ اصلی نوع اول می‌شود.

۴. زوایای مثلثی راحساب کنیدکه از آن m_a، m_b و C معلوم‌باشد.

حل: جزء زاویه‌ای مفروض رامیتوان $\frac{m_a^2-m_b^2}{m_a^2+m_b^2}=k$ در نظر گرفت. داریم:

$$k=\frac{(2\sin^2B+2\sin^2C-\sin^2A)-(2\sin^2C+2\sin^2A-\sin^2B)}{(2\sin^2B+2\sin^2C-\sin^2A)+(2\sin^2C+2\sin^2A-\sin^2B)}$$

یا :

$$k=\frac{3\sin^2B-3\sin^2A}{\sin^2B+4\sin^2C+\sin^2A}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\sin^2B-\sin^2A=\sin(A+B)\sin(B-A)=\sin(B-A)\sin C;$$

$$\sin^2B+\sin^2A=1-\cos(A+B)\cos(A-B)=$$
$$=1+\cos C\cos(B-A);$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$k=\frac{3\sin C\sin(B-A)}{1+\cos C\cos(B-A)+4\sin^2C}$$

این معادله نسبت به $\sin(B-A)$ ، $\cos(B-A)$ خطی است که همراه با معادلهٔ $A+B=\pi-C$ و نامساوی‌های $A>0$ ، $B>0$ دستگاهی تشکیل می‌دهدکه زوایای مثلث را معین می‌کند.

مسائل نوع سوم. این‌مسائل معمولا مشکل‌ترین مسائل‌حل مثلث‌اند، زیرا محاسبهٔ زوایا به دستگاههای مثلثاتی منجر می‌شوندکه نمیتوان برای آنها راه حل‌کلی ذکرکرد. تشکیل این دستگاهها بر اساس اصل تاراپوف مشکل نیست ، ولی پس از تشکیل دستگاه برای حل‌آن اغلب بایدازروشهای ابتکاری استفاده‌کردکه جز با تمرین نمیتوان بر آنها مسلط شد ، زیرا

روشهای ابتکاری قابل تنظیم بصورت یك یاچند قضیهٔ کلی نیستند .

چند مثال .

۱. از مثلثی اضلاع b و c و نیمساز b_a ، واقع بین این دو ضلع ، مفروض است . اجزاء اصلی مثلث را حساب کنید .

حل : با توجه به رشته نسبتهای مساوی داریم :

$$b=۲R\sin B\ ;\ \ c=۲R\sin C\ ;\ b_a\cos\frac{B-C}{۲}=۲R\sin B\sin C$$

از آنجا :

$$b+c=۲R(\sin B+\sin C)=۴R\sin\frac{B+C}{۲}\cos\frac{B-C}{۲}=$$

$$=۴R\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B-C}{۲} \qquad (۱)$$

و اگر طرفین تساوی سوم را در $۴R$ ضرب کنیم :

$$۴Rb_b\cos\frac{B-C}{۲}=۸R^۲\sin B\sin C$$

که با استفاده از تساوی (۱) خواهیم داشت :

$$\frac{b_a(b+c)}{\cos\frac{A}{۲}}=۲bc \Longrightarrow \cos\frac{A}{۲}=\frac{b_a(b+c)}{۲bc}$$

اگر $۱>\frac{b_a(b+c)}{۲bc}$ باشد ، محاسبهٔ $\frac{A}{۲}$ از معادلهٔ سادهٔ بالا ، مسئله را بهحالت اصلی منجر می‌کند و اگر $۱\leqslant\frac{b_a(b+c)}{۲bc}$ باشد، مسئله‌جواب نخواهد داشت :

۲. اجزاء اصلی مثلثی را معین کنید که سه ارتفاع آن h_a ، h_b و h_c معلوم باشد .

حل ۰ برای محاسبهٔ زوایای A، B ، C ازروش زیر استفاده می‌کنیم،

روابط زیر را در نظر می‌گیریم :

$$a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

(مثال ۲ صفحهٔ ۵۰۸ را ببینید) . بنابراین اگر مثلث ABC با اضلاع a، b و c وجود داشته باشد، مثلث ، $A_1B_1C_1$ هم با اضلاعی که بطریق زیر معین می‌شوند ، وجود خواهد داشت :

$$a_1=\frac{1}{h_a}\ ;\ b_1=\frac{1}{h_b}\ ;\ c_1=\frac{1}{h_c}$$

برعکس اگر مثلث $A_1B_1C_1$ با اضلاع a_1 ، b_1 و c_1 وجود داشته باشد ، مثلث ABC هم با ارتفاعات مفروض h_a ، h_b و h_c وجود خواهد داشت و ضمناً دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه‌اند .

درحقیقت اگر مثلث $A_1B_1C_1$ رادرنظر بگیریم و فرض کنیم h_{a_1} ، h_{b_1} و h_{c_1} ارتفاعات آن باشند ، داریم :

$$a_1\cdot h_{a_1}=b_1\cdot h_{b_1}=c_1\cdot h_{c_1}\ :$$

که اگر $k=\frac{h_a}{h_{a_1}}$ فرض کنیم، مثلثی بااضلاع :

$$a=k\cdot a_1\ ;\ b=k\cdot b_1\ ;\ c=k\cdot c_1\ ;$$

خواهیم داشت که ارتفاعات آن‌چنین‌اند :

$$k\cdot a_1=h_a\ ;\ k\cdot b_1=k\frac{a_1}{b_1}h_{a_1}=\frac{h_a}{h_{a_1}}\frac{a_1}{b_1}\cdot h_{a_1}=h_b\ ;$$

و بهمین‌ترتیب : $k\cdot c_1=h_c$

باین ترتیب وقتی مسئله جواب دارد (و تنها یك جواب) که مثلثی با اضلاع $\frac{1}{h_a}$ و $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ وجود داشته باشد . اگر $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ باشد، این شرط لازم و کافی را میتوان بصورت $\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ نوشت . برای محاسبهٔ زوایای مثلث کافی است زوایای مثلث متشابه $A_1B_1C_1$ را (با در دست داشتن سه ضلع آن) محاسبه کنیم :

$$A = 2\operatorname{arctg}\frac{r_1}{p_1 - a_1} = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}}$$

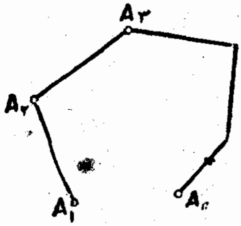
برای محاسبهٔ اضلاع a ، b و c کافی است از روابط زیر استفاده کنیم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{h_b}{\sin A \sin C} \Longrightarrow a = \frac{h_b}{\sin C}\left(=\frac{h_c}{\sin B}\right)$$

۶۳. حل چند ضلعی‌ها

از هندسه می‌دانیم که یك n ضلعی دارای ۲n جزء اصلی است : n ضلع و n زاویه. ضمناً در حالت کلی وقتی یك n ضلعی معین می‌شود که ۲n — ۳ جزء اصلی آن معلوم باشد . مثلا فرض کنید خط شکستهٔ $A_1A_2A_3\cdots A_n$ مفروض باشد ، این خط شکسته میتواند بطور کامل معرف یك n ضلعی با رئوس

A_1، A_2، ....، A_n باشد (شکل ۲۲۰).



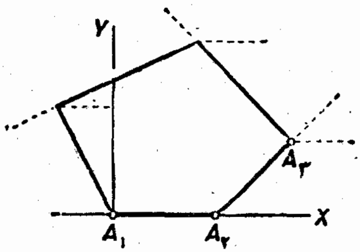
ش ۲۲۰

ضمناً اجزاء اصلی این خط شکسته (اضلاع و زوایا) میتوانند بطور دلخواه اختیار شوند (از مجموعهٔ قابل قبول برای این اجزاء). با دردست داشتن مقادیر پاره خطهای شکسته: $A_1A_2=a_1$، $A_2A_3=a_2$، ....، $A_{n-1}A_n=a_{n-1}$ و مقادیر زوایای آن: A_2، A_3، ....، A_{n-1} (اندازه زوایا را با همان حروف رئوس آن نشان داده‌ایم)، می‌توان هم خط شکسته راساخت و هم n ضلعی $A_1A_2\cdots A_nA_1$ را. در نتیجه سه جزء اصلی دیگر n ضلعی یعنی ضلع $a_n=A_nA_1$ وزوایای A_1 و A_n خودبخود معین می‌شوند.

میتوان روابط کلی بین اجزاء یك n ضلعی رابدست آورد. از هندسه می‌دانیم که مجموع زوایای یك n ضلعی (با معلوم بودن n) مقداری است ثابت:

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\pi(n-2) \qquad (I)$$

برای اینکه روابط بین اجزاء زاویه‌ای وخطی را بدست آوریم، محیط چند ضلعی را بر محورهای عمود برهم تصویر می‌کنیم. برای سهولت کار، یکی از اضلاع چند ضلعی، و مثلا ضلع A_1A_2 را، بعنوان یکی از محورها وخط عمود برآنرا بعنوان محور دوم انتخاب می‌کنیم (شکل ۲۲۱). این محورها رامحورهای مختصاتی در نظر می‌گیریم که محور طول آن بر بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ وجهت مثبت این‌محور برجهت این بردار منطبق باشد. $A_2A_3\ldots A_1$ را بر Ox



ش ۲۲۱

تصویر می‌کنیم . زوایائی راکه اضلاع خط شکسته با محور طول می‌سازند محاسبه می‌کنیم :

کسینوس	زاویه با A_1A_2	ضلع
$-\cos A_2$	$\pi-A_2$	A_2A_3
$\cos(A_2+A_3)$	$(\pi-A_2)+(\pi-A_3)=$ $=2\pi-(A_2+A_3)$	A_3A_4
$-\cos(A_2+A_3+A_4)$	$(\pi-A_2)+(\pi-A_3)+$ $+(\pi-A_4)=3\pi-$ $-(A_2+A_3+A_4)$	A_4A_5
. . . . .	. . . . . .	. . .
$(-1)^{n-1}\cos(A_2+$ $+A_3+A_4+$ $+\cdots+A_n)$		A_nA_1

داریم :

$$(A_2A_3 \text{ تصویر})+(A_3A_4 \text{ تصویر})+\cdots+(A_nA_1 \text{ تصویر})=$$
$$=(A_2A_1 \text{ تصویر}) \quad (A)$$

تصویر $A_i\,A_{i+1}$ برابر است باطول آن ضرب درکسینوس زاویه‌ای که $A_i\,A_{i+1}$ با محور Ox می‌سازد :

$$(A_i\,A_{i+1} \text{ تصویر})=a_i\cos(\widehat{A_i\,A_{i+1}, Ox})=$$
$$=a_i\cdot(-1)^{i-1}\cos(A_2+A_3+\cdots+A_i)$$

در نتیجه با توجه به رابطهٔ :

$$(A_2A_1 \text{ تصویر})=-(A_1A_2 \text{ تصویر})=-a$$

رابطهٔ (A) بصورت زیر در می‌آید :

$$a_1 = a_2 \cos A_2 - a_3 \cos(A_2 + A_3) + a_4 \cos(A_2 + A_3 + A_4) + + \dots + (-1)^n a_n \cos(A_2 + A_3 + \dots + A_n) \qquad (II)$$

بهمین‌ترتیب خط شکسته‌را برمحور Oy هم تصویر می‌کنیم، زاویه‌ای که ضلع A_iA_{i+1} با محور عرض می‌سازد چنین است :

$$(\widehat{A_iA_{i+1}, Oy}) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{A_iA_{i+1}, Ox})$$

بنابراین :
$$(A_iA_{i+1} \text{ تصویر}) = a_i \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\widehat{A_iA_{i+1}, Ox})\right] =$$

$$= a_i \sin(\widehat{A_iA_{i+1}, Ox}) = (-1)^i a_i \sin(A_2 + A_3 + \dots + A_i)$$

بااستفاده ازرابطهٔ کلی (A) ویا توجه‌باینکه $\cdot = (A_2A_1$ تصویر$)$ است، بدست می‌آید:

$$a_2 \sin A_2 - A_3 \sin(A_2 + A_3) + a_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4) + + \dots + (-1)^n a_n \sin(A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 0 \qquad (III)$$

دستگاه روابط (I) ، (II) و (III) با معلوم بودن $2n - 3$ جزء اصلی به دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی تبدیل می‌شود که در نتیجه سه جزء مجهول را بدست خواهد داد .

روابط (I) ، (II) و (III) ، درحالت خاص ، وقتی که بامثلث‌سرو کار داریم بصورت زیر در می‌آید :

$$A + B + C = \pi \qquad (I')$$

$$a = c\cos B - b\cos(C) \quad \text{یا} \quad a = b\cos C + c\cos B \qquad (II')$$

$$c\sin B - b\sin(B + A) = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (III')$$

و از این دستگاه روابط می‌توان همهٔ روابطی راکه دربند ۵۷ ، بین اجزاء

اصلی مثلث، یادکردیم نتیجه گرفت . مثلا باحذف c ازروابط (II´) و(III´) بدست می‌آید :

$$a = b\cos C + \frac{b\sin C}{\sin B}\cos B + \frac{b}{\sin B}[\cos C\sin B + \sin C\cos B] =$$

$$= \left[\frac{b}{\sin B}\sin(B+C)\right] = \frac{b}{\sin B}\sin A.$$

بنابراین قضیهٔ سینوسها برقرار استوازآنجا (بند۵۷ را به‌بینید) بقیهٔروابطی راکه بین اجزاء اصلی مثلث وجود دارد می‌توان نتیجه گرفت .

مثال

اگر $n = ۴$ فرض کنیم، روابط (II) و(III) بصورت زیردرمی‌آیند:

$$a = b\cos B - c\cos(B+C) + d\cos(B+C+D);$$
$$۰ = b\sin B - c\sin(B+C) + d\sin(B+C+D)$$

که پس از مجذورکردن طرفین این دو رابطه وجمع آنها ، رابطهٔ زیر را بدست می‌آوریم که مربع یك‌ضلع را بدست می‌دهد :

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + d^{۲} - ۲bc\cos C + ۲bd\cos(C+D) - ۲cd\cos D$$

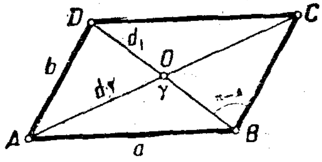
درعمل‌برای حل‌مسائل مختلف مربوط‌به‌محاسبهٔ اجزاء چند ضلعی‌هااز روابط‌کلی استفاده نمی‌کنند ، بلکه چند ضلعی را به مثلثهائی تقسیم و حل مسئله را به‌محاسبهٔ اجزاء مثلثها منجر می‌کنند . درمورد مسائل مختلف از روشهای مختلف برای تقسیم چند ضلعی به مثلثها استفاده می‌کنند (رسم‌اقطار یاخطوط راست موازی اضلاع یا عمودبرآنها وغیره). دراینجا چند مسئله‌از چهار ضلعی‌ها را حل می‌کنیم .

چند مثال

۱. از یك متوازی‌الاضلاع دو ضلع a و b و زاویهٔ بین آنها مفروض است . زاویهٔ γ بین دوقطر را محاسبه‌کنید .

حل . متوازی‌الاضلاع را بوسیلهٔ رسم اقطار آن به مثلثهـائی تبدیل

می کنیم (شکل ۲۲۲) . از مثلثهای ABD و ABC اقطار رامحاسبه می کنیم :



ش ۲۲۲

$$d_1^2 = BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A\ ;$$

$$d_2^2 = AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos A$$

زاویهٔ مجهول بین دو قطر را باکمك قضیهٔ کسینوسهـا و از مثلث OAB بدست می آوریم:

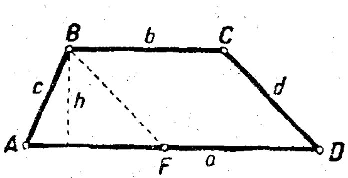
$$a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1 d_2}{2}\cos\gamma\ ;$$

$$\cos\gamma = \frac{4a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2} = \frac{a-b}{\sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4ab\cos^2 A}}$$

برای محاسبات لگاریتمی رابطهٔ زیر ساده‌تر است :

$$tg\gamma = \frac{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{\cos\gamma} = \frac{2ab\sin A}{(a+b)(a-b)}$$

۲. دو قاعدهٔ یك ذوزنقه a و b و ساقهای آن‌مساوی c و d هستند . زوایاومساحت‌ذوزنقه‌را بدست آورید.



ش ۲۲۳

حل . a را قاعدهٔ بزرگتر و A را زاویهٔ بین اضلاع a و c فرض می کنیم (شکل(۲۲۳).

خـط BF ، که موازی d رسم شده‌است، ذوزنقه را به مثلث ABF و متوازی‌الاضلاع BCDF تقسیم می کند. درمثلث ABF سه ضلـع معلوم

است : c ، d و $(a-b)$ ، باکمك این سه ضلع میتوان زاویهٔ A را محاسبه کرد :

$$\cos A=\frac{(a-b)^2+c^2-d^2}{2c(a-b)}$$

و مشابه آن :
$$\cos D=\frac{(a-b)^2+d^2-c^2}{2d(a-b)}$$

برای محاسبهٔ مساحت از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{1}{2}(a+b)c\sin A$$

(h ارتفاع ذوزنقه است) . داریم :

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=$$

$$=\frac{1}{2c|a-b|}\sqrt{4c^2(a-b)^2-[(a-b)^2+c^2-d^2]}$$

از آنجارابطهٔ زیر برای‌محاسبهٔ‌مساحت ذوزنقه‌برحسب اضلاع آن‌بدست می‌آید:

$$S=\frac{a+b}{4|a-b|}\sqrt{[(c+d)+(a-b)][(c+d)-(a-b)][(a-b)+(c-d)][(a-b)-(c-d)]}$$

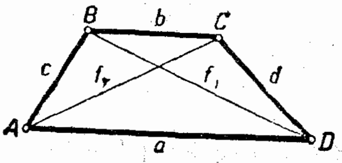
۴. ثابت‌کنید رابطهٔ زیر بین اضلاع و اقطار هر ذوزنقه برقرار است:

$$f_1^2+f_1^2=c^2+d^2+2ab\ ; \qquad (1)$$

که در آن a و b دو قاعده ، c و d ساقها و f_1 و f_2 اقطار ذوزنقه‌اند .

اثبات. اقطار را از مثلثهای ABD و ABC پیدا می‌کنیم (شکل ۲۲۴) :

$$f_1^2=a^2+c^2-2ac\cos A\ ;$$
$$f_2^2=b^2+c^2+2bc\cos A\ .$$



ش ۲۲۴

اگر بین این دو رابطه $\cos A$ را حذف کنیم ، بدست می‌آید :

$$bf_1^2+af_2^2=(a^2b+c^2b+b^2a+c^2a)$$

یا :
$$bf_1^2+af_2^2=(a+b)(c^2+ab) \qquad (2)$$

بهمین ترتیب اگر ازمثلثهای ACD وBCD استفاده کنیم ، بدست‌می‌آید:

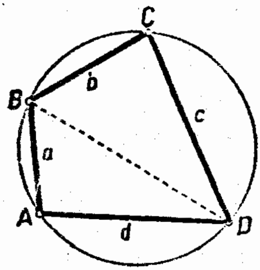
$$af_1^2+bf_2^2=(a+b)(d^2+ab) \;; \qquad (3)$$

اکنون اگرروابط (۲) و (۳)را باهم‌جمع کنیم تساوی(۱) بدست‌خواهدآمد.

۴. a ، b ، c و d اضلاع یك چهار ضلعی محاطی هستند ، زوایا و مساحت این‌چهار ضلعی را پیدا کنید .

حل . میدانیم‌که زوایای یك چهار ضلعی محاطی درشرایط زیر صدق‌می‌کنند (شکل ۲۲۵) :

$$A+C=\pi \,,\quad B+D=\pi .$$



ش ۲۲۵

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در دو مثلث ABD و BCD دو عبارت برای‌مجذور قطر BD بدست‌می‌آید که ازآنجا بامقایسهٔ این دو عبارت خواهیم داشت :

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$$

(متذکر میشویم که $\cos C=-\cos A$ می‌باشد) . ازآنجا بدست می‌آید :

$$\cos A=\frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(bc+ad)}$$

و سپس :

$$1+\cos A=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(bc+ad)}=$$

$$=\frac{(a+d+c-b)(a+d+b-c)}{2(bc+ad)}\;;$$

$$1-\cos A=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(bc+ad)}=$$

$$=\frac{(-a+b+c+d)(a+b+c-d)}{2(bc+ad)}$$

و اگر محیط چهار ضلعی محاطی را $2p$ فرض کنیم :

$$2p=a+b+c+d \Longrightarrow a+b+c-d=2(p-d)$$

و سه رابطهٔ دیگر شبیه‌آن . درنتیجه خواهیم داشت :

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc+ad}}\;;\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{bc+ad}}\;;$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$\sin A=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{bc+ad}$$

در این روابط a و d ، اضلاعی هستند که زاویهٔ A را می‌سازند و c و d اضلاع مقابل به a و d می‌باشند .

مساحت S چهار ضلعی را محاسبه می‌کنیم :

$$S=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}[ad\sin A+bc\sin(\pi-A)]=$$

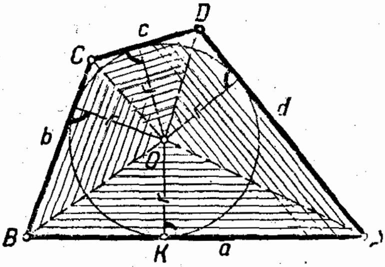
$$=\frac{1}{2}\sin A(ad+bc)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

۵۰ ثابت کنید درهر چهارضلعی محیطی روابط زیر برقرار است :

$$\begin{cases} a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} \\ b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=d\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

اثبات : اگر O مرکز دایرهٔ محاطی چهار ضلعی باشد ، زوایای‌مثلث ABO (شکل ۲۲۶) عبارتند از :

$\frac{A}{2}$، $\frac{B}{2}$ و $\pi-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$. به‌دو طریق S ، مساحت مثلث ABO را محاسبه می‌کنیم . داریم :



ش ۲۲۶

$$S=\frac{1}{2}ra;$$

$$S=\frac{1}{2}(r\cdot Bk+r\cdot Ak)=$$

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

با مقایسهٔ این دو رابطه (پس از ساده‌کردن) خواهیم‌داشت :

$$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=r\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) \qquad (2)$$

و اگر شبیه این رابطه را باکمك مثلث CDO بدست آوریم ، داریم :

$$c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=r\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right) \qquad (3)$$

از مقایسهٔ تساویهای (۲) و (۳) ، تساوی اول (۱) بدست می‌آید ، زیرا :

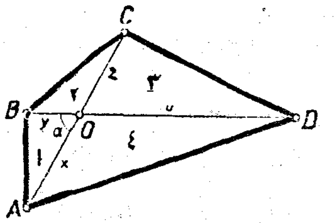
$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\pi-\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right) \Longrightarrow \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right)$$

بهمین‌ترتیب می‌توان رابطهٔ دوم (۲) رانیز بدست آورد .

۰۶ ثابت‌کنیدکه S، مساحت چهار ضلعی، برابراست‌با نصف‌حاصلضرب طول دو قطر در سینوس زاویهٔ بین‌آنها .

اثبات : فرض‌کنید $AC=a$ ، $BD=b$ و $\widehat{AOB}=\alpha$ باشد (شکل ۲۲۷). نقطهٔ‌تلاقی دوقطر، هریك‌از اقطار را به دوقسمت تقسیم‌می‌کند:

$$a=x+z\ ;\quad b=y+u\ .$$



ش ۲۲۷

چهار ضلعی به چهار مثلث تقسیم می‌شود ، داریم :

$$(\text{مساحت مثلث}۱)=\frac{۱}{۲}xy\sin\alpha\ ;$$

$$(\text{مساحت مثلث}۲)=\frac{۱}{۲}yz\sin(\pi-\alpha)=$$

$$=\frac{۱}{۲}yz\sin\alpha\ ;$$

$$(\text{مساحت مثلث}۳)=\frac{۱}{۲}zu\sin\alpha\ ;\quad (\text{مساحت مثلث}٤)=\frac{۱}{۲}xu\sin\alpha$$

از آنجا :

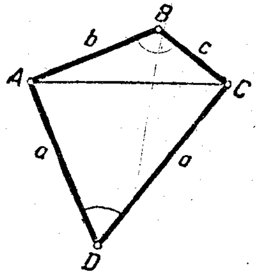
$$S=\frac{۱}{۲}\sin\alpha(xy+yz+zu+xu)=\frac{۱}{۲}(x+z)(y+u)\sin\alpha=$$

$$=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

۷. ثابت کنید بین همهٔ چهار ضلعی های ABCD بـا اضلاع مفروض $AB=b$ ، $BC=c$ ، $CD=d$ و $DA=a$ ، سطح ماکزیمم مربوط به چهار ضلعی است که قابل محاط در دایره باشد .

مسئله را می‌توان باین‌ترتیب تعبیر کرد : فرض‌کنید ABCD چهار ضلعی باشد که اضلاع آن در چهار گوشه بهم لولاشده باشند ، یعنی چهارمیله بطولهای a ، b ، c و d را بهم لولاکرده و روی صفحه‌ای قرار داده‌باشیم بطوریکه هرضلع آن بتواند دور لولای رأس دوران کند. میخواهیم‌به‌بینیم با چه شرطی سطح این چهارضلعی حداکثر می‌شود .

اثبات . چهار ضلعی ABCD را بوسیلهٔ قطر AC به دومثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۲۲۸) ، داریم :



ش ۲۲۸

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} =$$

$$= \frac{۱}{۲}(bc\sin B + ad\sin D) \qquad (۱)$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در دو مثلث ABC و ACD داریم :

$$AC^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos B =$$

$$= a^۲ + d^۲ - ۲ad\cos D \qquad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) را بترتیب می‌توان چنین نوشت :

$$bc\sin B + ad\sin D = ۲S \;;$$

$$bc\cos B - ad\cos D = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ - a^۲ - d^۲)$$

هر دو رابطه را مجذور وسپس با هم جمع می‌کنیم ، پس از ساده کردن بدست می‌آید :

$$۱۶S^۲ = ۴(b^۲c^۲ + a^۲d^۲) - ۸abcd\cos(B+D) -$$

$$-(b^۲ + c^۲ - a^۲ - d^۲)$$

ماکزیمم $۱۶S^۲$، وهمچنین ماکزیمم S، همراه با می‌نیمم $\cos(B+D)$ است. می‌نیمم $\cos(B+D)$ مساوی ۱ — واز آنجا $B+D=\pi$ می‌شود، یعنی باید چهارضلعی محاطی باشد.

۶۴. کاربرد مثلثات در حل مسائل فضائی

باکمك مثلثات می‌توان بسیاری از مسائل مربوط به اشکال فضائی را حل کرد ، مثلا ایجاد رابطه بین زوایا (مسطحه یا دوسطحی) دراشکال محدود

فضائی ، محاسبهٔ اجزاء چند وجهی ها با معلوم بودن اجـزاء مورد لزوم ، محاسبهٔ اجزاء اجسام دوار، محاسبهٔ مساحت مقاطع مسطحه دراجسام مفروض و غیره . بسته باینکه شکل مورد مطالعه چه خصوصیات هندسی داشته باشد و بسته باینکه چه اجزائی ازآن معلوم وچه اجزائی مجهول باشد ، راه‌حلهای کاملا متنوعی می‌توان برای حل‌اینگونه مسائل ذکر کرد. ولی‌روش زیر بیش از همهٔ روشهای دیگر مورد استفاده قرار می گیرد . باشروع ازاجزاءمعلوم یك رشته مثلث متصل بهم میسازیم که بتوان بترتیب با محاسبهٔ اجزاء مثلثها به محاسبهٔ اجزاء مجهول رسید .

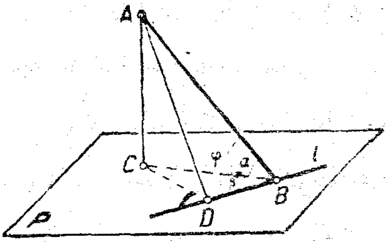
راه حل عمومی دیگری‌برای حل‌مسائل فضائی نمی‌توان ذکر کرد وما حالتهای خاص مختلفی از اینگونه مسائل را ضمن مثالهای زیر آورده‌ایم .

تبصره. در حل‌مسائل فضائی معمولا هم از قضایای عمومی‌هندسهٔ فضائی (قضایای دربارهٔ خطوط وصفحات موازی وعمود برهم، دربارهٔ مایلها وتصاویر آنها ، دربارهٔ زوایای خطی ودو سطحی) وهم از نتایج مستقیم آنها در شکل مورد نظرفضائی استفاده می‌شود . ما برای‌حل مسائل فضائی ، به استنتاجاتی که از این نتایج در مورد هرحالت خاص بدست می‌آید تکیه نمی کنیم (در-صورت تمایل خواننده می‌تواند خود نتیجه‌گیریهای لازم را بدست آورد) ، زیراکار مثلثات برپایهٔ روش محاسبه قرار دارد و ساختمان فضائی اشکال مربوط به حل هندسی آنهاست.

چند مثال

۱. خط l برصفحهٔ P واقع است وبا تصویر خط مایل AB برصفحهٔ P، زاویه‌ای مساوی β $(\frac{\pi}{2} > \beta \geqslant 0)$ می‌سازد . اگر زاویهٔ AB با صفحهٔ P مساوی α باشد ، زاویهٔ φ بین l ومایل AB را پیدا کنید .

حل : بدون اینکه به‌کلیت مسئله لطمه‌ای بزنند ، میتوان فرض کرد که خط l از پای خط مایل عبور کند .



ش ۲۲۹

فرض می کنیم که $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ،

نقطهٔ B پای مایل AB ، AD پاره خطی از مایل ، عمودی که از A بر خط l رسم شده و C تصویر نقطهٔ A بر صفحهٔ P باشد (شکل ۲۲۹)

داریم : $BC = AB\cos\alpha$; $BD = BC\cos\beta$

(زیرا $CD \perp BD$ است) .

$BD = AB\cos\varphi$.

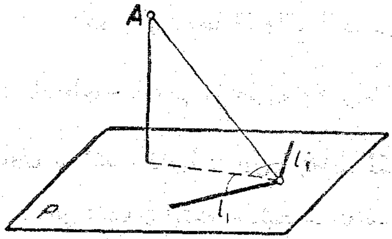
ازآنجا خواهیم داشت :

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta \qquad (1)$$

در حالتهای خاص $\beta = 0$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$ احتیاجی به بحث نیست ، زیرا در این موارد مثلث CBD وجود ندارد ، ولی رابطهٔ (۱) صادق است . در حقیقت بازاء $\beta = 0$ داریم $\varphi = \alpha$ ، و بازاء $\beta = \frac{\pi}{2}$ داریم $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ودر هردو حالت تساوی (۱) برقرار است .

تبصره. از رابطهٔ (۱) می‌توان برای حل مسائل مختلف فضائی استفاده کرد .

نتیجهٔ I . اگرخطوط l_1 و l_2 واقع‌درصفحهٔ P زوایای مساوی $\beta_1 = \beta_2$ را با تصویر مایل بسازند ، باخود خط مایل هم زوایای مساوی خواهند ساخت (شکل ۲۳۰) .



ش ۲۳۰

درحقیقت داریم :

$$\cos\varphi_1 = \cos\alpha\cos\beta_1 = \\ = \cos\alpha\cos\beta_2 = \cos\varphi_2$$

و ازآنجا :
$$\varphi_1=\varphi_2$$

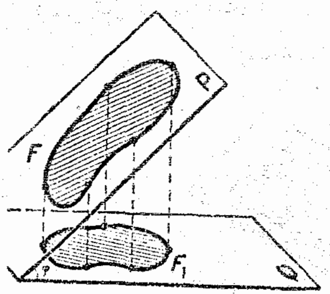
نتیجهٔ II . اگر دوخط l_1 و l_2 با مایل زوایای مساوی بسازند ، با تصویر مایل هم زوایای مساوی‌خواهند ساخت. اگر $\varphi_1=\varphi_2$ باشد، داریم :

$$\cos\beta_1=\frac{\cos\varphi_1}{\cos\alpha}=\frac{\cos\varphi_2}{\cos\alpha}=\cos\beta_2 \implies \beta_1=\beta_2$$

۴. اثبات قضیه . مساحت تصویرشکل F واقع درصفحهٔ P برصفحهٔ Q برابر است با حاصلضرب مساحت F درکسینوس زاویهٔ دوسطحی که‌صفحات P و Q باهم می‌سازند .

اثبات . F_1 را تصویر شکل F بر صفحهٔ Q فرض‌می‌کنیم (شکل ۲۳۱) و φ را زاویهٔ بین دوصفحهٔ P و Q ، باید ثابت‌کنیم :

$$(F_1 \text{ مساحت})=(F_2 \text{ مساحت})\cdot\cos\varphi \quad (۱)$$



ش ۲۳۱

اگر $\varphi=\frac{\pi}{2}$ باشد ، P بر Q عمودمی‌شود. در اینحالت $\cos\varphi=0$ خواهد بود وشکل F_1 به مجموعهٔ نقاطی از فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q تبدیل می‌شود وبنابراین :

$$(F_1 \text{ مساحت})=0$$

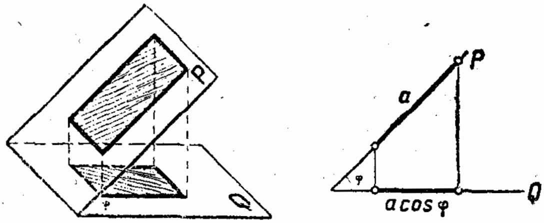
و در نتیجه رابطهٔ (۱) صادق است .

اگر $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ باشد ، ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که F مربع و یکی از اضلاع آن بافصل مشترك دوصفحهٔ P وQ موازی باشد.اگر a ضلع این‌مربع باشد، مساحت‌شکل F مساوی a^2 می‌شود. شکل F_1 مستطیلی می‌شود که اضلاع آن مساوی a و $a\cos\varphi$ است . بنابراین (شکل ۲۳۲) :

$$(F_1 \text{ مساحت})=a\cdot a\cos\varphi=a^2\cos\varphi=(F \text{ مساحت})\cdot\cos\varphi$$

حالا فرض می کنیم که F شکلی دلخواه (وبسته) باشد . روی‌صفحهٔ P

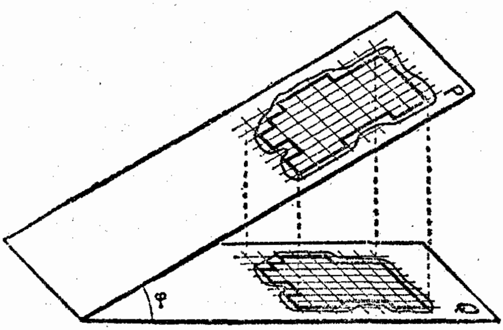
دو ردیف خط موازی در نظر می‌گیریم ، ردیف اول‌راموازی باخط l ، فصل



ش ۲۳۲

مشترك دو صفحهٔ P وQ ، وبفواصل a از یکدیگـر ، خطوط ردیف دوم را عمود بر l و باهمان فاصلهٔ a . باین ترتیب صفحهٔ P به مجموعهٔ بی‌نهـایت مربعهای مساوی با ضلع a تقسیم می‌شود . مجموعهٔ مربعهـائی‌که در داخل شکل قـرارگرفته‌اند ، چند ضلعی π را تشکیـل می‌دهند و روشن است که (طبق تعریف مساحت) :

$$(\text{مساحت } F) = \lim_{a\to 0} (\text{مساحت } \pi)$$



ش ۲۳۳

مربعهائی‌که تقسیمات صفحهٔ P را بوجود آورده‌اند، در تصویر روی صفحهٔ Q به مستطیلهائی با اضلاع مساوی a و $a\cos\varphi$ تبدیل می‌شوند (شکل ۲۳۳) . مجموعهٔ مستطیلهائی‌که درداخل شکل F_1 قرارگرفته‌اند، چندضلعی π_1 را بوجود می‌آورند که تصویر چند ضلعی π است و مساحت شکل F_1 حد مساحت چند ضلعی π_1 است :

$=[(\text{مساحت } \pi).\cos\varphi]$ حـد $=$ (مساحت π_1) حـد $=$ (مساحت F_1)

$= \cos\varphi .$ (مساحت π) حد $=$ (مساحت F) $. \cos\varphi$

۳. زوایای رأس یك کنج‌سه وجهی برابر است با a، b و c، مطلوبست زوایای دو وجهی این کنج .

حل . A ، B و C را متناظراً زوایای دو وجهی روبرو به a،b و c فرض می‌کنیم (شکل ۲۳۴) . L را نقطه‌ای واقع بر یال زاویهٔ A و برای سهولت کار $OL=1$ می‌گیریم . از نقطهٔ L صفحه‌ای عمود بر یال OA رسم می‌کنیم. زوایای b و c راحاده فرض می‌کنیم، دراینصورت از تقـاطع صفحه با یالهای کنج ، مثلث LMN بدست می‌آید که در آن $\widehat{NLM}=A$ است.

در مثلث LNM داریم :

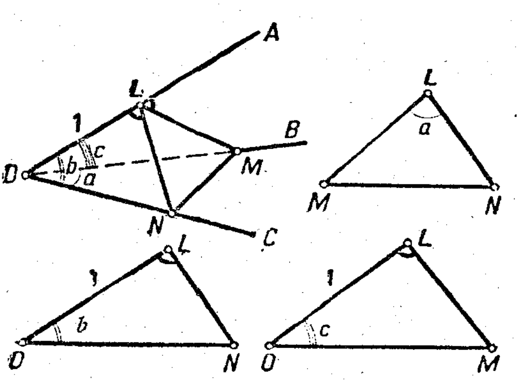
$$NM^2=LN^2+LM^2-2LN\cdot LM\cos A$$

و در مثلث OMN :

$$NM^2=ON^2+OM^2-2ON\cdot OM\cos a$$

با مساوی قراردادن‌دو مقداری که برای NM^2 بدست‌آوردیم، خواهیم‌داشت:

$$LN^2+LM^2-2LN\cdot LM\cos A=ON^2+$$
$$+OM^2-2ON\cdot OM\cos a$$



ش ۲۳۴

در نظر می‌گیریم که :

$$ON^{2}-LN^{2}=1 \;;\; OM^{2}-LM^{2}=1$$

تساوی بدست آمده‌را بصورت زیر می‌نویسیم(همهٔ جملات‌را به ۲ساده کردیم):

$$\cos A=\frac{ON}{LN}\cdot\frac{OM\cos a}{LM}-\frac{1}{LN\cdot LM}$$

و توجه می‌کنیم که : $NL=OM\sin b \;;\; ML=OM\sin c$

$$\frac{1}{LN}=\cot g\, b \;;\; \frac{1}{LM}=\cot g\, c \;;$$

بدست می‌آوریم : $\cos A=\frac{1}{\sin b\sin c}\cos a-\cot g\, b\cot g\, c$

یا : $$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} \qquad (1)$$

وقتی‌که b منفرجه و c حاده باشد ، صفحهٔ قاطع امتداد زاویهٔ c را قطع می‌کند . در این‌حالت داریم :

$$\widehat{NLM}=\pi-A \;;\; \widehat{NOL}=\pi-b \;;\; \widehat{NOM}=\pi-a$$

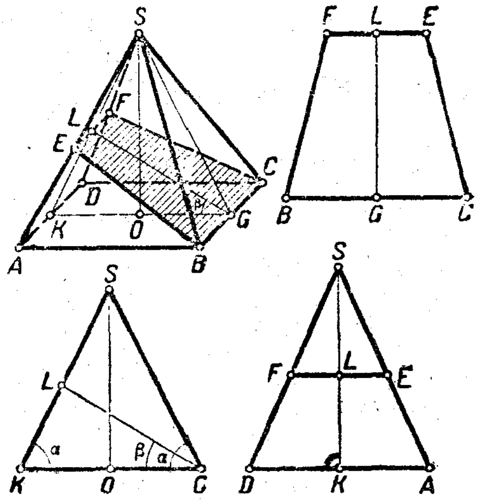
و بسادگی دیده می‌شود که رابطهٔ (۱) بازهم برقرار است .

بهمین ترتیب میتوان صحت رابطهٔ (۱) را برای وقتی‌که b حاده و c منفرجه یا هردو منفرجه باشند نیز ثابت کرد .

بحث حالتی را که یکی از زوایای b یا c قائمه باشند بعهده خواننده می‌گذاریم .

۴. در یك هرم مربع‌القاعدهٔ منتظم ، زاویهٔ دو وجهی مجاور قاعده مساوی α است ، از یال این زاویه صفحه‌ای گذرانده‌ایم که با قاعده زاویهٔ β ساخته است ، اگر ضلع قاعده برابر a باشد ، سطح مقطع را پیدا کنید .

حل . زاویهٔ مفروض β در شرط $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$ صدق‌می‌کند. SABCD را هرم مفروض را درنظر می‌گیریم (شکل ۲۳۵) . اگر $\beta<\alpha$ باشد، مقطع ذوزنقه متساوی‌الساقین BEFG است . صفحهٔ SGK را ازارتفاع SO هرم



ش ۲۳۵

عبور می‌دهیم ، بنحوی که بر یال BC عمود باشد ، پاره خط GL ارتفاع ذوزنقهٔ BEFG است . داریم :

$$\widehat{LKG}=\alpha \;;\; \widehat{LGK}=\beta \;;\; \widehat{KLG}=\pi-(\alpha+\beta)$$

از مثلث KLG بدست می‌آید :

$$LG=\frac{KG}{\sin(KLG)}\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

مثلثهای SAD و SFE متشابه‌اند، بنابراین :

$$\frac{EF}{AD}=\frac{SL}{SK} \Longrightarrow FE=\frac{AD(SK-KL)}{SK}$$

داریم : ۱) $AD=a$ ،

۲) $SK=\frac{a}{2\cos\alpha}$ (از مثلث SKO) ،

۳) $KL=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (از مثلث KLG).

و مساحت مورد جستجو برابر است با :

$$P=\frac{1}{2}LG(BC+EF)=\frac{1}{2}\left[BC+\frac{AD(SK-KL)}{SK}\right]LG;$$

که پس از قراردادن مقادیر آنها وساده کردن بدست می‌آید :

$$P=\frac{a^2 \sin^2\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

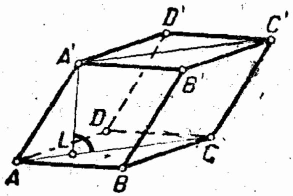
در حالتی که $\beta=0$ باشد ، ذوزنقهٔ مقطع برقاعده منطبق وسطح آن مساوی a^2 می‌شود ، همین نتیجه را از رابطهٔ (۱) هم می‌توان بدست آورد .

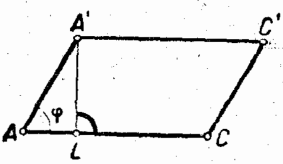
وقتی که $\alpha=\beta$ باشد، مقطع بر مثلث SAB منطبق می‌شود :

$$P=\frac{a^2}{4\cos\alpha}$$

که همین نتیجه را از رابطهٔ (۱) هم میتوانستیم بدست بیاوریم .

۵. وجوه یك متوازی‌السطوح از لوزیهای مساوی درست شده است ، مطلوبست حجم متوازی‌السطوح ، بشرطی که ضلع لوزی مساوی a و زاویهٔ حادهٔ آن مساوی α باشد . ضمناً میدانیم که سه زاویهٔ حادهٔ مسطحه در آن تشکیل یك کنج داده‌اند .





ش ۲۳۶

حل . شکل $ABCDA'B'C'D'$ را متوازی‌السطوح مفروض در نظر می گیریم. یکی از رئوسی راکه شامل سه زاویهٔ مسطحه مساوی است به A نشان می‌دهیم (شکل ۲۳۶) . خطوط AB و AD در صفحهٔ قاعده با مایل AA' زوایای مساوی می‌سازند بنا براین تصویر AA' نیمساز زاویهٔ BAD یعنی قطر قاعده خواهد بود (نتیجهٔ II ازمسئلهٔ ۱ صفحهٔ ۵۴۹ را به‌بینید) واگر φ زاویهٔ مایل AA' با صفحهٔ قاعده باشد ، داریم :

$$\cos\varphi=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'L$ ، مقدار h ، ارتفاع متوازی‌السطوح را پیدا می‌کنیم :

$$h=a\sin\varphi=a\sqrt{۱-\cos^{۲}\varphi}=a\sqrt{۱-\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\right)^{۲}}=$$

$$=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\frac{۳\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

بنابراین :

$$V=a^{۲}\sin\alpha\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\frac{۳\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}=۲a^{۳}\sin\frac{\alpha}{۲}\sqrt{\sin\frac{۳\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}\ ,$$

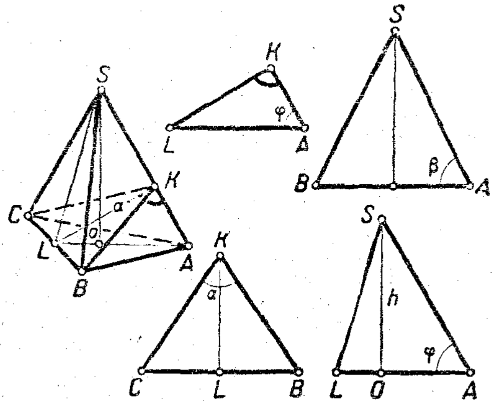
۰۶ هرم مثلث‌القاعده‌ای داریم که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاعی بضلع a است ، زوایای دو وجهی بین وجوه جانبی مساوی α است ، حجم و سطح جانبی هرم را معین کنید .

حل . (شکل ۲۳۷) .صفحهٔ CKB راعمود بر یال SA رسم‌می‌کنیم، دراینصورت زاویهٔ $CKB=\alpha$ خواهد بود. KL را ارتفاع مثلث CKB می‌گیریم، در مثلث قائم‌الزاویه LKB داریم:

$$KL=\frac{a}{۲}\cot g\frac{\alpha}{۲}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ AKL زاویهٔ φ بین یال SA وصفحهٔ قاعده را معین می‌کنیم :

$$\sin\varphi=\frac{KL}{LA}=\frac{\frac{a}{۲}\cot g\frac{\alpha}{۲}}{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cot g\frac{\alpha}{۲}$$



ش ۲۳۷

ضلع قاعدهٔ $\mathbf{AB}$ با تصویر یال $\mathbf{AS}$ زاویهٔ $\frac{\pi}{٦}$ را می‌سازد ، بنابراین‌میتوان زاویهٔ β بین یالهای $\mathbf{SA}$ و $\mathbf{AB}$ را بدست آورد (مسئلهٔ ۱ را به‌بینید) :

$$\cos\beta=\cos\varphi\cos\frac{\pi}{٦}=\frac{\sqrt{٣}\cos\varphi}{٢}$$

با دردست داشتن زاویهٔ β و ضلع $\mathbf{a}$ از قاعده می‌توان سطح جانبی هرم را محاسبه‌کرد :

$$\mathbf{S}=\frac{٣}{٢}\mathbf{a}\frac{\mathbf{a}}{٢}tg\,\beta=\frac{٣}{٤}\mathbf{a}^{٢}tg\,\beta$$

از مثلث $\mathbf{OSA}$ ارتفاع هرم را پیدا می‌کنیم :

$$\mathbf{h}=\mathbf{OS}=\mathbf{OA}\,tg\,\varphi=\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{٣}}tg\,\varphi$$

و بالاخره حجم آنرا بدست می‌آوریم :

$$\mathbf{V}=\frac{١}{٣}\mathbf{h}(\text{مساحت }\mathbf{ABC})=\frac{\mathbf{a}^{٣}}{١٢}tg\,\varphi.$$

برای رسیدن به نتیجهٔ‌کامل باید درروابطی‌که بدست آورده‌ایم زوایای‌کمکی φ و β را حذف‌کنیم ، داریم :

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{3}\cot^{2}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3-\cot^{2}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\cot^{2}\frac{\pi}{6}-\cot^{2}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)};$$

(علامت قدر مطلق را حذف کردیم ، زیرا $\pi > \alpha > 0$ و $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ می باشد).

$$tg\,\beta = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^{2}\varphi}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}\cot^{2}\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

و بنابراین روابط سطح جانبی وحجم هرم چنین می‌شوند :

$$S = \frac{3a^{2}}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}};$$

$$V = \frac{a^{3}\cos\frac{\alpha}{2}}{24\sin^{2}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

ازاین روابط نتیجه می‌شود که S و V وقتی حقیقی هستند که $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right) > 0$ باشد.

تصور هندسی شکل نتیجه می‌دهد که α زاویه‌ای است مثبت و کوچکتر از π ، با توجه باین نکته ، از نامساوی $\sin\left(\frac{\alpha}{۲}-\frac{\pi}{۶}\right)>۰$ بدست می‌آید :

$$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi$$

وقتی که $\alpha\to\frac{\pi}{۳}$ میل کند، هرم بیك سطح منشوری بدل می‌شود وداریم:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{۳}} S=+\infty \;;\; \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{۳}} V=+\infty$$

وقتی که $\alpha\to\pi$ ، هرم بیك شکل‌مسطح‌بدل‌می‌شود (منطبق برقاعدهٔ هرم). در این حالت حدی داریم :

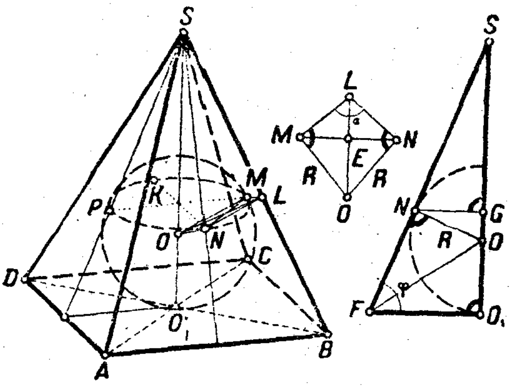
$$\lim_{\alpha\to\pi} S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \;;\; \lim_{\alpha\to\pi} V=۰$$

۷. در هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی‌کره‌ای بشعاع R محاط‌کرده‌ایم . اگر زاویهٔ دو وجهی بین وجوه‌جانبی آن مساوی α باشد ، سطح جانبی‌هرم را معین‌کنید .

حل . O را مرکز کرهٔ محاطی‌هرم $SABCD$ و $KPMN$ رانقاط تماس‌کره با وجوه هرم فرض‌کنید (شکل ۲۳۸) . صفحهٔ ONM ، که بردو وجه هرم عمود است ، در تقاطع با این وجود زاویهٔ NLM را می‌دهد که مساوی α است ، در چهار ضلعی $OMLN$ زوایای M و N قائمه‌اند ، بنابراین $\widehat{NOM}=\pi-\alpha$ و خط OL نیمساز زاویهٔ α می‌شود ، از مثلث OEN بدست می‌آید :

$$NM=۲NE=۲R\sin\left(\frac{NOM}{۲}\right)=۲R\cos\frac{\alpha}{۲}$$

صفحهٔ $SFO_۱$ را رسم می‌کنیم ، که درآن F وسط ضلع AB و $O_۱$ مرکز



ش ۲۳۸

قاعده است ، از مثلث قائم‌الزاویهٔ ONG بدست می‌آید : $NG = R\sin\varphi$

پاره خط NG نصف‌قطر مربعی است که رئوس آن، نقاط M، N، P و K، نقاط تماس کره با وجوه جانبی ، است بنابراین :

$$NM = R\sqrt{2}\sin\varphi$$

دو مقداری را که برای NM بدست آوردیم با هم مساوی قرار می‌دهیم ، چنین خواهیم داشت :

$$2R\cos\frac{\alpha}{2} = R\sqrt{2}\sin\varphi \implies \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

از مثلث FOO_1 داریم :

$$FO_1 = R\cot g\frac{\varphi}{2}$$

بنابراین در قاعدهٔ هرم مربعی قرار دارد که ضلع آن چنین است :

$$a = 2FO_1 = 2R\cot g\frac{\varphi}{2}$$

تصویر سطح جانبی هرم بر قاعده مساوی خود قاعده می‌شود وچون هر چهار وجه جانبی با قاعده زاویه‌ای مساوی φ می‌سازند ، بنابراین (مثال ۲ صفحهٔ ۵۴۹ را به‌بینید) داریم :

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{a^{۲}}{\cos\varphi}=\frac{۴R^{۲}\cot g^{۲}\frac{\varphi}{۲}}{\cos\varphi}$$

زاویهٔ کمکی φ را حذف می‌کنیم :

$$\cos\varphi=\sqrt{۱-\sin^{۲}\varphi}=\sqrt{۱-۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\sqrt{-\cos\alpha}\ ;$$

$$\cot g^{۲}\frac{\varphi}{۲}=\frac{\cos^{۲}\frac{\varphi}{۲}}{\sin^{۲}\frac{\varphi}{۲}}=\frac{۱+\cos\varphi}{۱-\cos\varphi}=\frac{۱+\sqrt{-\cos\alpha}}{۱-\sqrt{-\cos\alpha}}$$

بنا براین :

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۴R^{۲}(۱+\sqrt{-\cos\alpha})}{(۱-\sqrt{-\cos\alpha})\sqrt{-\cos\alpha}}$$

مقدار سطح جانبی وقتی حقیقی است که $\cos\alpha<۰$ باشد و با توجه باینکه $۰<\alpha<\pi$ است، باید داشته باشیم:

$$\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$$

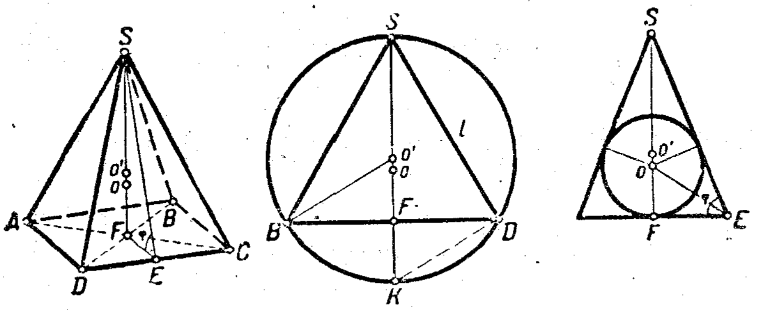
وقتی که $\alpha\to\frac{\pi}{۲}$ هرم به سطح‌منشوری تبدیل می‌شود وداریم:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{۲}} S_{\text{جانبی}}=+\infty$$

و وقتی که $\alpha\to\pi$ هرم‌به دوصفحهٔ موازی تبدیل می‌شود(با مفروض بودنR):

$$\lim_{\alpha\to\pi} S_{\text{جانبی}}=+\infty$$

۸. اگر نسبت شعاع کرهٔ محیطی یك هرم مربع‌القاعدهٔ منتظم برشعاع کرهٔ محاطی آن مساوی n باشد ، زاویهٔ دو وجهی بین وجه جانبی وقاعدهٔ هرم را پیدا کنید (شکل ۲۳۹) .



ش ۲۳۹

حل ۰ فرض می‌کنیم φ زاویهٔ مجهول ، R و r بترتیب شعاع کره‌های محیطی و محاطی ، h ارتفاع‌هرم ، l یال‌جانبی ، a ضلع قاعده وOمرکز کرهٔ محاطی باشد .

از مثلث قائم‌الزاویهٔ SKD بدست می‌آید :

$$SD^2 = SK \cdot SF \quad \text{یا} \quad l^2 = 2Rh \implies R = \frac{l^2}{2h} \qquad (1)$$

از مثلث SEF بدست می‌آید :

$$SF = EF\,tg\varphi \quad \text{یا} \quad h = \frac{a}{2}tg\varphi$$

و از مثلث SDF :

$$SD^2 = DF^2 + SF^2 \quad \text{یا} \quad l^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$$

که اگر در تساوی $R = \frac{l^2}{2h}$ قرار دهیم، می‌شود :

$$R = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}tg^2\varphi}{a\,tg\varphi} = \frac{a}{2}cotg\varphi + \frac{a}{4}tg\varphi$$

در مثلث OFE می‌توان نوشت :

$$OF = EF\,tg\frac{\varphi}{2} \quad \text{یا} \quad r = \frac{a}{2}tg\frac{\varphi}{2}$$

با شرط : $R=nr$ یا $cotg\varphi+\frac{۱}{۲}tg\varphi=n\,tg\frac{\varphi}{۲}$

که اگر از تبدیل عمومی $t=tg\frac{\varphi}{۲}$ استفاده کنیم ، به معادلهٔ دو مجذوری زیر می‌رسیم :

$$(۲n+۱)t^۴-۲nt^۲+۱=۰$$

با توجه به مفهوم هندسی مسئله داریم : $۰<\varphi<\frac{\pi}{۲}$ و ازآنجا $۰<t<۱$ ، مقادیر پارامتر n را چنان معین می‌کنیم که بازاء آنها معادلهٔ درجه دوم :

$$(۲n+۱)z^۲-۲nz+۱=۰ \qquad (۲)$$

جوابهائی (ویا لااقل یك‌جواب) در فاصله (۱ و ۰) داشته باشد ، ریشه‌های معادلهٔ (۲) وقتی حقیقی هستند که داشته باشیم :

$$n^۲-(۲n+۱)\geqslant ۰ \implies n^۲-۲n-۱\geqslant ۰$$

و با توجه باینکه $n>۰$ است ، خواهیم داشت :

$$۱+\sqrt{۲}\leqslant n<+\infty$$

با این‌شرط هردو ریشهٔ معادله (۲) مثبت هستند، اگر درسمت‌چپ معادلهٔ(۲) $z=۱$ قرار دهیم ، نتیجه مثبت می‌شود : $f(۱)=۲>۰$. بنابراین عدد۱ در خارج فاصلهٔ دو ریشه قرار دارد ، یعنی :

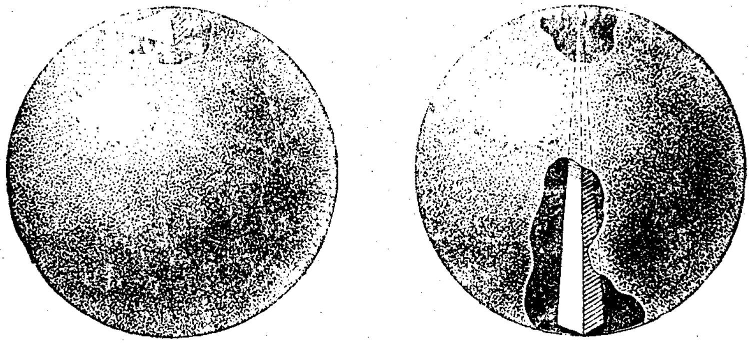
یا : $۱<z_۱<z_۲$ و یا : $۰<z_۱<z_۲<۱$

و چون بازاء $n>۰$ نامساوی $\frac{n}{۲n+۱}<۱$ همیشه برقرار است ، بنابراین نامساوی $۰<z_۱<z_۲<۱$ برقرار خواهد بود . باین ترتیب بازاء $n<۱+\sqrt{۲}$ مسئلهٔجواب ندارد وبازاء $n>۱+\sqrt{۲}$ مسئله‌دوجواب‌دارد:

$$\varphi_{۱،۲}=۲arctg\sqrt{\frac{n\pm\sqrt{n^۲-۲n-۱}}{۲n+۱}}$$

و بازاء $n=۱+\sqrt{۲}$ مسئله تنها یك‌جواب‌دارد :

$$\varphi = ۲\,\mathrm{arc}tg\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$$



ش ۲۴۰

بازاء این مقدار φ نسبت شعاعها حداقل مقدار راخواهد داشت .

بازاء $n \to +\infty$ (R را مفروض می‌گیریم) حالت حدی خواهیم داشت (شکل ۲۴۰) :

$$\text{حد}\ \varphi_۱ = ۰ \quad ; \quad \text{حد}\ \varphi_۲ = \frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین هرم به یك نقطه ویك پاره‌خط تبدیل می‌شود .

٦۵ . مسائل مربوط به نقشه‌برداری

روشهای مثلثاتی‌موارد استعمال وسیعی‌درمسائل مختلف عملی‌مربوط به اندازه‌گیریهای زمینی دارد ، مثلا محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو نقطه از سطح زمین (وقتی‌که نتوان این فاصله را بطور مستقیم بدست آورد) ، محاسبهٔ ارتفاع یك بلندی (کوه ، ساختمان وغیره) ، تنظیم نقشه‌ها و غیره .

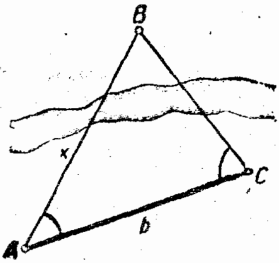
بحث دربارهٔ وسائل لازم برای اندازه‌گیری ، قواعد استفاده از آنها ،

محاسبهٔ خطاها، استفاده ازجداول مساحی وطرق مختلف عملی برای اندازه گیری، مربوط به دورهٔ مساحی (ژئودزی) است . در اینجا مسائل ساده‌ای ازمساحی را با توجه به محتوی ریاضی آنها مورد مطالعه قرار می‌دهیم . ما فرض را براین می گیریم که بتوان اندازه گیری‌را به قطعهٔ کوچکی از زمین منجر کرد بطوریکه بتوان این‌قطعه را مسطح در نظر گرفت وازانحنای آن‌چشم پوشید.

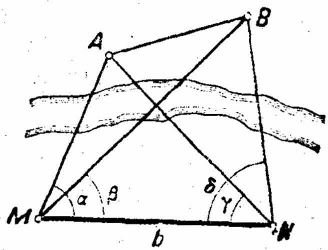
مسئلهٔ ۱ . مطلوبست فاصلهٔ نقطهٔ قابل دسترس A تا نقطهٔ غیر قابل دسترس B که از A دیده می‌شود .

توضیح . قابل دسترس بودن نقطهٔ A باین معنی‌است که ناظرمی‌تواند با وسائل اندازه گیری خود در آنجا حاضرشود . علاوه براین فرض می کنیم که نه فقط نقطهٔ A ، بلکه قطعه زمینی که شامل نقطهٔ A است قابل دسترس باشد . مثلا نقطهٔ C را نقطه‌ای می گیریم که در منطقه دید نقطهٔ A باشد و بتوان فاصلهٔ AC را مستقیماً اندازه گرفت . نقطهٔ B در دسترس نیست، یعنی از نقطهٔ A بوسیلهٔ مانعی جدا شده است و نمیتوان فاصلهٔ AB را مستقیماً اندازه گرفت (شکل ۲۴۱) .

حل . نقطهٔ C را چنان انتخاب می کنیم که در نقطهٔ دید A باشد . فاصلهٔ $AC=b$ و زوایای BAC و BCA را اندازه می گیریم ، مسئله



ش ۲۴۱



ش ۲۴۲

منجر به حل مثلثی می‌شود که یك ضلع وزوایای مجاورآن معلوم باشد :

$$\frac{x}{\sin C}=\frac{b}{\sin B} \Longrightarrow x=\frac{b.\sin C}{\sin(A+C)}$$

مسئلهٔ ۴ . مطلوبست فاصلهٔ بین دو نقطهٔ غیر قابل دسترس ، بشرطی که در منطقهٔ دید ما واقع باشند (شکل ۲٤۲) .

حل . در قطعهٔ قابل دسترس، پایهٔ $MN=b$ را انتخاب می کنیم . پایه وزوایای α ، β ، γ و δ را بین پایه و امتدادهائی که به A و B میرود اندازه می گیریم . برای محاسبهٔ فاصلهٔ x ، ابتدا فواصل MA و MB را محاسبه می کنیم (مسئلهٔ قبل) :

$$MA=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} \quad , \quad MB=\frac{b\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$$

با در دست داشتن اضلاع MA و MB از مثلث MAB و زاویهٔ بین آنها $\alpha-\beta$ ، می‌توان ضلع سوم $x=AB$ را محاسبه کرد . می‌توان مثلا از رابطهٔ زیر استفاده کرد :

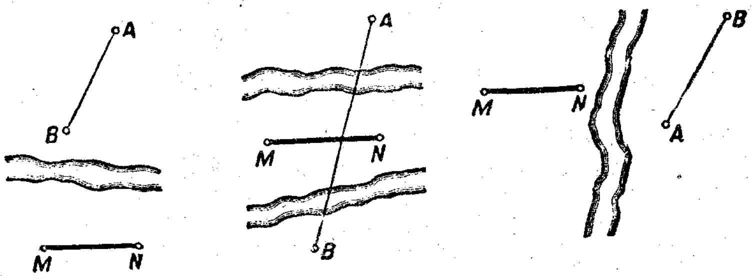
$$x^2=MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos(\alpha-\beta)$$

تبصره. برای محاسبهٔ x ازمثلث NAB هم می‌توانستیم استفاده کنیم:

$$x=NA^2+NB^2-2NA\cdot NB\cos(\delta-\gamma) .$$

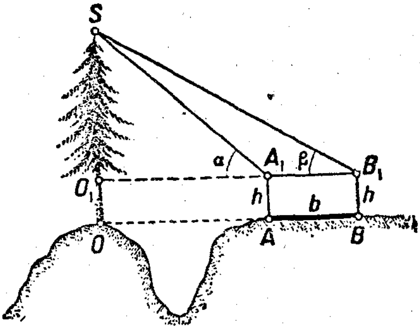
محاسبهٔ فاصلهٔ مجهول از دو راه مختلف ، یکی از طرق قابل اعتماد نظارت جواب است .

مطالعهٔ حالتهای مختلف استقرارپایه و پاره‌خط AB را بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده می گذاریم (شکل ۲۴۳) .



ش ۲۴۳

مسئلهٔ ۳ . مطلوبست محاسبهٔ ارتفاع یك بلندی ، بشرطی‌که به پای‌آن دسترسی نداشته باشیم .

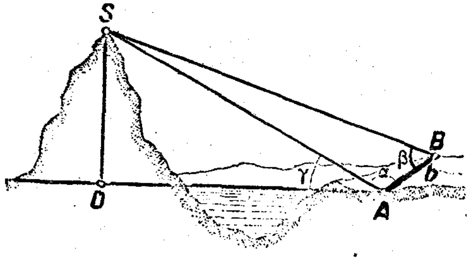


ش ۲۴۴

حل . اگر بتوان پایهٔ افقی AB را جستجو کرد که از دو انتهای آن رأس S قابل رؤیت باشد، می‌توان بسادگی ارتفاع OS را محاسبه کرد (شکل ۲۴۴) . شرط اینست که پایهٔ AB و بلندی OS بر یك صفحهٔ قائم واقع باشند .

فرض کنید h، ارتفاع وسیلهٔ اندازه‌گیری ما باشد . زوایای α و β را محاسبه می‌کنیم . ازمثلث SA_1B_1 بدست می‌آید :

$$A_1S=\frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \text{ و } OS=h+A_1S\sin\alpha$$



ش ۲۴۵

نمونه‌ای را در نظر می‌گیریم که پایه بر سطح‌افقی قرار نگرفته باشد : میخواهیم OS ارتفاع کوهی‌را اندازه بگیریم . نقطهٔ قابل دسترس A هم سطح دریاست ، ولی پایهٔ AB افقی نیست (شکل ۲۴۵).

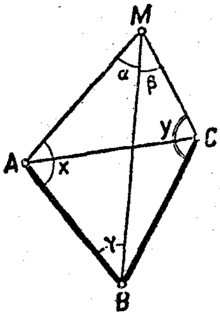
پایهٔ $AB=b$ وزوایای $\widehat{SAB}=\alpha$ و $\widehat{SBA}=\beta$ و $\widehat{SAD}=\gamma$

را اندازه می‌گیریم. ازمثلث SAB بدست می‌آید: $AS=\frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ،

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OSA بدست می‌آید :

$$x = OS = AS\sin\gamma = \frac{b\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$$

مسئلهٔ ۴ . (مسئلهٔ «پاته‌نوت») . **سه نقطهٔ A ، B و C معلوم‌اند وروی صفحه رسم شده‌اند . از نقطه‌ای مانند M پاره‌خطهای AB و BC متناظراً به زاویه‌های α و β دیده می‌شوند (شکل ۲۴٦). نقطهٔ M راروی صفحه رسم کنید.**



ش ۲۴۶

فرض می‌شود که نقاط A ، B و A روی سطح افقی زمین واقع باشند ، وتمام اجزاء مثلث پایهٔ ABC با دقت دلخواه اندازه‌گیری شده باشند . حل مسئلهٔ «پاته‌نوت» اجازه می‌دهد که جای نقطهٔ M را که از آنجا می‌توان مثلث پایه رادید ودر صفحهٔ همان مثلث قرار دارد ، معلوم کرد. برای رسم نقطهٔ M کافی است زوایای $\widehat{MAB}=x$ و $\widehat{BCM}=y$ را بدانیم . مسئلهٔ « پاته‌نوت » را می‌توان بطریق هندسی و باین شکل بیان کرد : از چهار ضلعی ABCM ، اضلاع $AB=a$ و $BC=b$ و زاویهٔ بین آنها $\widehat{ABC}=\gamma$ داده شده ، علاوه برآن زوایائی که قطر MB با اضلاع MA و MC می‌سازند نیز معلوم است : $\widehat{AMB}=\alpha$ و $\widehat{BMC}=\beta$. مطلوبست زوایای x و y مربوط به دو رأس A و C .

حل . از مثلثهای ABM و BMC بدست می‌آید :

$$BM = a\frac{\sin x}{\sin\alpha} = b\frac{\sin y}{\sin\beta}$$

مجموع زوایای یك چهار ضلعی برابر ۳۶۰ درجه است ، از آنجا :

$$x + y = ۳۶۰^\circ - (\alpha+\beta+\gamma) \qquad (۱)$$

وبرای محاسبهٔ زوایای x و y دو معادلهٔ (۱) و (۲) راخواهیم داشت :

$$\frac{\sin \mathbf{x}}{\sin \mathbf{y}}=\frac{\mathbf{b}\sin\alpha}{\mathbf{a}\sin\beta} \qquad (۲)$$

اگر فرض کنیم :

$$tg\varphi=\frac{\mathbf{b}\sin\alpha}{\mathbf{a}\sin\beta}\ ;\ \varphi=\mathbf{arc}tg\frac{\mathbf{b}\sin\alpha}{\mathbf{a}\sin\beta}$$

و در معادلهٔ (۲) قرار دهیم ، پس از تبدیل چنین می‌شود :

$$\frac{\sin\mathbf{x}-\sin\mathbf{y}}{\sin\mathbf{x}+\sin\mathbf{y}}=\frac{tg\varphi-۱}{tg\varphi+۱}\Longrightarrow\frac{tg\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{۲}}{tg\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{۲}}=tg(\varphi-۴۵^\circ)$$

و ازآنجا: $$tg\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{۲}=tg(\varphi-۴۵^\circ)tg\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{۲} \qquad (۳)$$

از معادلهٔ اخیر و با توجه به‌معادلهٔ (۱) بدست می‌آید :

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=۲\mathbf{arc}tg\left[tg(۴۵^\circ-\varphi)tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۲}\right]$$

این معادله ومعادلهٔ (۱) مجموعاً دستگاه خطی برای محاسبهٔ x وy هستند .

در حالتی‌که $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{۲}=۹۰^\circ$ باشد ، نمی‌توان به معادلهٔ (۳) رسید .

در این حالت خاص داریم :

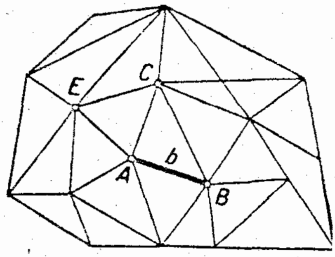
$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=۱۸۰^\circ\ ;\ \alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$$

یعنی می‌توان دایره‌ای از چهار رأس چهار ضلعی عبور داد . اگر R شعاع دایرهٔ محیطی چهار ضلعی باشد ، داریم :

$$\mathbf{BM}=۲\mathbf{R}\sin\mathbf{x}=۲\mathbf{R}\sin\mathbf{y}\ ;\ \mathbf{a}=۲\mathbf{R}\sin\alpha\ ;\ \mathbf{b}=۲\mathbf{R}\sin\beta$$

در این‌حالت معادلهٔ (۲) نتیجه‌ای ازمعادلهٔ (۱) است ومعادله دارای‌بی‌نهایت جواب است ، یعنی M می‌تواند بر هر نقطه از محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرارگیرد .

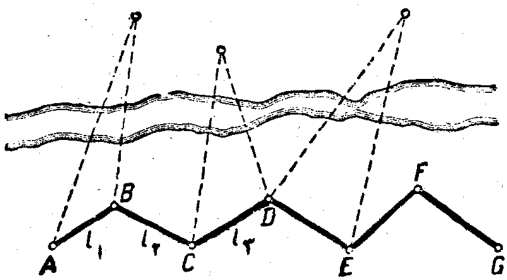
مفهوم مثلث بندی . روش مثلث بندی باین معناست که **قطعه زمینی را که باید روی آن اندازه‌گیری خود را انجام دهیم به مثلثهائی تقسیم کنیم** ، بنحوی که هر نقطه از قطعه زمین متعلق بیکی از مثلثها باشد وهیچ دومثلثی نقاط داخلی مشترك نداشته باشند، مثلثها می‌توانند رأس و یا ضلع مشترك داشته باشند . در شکل ۲۴۷ یك قطعه بشکل چند ضلعی به مثلثهائی تقسیم شده است ، این تقسیم را



ش ۲۴۷

شبکهٔ مثلثاتی و رئوس مثلثها را **نقاط مثلثاتی** گویند . برای نقشه برداری ازیك قطعه زمین ممکن است از هر نقطهٔ آن نتوان تمام دیگر نقاط را دید ولی لازم است که از هر نقطه بتوان لااقل چهار نقطهٔ مجاور را رؤیت نمود .ضلع AB ، ضلع یکی از مثلثها ، را بعنوان پایه انتخاب وآنرا مستقیماً اندازه‌گیری می کنیم ، باکمك وسائل اندازه گیری می‌توان زوایای مختلف مثلثهای شبکه رااندازه گیری کرد. باین ترتیب ازمثلث ABC زوایا وپایهٔ $AB = b$ مفروض است ومی‌توان اضلاع BC و AC را محاسبه کرد .آنوقت در مثلث ACE زوایا و ضلع AC معلوم است ومی‌توان اضلاع AE و CE را محاسبه کرد و غیره. اضلاع مثلثهای شبکهٔ مثلثاتی میتوانند بعنوان پایه‌هائی برای اندازه گیری قطعات کوچك مورد استفاده قرارگیرند ، درصورت احتیاج می‌توان مثلثهای شبکهٔ مثلثاتی را به مثلثهای کوچکتری تقسیم کرد و شبکهٔ مثلثاتی کوچکتری ساخت .

میتوان بعنوان پایهٔ مساحی، از یك خط شکسته استفاده کرد . فرض کنیم فواصل بین نقاط A ، B ، C ، D، E ، F ، G ، ...اندازه گیری شده باشند ، دراینصورت پاره‌خطهای خط شکستهٔ ...ABC می‌توانندبعنوان پایه‌های اندازه گیری روی زمین بکار روند ، ادامهٔ خط شکستهٔ ...ABC را روی زمین **مسیراصلی** نامند (شکل ۲۴۸) .



ش ۲۴۸

برای طرح نقشه در مساحی ، از روش مختصات هم بطور وسیعی استفاده می‌کنند .

مسئلهٔ ساده‌ای را درنظر می‌گیریم :

اگر مختصات ($x_۰$ و $y_۰$) نقطهٔ مبداء $A_۰$ ، $l_۱$ طول پاره‌خط $A_۰A_۱$ و α زاویه‌ای که این پاره‌خط با محور طول می‌سازد ، معلوم باشد ، می‌توان مختصات انتهای پاره خط $A_۰A_۱$ را ازروابط زیر بدست آورد :

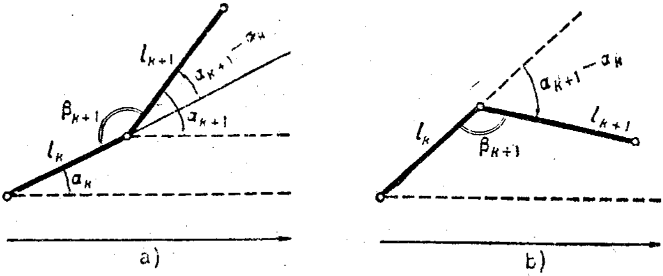
$$x_۱ = x_۰ + l_۱ \cos\alpha_۱ \ ; \ \ y_۱ = y_۰ + l_۱ \sin\alpha_۱$$

اگر برای خط شکستهٔ $A_۰A_۱ \ldots A_n$ طول پاره خطهای $l_۱$ ، $l_۲$ ،... ، l_n و زوایای $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، ... ، α_n ، که این پاره خطها با محور طول می‌سازند ، ومختصات ($x_۰$ و $y_۰$) مبداء $A_۰$ معلوم باشد ، مختصات رئوس متناظراً چنین خواهند بود :

$$x_۱ = x_۰ + l_۱ \cos\alpha_۱ \ ; \qquad y_۱ = y_۰ + l_۱ \sin\alpha_۱ \ ;$$
$$x_۲ = x_۱ + l_۲ \cos\alpha_۲ \ ; \qquad y_۲ = y_۱ + l_۲ \sin\alpha_۲ \ ,$$
$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \qquad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$
$$x_n = x_{n-۱} + l_n \cos\alpha_n \ ; \qquad y_n = y_{n-۱} + l_n \sin\alpha_n \ ;$$

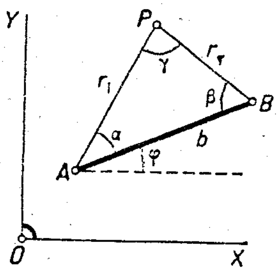
اگر با وسائل اندازه‌گیری زاویه ، زاویهٔ $\beta_{k+۱}$ ، بین $l_{k+۱}$ و l_k ، را اندازه بگیریم ، بسادگی دیده می‌شود (شکل ۲۴۹ ، a و b) :

$$\alpha_{k+۱} - \alpha_k = \beta_{k+۱} \pm ۱۸۰^\circ \implies \alpha_{k+۱} = \alpha_k + \beta_{k+۱} \pm ۱۸۰^\circ$$



ش ۲۴۹

مسئله ـ مختصات $A(x_a$ و $y_a)$ و $B(x_b$ و $y_b)$ دو انتهای پایه معلوم است، زاویه‌ای که AB باخط ماربر نقطهٔ نشان دار p می‌سازد نیز اندازه گرفته شده (شکل ۲۵۰). مطلوبست مختصات $(x$ و $y)$ این نقطه.



ش ۲۵۰

حل ـ زاویه‌ای راکه پایهٔ AB با محور طول می‌سازد φ فرض می کنیم وزاویه‌ای راکه پاره‌خط AP بامحور طول می‌سازد بدست می‌آوریم (باتوجه به‌جای مفروض نقطهٔ P)

$$\widehat{(AP \text{ و } x)} = \varphi + \alpha$$

داریم:

$$\begin{cases} x = x_a + r_1 \cos(\varphi+\alpha) = x_a + r_1(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)\ ; \\ y = y_a + r_1 \sin(\varphi+\alpha) = y_a + r_1(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)\ ; \end{cases} \qquad (1)$$

از مثلث ABP بدست می‌آید:

$$\frac{r_1}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ ;$$

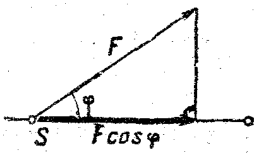
که اگر در رابطهٔ (۱) قراردهیم، پس ازساده کردن، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = x_a + \dfrac{(x_b - x_a)\cot g\,\alpha - (y_b - y_a)}{\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta} \\ y = y_a + \dfrac{(x_b - x_a) + (y_b - y_a)\cot g\,\alpha}{\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta} \end{cases}$$

۶۷ . کاربرد مثلثات در فیزیك ، مکانیك و صنعت

مثلثات علاوه بر آنکه مورد استعمال عملی فـراوانی دارد ، در علوم دقیقه‌ای هم‌که ناچار به‌استفاده از ریاضیات‌هستند، بکار می‌رود . دراین‌مورد از نظرکاربرد ، هم محاسبهٔ اجزاء اشکال هندسی و هم مطالعهٔ توابع مثلثاتی اهمیت جدی واساسی‌دارند .در اینجا نمونه‌هائی ازکاربرد مثلثات‌رامی‌آوریم.

I . برای تجزیهٔ نیرو (یاکمیت برداری دیگری) به‌دو مؤلفه (یاسه مؤلفه در فضا) که امتداد های عمود برهم داشته باشند ، باید مقدار تصویـر نیرو را برامتدادهای مفروض‌محاسبه‌کرد . فرض‌کنید که تحت‌نیروی‌ثابتF ، جسمی حـرکت مستقیم‌الخط داشته باشد (بعنوان مثال می‌توان‌حرکت جسم راروی سطح شیب‌دار در نظر گرفت) . اگرنیروی وارد برجسم باخطی‌که جسم درامتداد آن حرکت می‌کند ، زاویهٔ φ بسازد ، برای محاسبهٔ‌کار باید تصویر نیروی F را برخط l پیداکرد (شکل ۲۵۱) :



ش ۲۵۱

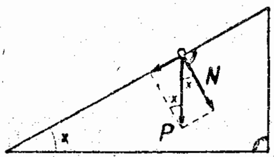
$$(\text{تصویر } F \text{ روی } l) = F\cdot\cos\varphi$$

و اگر طول راهی‌که جسم متحرك روی‌خط l طی‌کرده است ، مساوی s باشد کار انجام شده بارابطهٔ زیر بیان می‌شود :

$$A = |F| s \cos\varphi$$

مسئله . جسمی روی یك‌سطح شیب‌دار تحت‌تأثیر نیروی ثقل‌حرکت می‌کند وسرعت آن $\frac{1}{n}$ سرعت‌جسم درسقوط‌آزاد است . اگرضریب‌اصطکاك را k فرض‌کنیم ، زاویهٔ x بین‌سطح شیب‌دار و صفحهٔ افق را پیداکنید.

حل . P یعنی وزن جسم را به دومؤلفه عمود برهم تجـزیه‌می‌کنیم ، بطوریکه یکی از آنها $N = P\cos x$ بـر امتداد سطح شیب دارعمود بـاشد (شکل ۲۵۲) . مؤلفهٔ دوم در امتداد سطح شیب‌دارقرارمی‌گیردوبرابراست با $P\sin\alpha$. نیروی اصطـکاك f هم متـناسب با مؤلفهٔ قائم است :



ش ۲۵۲

$$f = kP\cos x$$

حرکت روی سطح شیب‌دارتحت اثرنیروئی‌مساوی $P\sin x - kP\cos x$ انجام می‌گیرد وسرعت آن برابر است با :

$$\frac{P\sin x - kP\cos x}{m} = g(\sin x - k\cos x) \;;$$

که در آن m جرم‌جسم و g نیروی ثقل است . باشرط :

$$g(\sin x - k\cos x) = \frac{1}{n} g;$$

معادلهٔ زیر را برای محاسبهٔ x خواهیم داشت :

$$\sin x - k\cos x = \frac{1}{n}$$

زاویهٔ کمکی زیررا در نظر می گیریم :

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

دراینصورت معادلهٔ فوق بصورت زیر درمی‌آید :

$$\sin(x-\alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \qquad (1)$$

ضمناً با توجه به‌مفهوم مسئله شرایط زیررا هم‌داریم :

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ و } 0<x<\frac{\pi}{2} \; ; \; n>1 \; ; \; 0<k<1$$

معادلهٔ (۱) تنها وقتی دارای جواب است که داشته باشیم :

$$\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$$

و این شرط هم برقرار است زیرا $n>1$ است . باین‌ترتیب وبا توجه‌باینکه $-\frac{\pi}{2}<x-\alpha<\frac{\pi}{2}$ است، خواهیم‌داشت :

$$x-\alpha=\arcsin\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \Longrightarrow x=\alpha+\arcsin\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$$

ازشرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آوریم:

$$\alpha+\arcsin\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}<\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha<\arccos\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$$

و یا : $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}<\arccos\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$ و از آنجا :

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}>\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$$

و این شرط هم برقرار است زیرا $n>1$ می‌باشد .

باین ترتیب داریم :

$$x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}+\arcsin\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}=$$

$$=\arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{n^2(1+k^2)-1}}{n\sqrt{1+k^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}\right)=\arcsin\left(\frac{k\sqrt{n^2k^2+n^2-1}+1}{n(1+k^2)}\right)$$

II . مثلثات بطور وسیعی برای حل مسائل مربوط به مبحث نور هم بکار می‌رود . برای روشن‌شدن مطلب به‌مسئلهٔ زیر توجه بفرمائید .

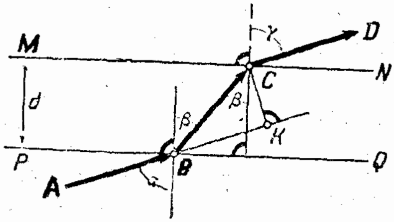
مسئله . شعاع نور از تیغهٔ شیشه‌ای متوازی‌السطوح شکلی عبورکرده است مسیر شعاع نور را پس از خروج از تیغه پیداکنید (شکل ۲۵۳)

حل . فرض می‌کنیم MN و PQ صفحات مقابل و متوازی تیغه، n ضریب شکست شیشه و d ضخامت آن باشد . شعاع AB ضمن ورود وخروج از تیغه می‌شکنند . AB در برخورد با PQ جهت خود را تغییر می‌دهد و درامتداد BC قرار می‌گیرد . امتداد جدید طبق قانون معلوم شکست نور معین‌می‌شود :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$$

نور ضمن خروج از MN هم دوباره جهت خود را تغییر می‌دهد ودر امتداد CD قـرار می‌گیردکه با شرط زیر معین می‌شود :

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{1}{n}$$



ش ۲۵۳

و از این تساویها نتیجه می‌شود :

$$\sin\alpha=\sin\gamma \Longrightarrow \alpha=\gamma$$

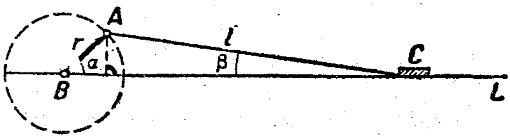
زیرا α و γ زوایائی‌حاده هستند . بنابراین نور ضمن‌عبور از دوصفحهٔموازی یك تیغه، جهت‌خود را تغییر نمی‌دهد. CK یعنی مقدار جـابجائی نور را محاسبه می‌کنیم . از مثلث BKC بدست می‌آید :

$$CK=BC\sin(\widehat{CBK})=BC\sin(\alpha-\beta) .$$

بنابراین :
$$CK = \frac{d}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta) = \frac{d\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$$

III . در مثال زیر نمونه‌ای ازکاربرد مثلثات در محاسبات فنی ذکر شده است .

در شکل ۲۵۴ طرح یك میلهٔ دوار داده شده است . BA ضمن حرکت دورانی خود جسم C را روی خط راست BL حرکت می‌دهد . حرکت به کمك میل‌لنگ AC انجام می گیرد . فرض کنید α زاویهٔ بین میلهٔ BA و



ش ۲۵۴

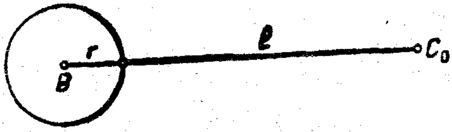
محور BL و β زاویهٔ بین میل‌لنگ CA و محور BL باشد . اگر r و l به‌ترتیب طولهای BA و میل‌لنگ باشند ، رابطهٔ بین α و β را می‌توان از مثلث ABC بدست آورد :

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha .$$

در بسیاری موارد $\frac{r}{l} = \frac{۱}{۵}$ است و بنابراین $\beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{۵}$ می‌شود .

برای محاسبات عملی می‌توان مثلا جدول مقادیر تقریبی زیر را برای β تشکیل داد :

α	°۰	°۱۰	°۲۰	°۳۰	°۴۰	°۵۰	°۶۰	°۷۰	°۸۰	°۹۰
β	°۰	°۲	°۴	°۵/۵	°۷/۵	°۹	°۱۰	°۱۱	°۱۱/۵	°۱۱/۵



ش ۲۵۵

بازاء $\alpha=0$ وضع میله و میل‌لنگ در شکل ۲۵۵ داده شده است ، فاصلهٔ اولیهٔ جسم C از نقطهٔ B برابر است با $r+l$. وقتی که میلهٔ دوار به‌اندازهٔ زاویهٔ α دوران کند ، فاصلهٔ روروك C ازنقطهٔ B چنین می‌شود :

$$r\cos\alpha+l\cos\beta\ ;$$

فاصلهٔ از مبداء روروك یعنی $S=C_\circ C$ با رابطهٔ زیر معین می‌شود :

$$S=r(1-\cos\alpha)+l(1-\cos\beta)$$

IV . **نوسانات سینوسی** . توابع مثلثاتی در فیزیك وصنعت در مورد مطالعهٔ فرایندهای متناوب ، مثل‌حرکت نوسانی ، انتشار امواج ، حرکت مکانیزم ماشین بخار ، نیرو وشدت جریان برق وغیره نقش بسیارمهمی‌دارند.

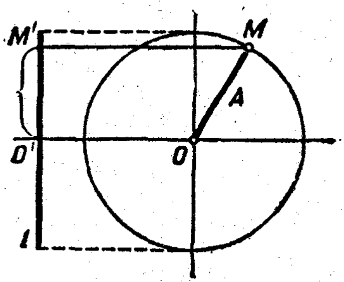
ساده‌ترین حرکت متناوب ، حرکت نوسانی سینوسی است :

$$y=A\sin(\omega x+\alpha)\ ;$$

که در آن A دامنه ، ω بسامد (فرکانس) و $T=\frac{2\pi}{\omega}$ دورهٔ نوسان است .

تابع $A\sin(\omega x+\alpha)$ را می‌توان باین ترتیب تعبیر نمود .

پاره خط OM را درنظر می گیریم که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دور نقطهٔ Oدوران کند . بنابراین نقطهٔ M روی دایرهٔ به شعاع Aحرکتی متشابه خواهد داشت . نقطهٔ M' تصویر M برخطی مانند l(درشکل ۲۵۶ ، l را خطی قائم گرفته‌ایم)



ش ۲۵۶

حرکت نوسانی سینوسی خواهد داشت . فرض می‌کنیم که O' تصویر نقطهٔ O بـر خط l و α (فاز اولیه) زاویه‌ای باشد که وضع اولیهٔ شعاع با قطر افقی می‌سازد . در فاصلهٔ زمانی x (از لحظهٔ مبداء) شعاع متحرك بـاندازهٔ زاویهٔ ωx حرکت می‌کند و قطر افقی زاویه‌ای مساوی $\omega x+\alpha$ می‌سازد و y یعنی فاصلهٔ نقطهٔ M' از نقطهٔ O' بارابطهٔ زیر معین می‌شود :

$$y=A\sin(\omega x+\alpha)$$

و نقطهٔ M' درفاصلهٔ بستهٔ $[-A, A]$ روی‌محور l حرکت نوسانی‌متناوب خواهد داشت . حداکثر فاصلهٔ M' از نقطهٔ O' ، بطرف بالا (یا پائین)در لحظه زمانی x است که بازاء آن داشته باشیم : $\sin(\omega x+\alpha)=1$ (و یا مساوی ۱ــ) ، از آنجا $\omega x+\alpha=\frac{4k+1}{2}\pi$ (ویا $\frac{4k-1}{2}\pi$) و $x=\frac{(4k+1)\pi-2\alpha}{2\omega}$ (و یا $x=\frac{(4k-1)\pi-2\alpha}{2\omega}$) .

حرکتی که با معادلهٔ :

$$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x$$

مشخص شود ، حرکت نوسانی خواهد بود ، زیرا (بند ۲۹ صفحهٔ ۲۲۸ را به‌بینید) اگر زاویهٔ کمکی α را باشرایط زیر در نظر بگیریم :

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بدست می‌آید :

$$y=A\sin(\omega x+\alpha)\qquad (A=\sqrt{a^2+b^2})$$

نتیجهٔ دوحرکت نوسانی‌سینوسی که دارای یك‌تناوب باشند، حرکتی‌است سینوسی با همان دورهٔ تناوب . درحقیقت اگر فرض‌کنیم :

$$y_1=A_1\sin(\omega x+\alpha_1)\ ;\quad y_2=A_2\sin(\omega x+\alpha_2)\ ;$$

خواهیم داشت :

$$y_1+y_2=(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)\sin\omega x+$$
$$+(A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2)\cos\omega x \cdot$$

باین ترتیب دوجمله‌ای خطی‌مثلثاتی نسبت‌به $\sin\omega x$ و $\cos\omega x$ بدست‌می‌آید:

$$y_1+y_2=a\sin\omega x+b\cos\omega x \ ;$$

که در آن داریم :

$$a=A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2 \ ; \ B=A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2 \cdot$$

و درنتیجه خواهیم داشت :

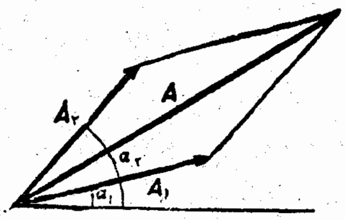
$$y_1+y_2=A\sin(\omega x+\alpha);$$

که در آن داریم :

$$A=\sqrt{(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)^2+(A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2)^2}=$$
$$=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)}$$

$$\cos\alpha=\frac{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}{A} \quad ; \quad \sin\alpha=\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A}$$

متذکر می‌شویم که دامنهٔ A ازنوسان نتیجه را می‌توان بطریق هندسی (که در شکل ۲۵۷ نشان داده شده است) بدست آورد : A عبارتست ازقطر متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن مساوی A_1 و A_2 و زاویهٔ بین آنها مساوی $\alpha_2-\alpha_1$ می‌باشد .



ش ۲۵۷

فرض‌کنید $y=f(x)$ ، معادلهٔ حرکت‌متناوب باکوچکترین‌تناوب مثبت l باشد . توابع مثلثاتی زیر هم با تناوب l خواهند بود :

$$\sin(\frac{2\pi}{l}x+\alpha) \ ; \ \sin(\frac{4\pi}{l}x+\alpha); \ \ldots; \ \sin(\frac{2n\pi}{l}x+\alpha); \ \ldots$$

ضمناً برای اولین آنها l کوچکترین مقدار دورهٔ تناوب است . در بسیاری

موارد به‌حالتهائی از تابع $f(x)$ برخورد می‌کنیم که می‌تواند به صورت مجموع سری بی‌نهایت فوریه * نوشته شود .

$$f(x)=A_0+A_1\sin(\frac{2\pi}{l}x+\alpha_1)+\dots+A_n\sin(\frac{2n\pi}{l}x+\alpha_n)+\dots$$

بنابراین یك حرکت متناوب مرکب نتیجه‌ای است از عمل متقابل حرکتهای نوسانی سینوسی ساده با دورهٔ تناوبهائی مساوی :

$$l\ ;\frac{l}{2}\ ;\ \frac{l}{3};\ \dots;\frac{l}{n}\ ;\ \dots$$

نوسان‌سینوسی $A_n\sin(\frac{2n\pi}{l}x+\alpha_n)$ را nامین‌تابع‌همساز ** $f(x)$ گویند.

برای نمایش تقریبی یك حرکت ، بنحوی‌که تابع $f(x)$ بصورت مجموع نوسانات سینوسی باشد، می‌توان از مجموع‌چند جملهٔ اول‌سری‌فوریه استفاده‌کرد . برای تعیین همسازی تابع $f(x)$ از روی منحنی آن (که مثلا بطریق جستجو بدست آمده است) ، اسبابی ساخته‌اند که بطور خودکار بعضی از مقادیر اولیهٔ همسازی تابع $f(x)$ را بوسیلهٔ منحنی آن بدست می‌دهد .

ضمن‌جمع همسازیهای بادورهٔ تناوب مختلف‌ممکن است حرکت‌نوسانی غیر متناوبی بدست آورد (درحالتی‌که دورهٔ تناوبها متوافق نباشند) .

فرض کنید :

$$y_1=A_1\sin(\omega_1x+\alpha_1)\ ;\ y_2=A_2\sin(\omega_2x+\alpha_2)\ .$$

تفاضل آوندها را φ می‌گیریم :

$$\varphi=(\omega_2x+\alpha_2)-(\omega_1x+\alpha_1)=(\omega_2-\omega_1)x+(\alpha_2-\alpha_1)$$

دراینصورت حرکت نتیجه میتواند بصورت زیر باشد :

---

*) شرایط بیان تابع $f(x)$ به صورت سری مثلثاتی در دورهٔ آنالیز ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گیرد .

**) توابع نوسانی سینوسی را در ریاضی توابع همساز (Harmonique) گویند .

$$y_1+y_2=A_1\sin(\omega_1 x+\alpha_1)+A_2\sin(\omega_1 x+\alpha_1+\varphi)=$$
$$=(A_1+A_2\cos\varphi)\sin(\omega_1 x+\alpha_1)+A_2\sin\varphi\cos(\omega_1 x+\alpha_1)$$

و اگر از قواعد معمولی تبدیل، به‌کمک زوایای کمکی استفاده کنیم ، بدست می‌آید :

$$y_1+y_2=A\sin(\omega_1 x+\alpha)$$

که در آن « دامنهٔ » :

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi}$$

و «فاز» α تابعی از زمان x است .

وقتی که دورهٔ تناوبهای نوسانات مفروض نزدیک بهم باشند ، اختلاف $\omega_2-\omega_1$ کوچك است و در این‌حالت «دامنهٔ» A و «فاز» α ازنوسان نتیجه به‌کندی تغییر می‌کند ودر فاصلهٔ کوچکی از زمان ، حرکت نتیجه‌را میتوان مثل حرکت نوسانی سینوسی در نظر گرفت ، ولی در جریان زمان ، دامنه تغییر می‌کند وحداکثر وحداقل مقدارآن A_1+A_2 و A_1-A_2 خواهد بود (بازاء $\cos\varphi=\pm 1$) . این پدیده را در فیزیك ضربان گویند : نوسان مجموع نوسانی خواهد بودکه دامنهٔ آن بطورمتناوب تغییر می‌کند ، یا زبانه می‌کشد ویا روبه خاموشی می‌رود. درحالت خاص ، پدیدهٔ ضربان را می‌توان در صدای محسوسی که از دومنبع ، با نوسانات نزدیك بهم و دوره تناوبهای مختلف سرچشمه گرفته است . مشاهده‌کرد .

۶۸ . محاسبه باکمك جدولهای مثلثاتی

برای اینکه محاسبات عملی باسرعت‌بیشتری انجام‌گیرد، ازجدولهای آماده‌ای که مقادیر توابع مثلثاتی و یا لگاریتمهای آنها را ضبط‌کرده‌اند ،

استفاده می‌کنند . معمولا جدولهای مثلثاتی را برای مقادیری از قوسها ، که با واحد درجه مشخص شده‌اند ، تنظیم کرده‌اند .

اگر مقادیر توابع مثلثاتی را مستقیماً داده باشند ، **جدول طبیعی** توابع مثلثاتی ودر حالتیکه لگاریتمهای این توابع را داده باشند، **جدول لگاریتمی** آنها را خواهیم داشت .

در بند ۲۲ دیدیم که برای تنظیم این‌جدولها کافی است ، مقادیر توابع مثلثاتی (ویا لگاریتمهای آنها) را برای مقادیر آوند از صفر تا ۴۵ درجه محاسبه نمائیم ، زیرا وقتی که مقادیر توابع مثلثاتی زوایای حاده را تا ۴۵ درجه دردست داشته باشیم ، می‌توانیم با استفاده ازروابط تبدیل، مقادیر این توابع را برای هر مقدار دلخواه آوند بدست‌آوریم .

بر اساس رابطهٔ تبدیل [φ — ۹۰] ، می‌توان مقادیر توابع مثلثاتی‌دو قوس متمم را در یك ستون نوشت ، مثلا :

	$cotg$	tg	cos	sin	
°۵۲	۱/۲۸۰	۰/۷۸۱	۰/۷۸۸	۰/۶۱۶	°۳۸
	tg	$cotg$	sin	cos	

سینوس زاویهٔ۳۸درجه درعین‌حال کسینوس زاویهٔ متمم‌آن یعنی۵۲درجه نیز هست :

$$sin\,۳۸^\circ = cos\,۵۲^\circ = ۰/۶۱۶$$

بهمین مناسبت در بسیاری ازجدولها ، مقادیر توابع راتنها برای زوایای‌صفر تا ۴۵درجه تنظیم‌کرده‌اند. ولی از همین جدولها برای محاسبهٔ مقادیرتوابع از ۴۵ تا ۹۰ درجه هم می‌توان استفاده کرد .

برای تنظیم جدولهای مثلثاتی‌کافی است مقادیر توابع‌را تنها ازصفر تا

۳۰ درجه داشته باشیم ، زیرا باکمك دو اتحاد :

$$sin(۳۰^\circ+\alpha)=cos\alpha-sin(۳۰^\circ-\alpha)$$

$$cos(۳۰^\circ+\alpha)=-sin\alpha+cos(۳۰^\circ-\alpha)$$

می‌توان بادردست داشتن مقادیراین‌توابع برای زوایای α و $۳۰^\circ-\alpha$ مقادیر سینوس وکسینوس زاویهٔ $۳۰^\circ+\alpha$ را محاسبه‌کرد .

باکمك رشته‌های توانی(به‌بند ۷۴ مراجعه‌کنید) ، میتوان مقادیرتوابع مثلثاتی را با هر تقریب دلخواه محاسبه‌کرد و بنابراین می‌توان جدولهای مثلثاتی را با تعداد ارقام دلخواه تنظیم‌کرد . درمحاسبات امروزی هم‌معمولا از همین رشته‌ها استفاده می کنند .

جدولهای مثلثاتی را با روشهای مقدماتی هم می‌توان تنظیم‌کرد ، ولی با توجه به پیشرفت نحوهٔ محاسبات امروزی ، این روشها از لحاظ عملی اهمیت ندارند و تنها می‌توان از آنها بعنوان هدفهای روانشناسی آموزشی استفاده کرد .

دراینجا شرح مختصری دربارهٔ روشهای مقدماتی محاسبهٔ مقادیرتوابع مثلثاتی می‌آوریم .

اگر مقادیر $sin\alpha$ و $cos\alpha$ معلوم باشد (یعنی با هر تقریب دلخواه قابل محاسبه باشد) ، می‌توان باهر تقریب دلخواهی توابع مثلثاتی‌آوندهای $\frac{\alpha}{۲}$ ، $\frac{\alpha}{۴}$ ، ... ، $\frac{\alpha}{۲n}$ را محاسبه نمود . برای این منظورکافی است متوالیاً از روابطی‌که بین توابع مثلثاتی یك قوس باتوابع مثلثاتی‌نصف‌آن وجود دارد، استفاده‌کنیم :

$$sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱-cos\alpha}{۲}}\ ;\ cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱+cos\alpha}{۲}};\ \ldots$$

وقتی‌که ازیك مقداربتوان باهرتقریب دلخواه‌جذرگرفت(باروشهای‌مقدماتی) ، بنابراین مقدار تابع مثلثاتی مجهول هم باهر تقریب دلخواه بدست می‌آید. باین ترتیب بدون اینکه اشکالی وجود داشته باشد (بشرطی‌که محاسبات‌مفصل

را ندیده بگیریم) ، میتوان مقادیر توابع مثلثاتی زوایائی را که تا حد مورد لزوم کوچك‌اند محاسبه کرد .

در بندهای ۱۰ و ۲۱ دیدیم که می‌توان توابع مثلثاتی زوایای زیر را با روشهای مقدماتی محاسبه نمود :

$6^\circ ; 9^\circ ; 12^\circ ; 15^\circ ; 18^\circ ; 22^\circ 30' ; 24^\circ ; 30^\circ ; 36^\circ , 45^\circ$

بااستفاده‌از زوایای۹درجه‌و۶درجه‌می‌توان‌توابع‌مثلثاتی‌زاویهٔ $3^\circ = 9^\circ - 6^\circ$ را نیز محاسبه نمود وسپس از زاویهٔ ۳ درجه میتوان مقادیر توابع مثلثاتی زوایای $1^\circ 30'$ و $45'$ را محاسبه کرد و باین ترتیب با در دست داشتن توابع مثلثاتی زاویهٔ ۴۵ دقیقه می‌توان جدولی از مقادیر سینوس وکسینوس ۴۵ دقیقه به ۴۵ دقیقه تنظیم کرد .

ضمن تنظیم جدولهای مثلثاتی ، برای محاسبهٔ توابع مثلثاتی زوایای کوچك می‌توان از تساویهای تقریبی زیر استفاده کرد :

$$\sin x \approx x \ ; \ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

از نامساویهای :

$$1-\frac{x^2}{2}<x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16} \quad \text{و} \quad x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x$$

(بند ۵۱ را به‌بینید) می‌توان نتیجه گرفت :

$$\sin x = x \qquad \text{(با خطای کمتر از } \tfrac{x^3}{4}\text{)}$$

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{(با خطای کمتر از } \tfrac{x^4}{16}\text{)}$$

اگر زاویهٔ مفروض شامل α درجه باشد ، اندازهٔ آن بر حسب رادیان $x = \frac{\alpha\pi}{180}$ می‌شود وبرای خطای روابط فوق خواهیم داشت (درنظرمی‌گیریم که $\frac{\pi}{180}<\frac{1}{15}$ است) :

$$\frac{x^3}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\alpha^3<\frac{\alpha^3}{2^2\times 5^3\times 10^3}=\frac{2k^3}{10^6}=2\times 10^{-6}k^3;$$

$$\frac{x^4}{16}=\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4k^4<\frac{k^4}{2^4\times 5^4\times 10^4}=10^{-8}k^4.$$

باکمك رابطهٔ تقریبی، $\sin 1^\circ$ را محاسبه می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\sin 1^\circ=\sin\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}=0/01728$$

فرض کنیم که‌رابطهٔ‌تقریبی $\sin x = x$ با خطائی کمتر از $\frac{1}{10^6}=0/000001$

مثلا برای تنظیم جدول طبیعی مثلثاتی سه رقمی مورد استفاده قرار گیرد،

بازاء $k=7$ نامساوی:

$$\frac{2\times 7^3}{10^6}<0/001$$

نشان می‌دهد که در این‌حالت می‌توان از رابطهٔ تقریبی برای‌محاسبهٔ سینوس

زوایای ۱درجه تا۷درجه استفاده‌کرد. با استفاده ازمقدار $0/01728=\frac{\pi}{180}$

بدست می‌آید (تاسه‌رقم اعشار را درنظر گرفته‌ایم):

$$\sin 1^\circ=\frac{\pi}{180}=0/017;\qquad \sin 5^\circ=5\frac{\pi}{180}=0/086;$$

$$\sin 2^\circ=2\frac{\pi}{180}=0/035;\qquad \sin 6^\circ=6\frac{\pi}{180}=0/104;$$

$$\sin 3^\circ=3\frac{\pi}{180}=0/052;\qquad \sin 7^\circ=7\frac{\pi}{180}=0/121;$$

$$\sin 4^\circ=5\frac{\pi}{180}=0/069;$$

رابطهٔ تقریبی $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ برای کسینوس زوایای کوچك دقت بیشتری

دارد و برای تنظیم جدولهای سه رقمی می‌توان از این رابطه برای محاسبهٔ

کسینوس زوایای صفر تا ۱۵ درجه مستقیماً استفاده کرد . در حقیقت خطای موجود چنین است :

$$۱۰^{-۸}k^۴ \leqslant ۱۰^{-۸} \times ۱۵^۴ < \frac{۶۰۰۰۰}{۱۰^۸} < ۰/۰۰۱$$

همانطور که قبلا نشان‌دادیم، باکمك روابط مربوط به‌تقسیم قوس وقضایای مجموع می‌توان بطور مستقیم (وبا تقـریب دلخواه) ، توابع مثلثاتی تعداد زیادی از زوایا را بدست آورد :

$$۳^\circ ، ۶^\circ ، ۱۲^\circ ، ۱۵^\circ ، ۱۸^\circ ، ۲۲^\circ ۳۰' ، ۲۴^\circ ، \ldots$$

این محاسبهٔ مستقیم مقادیر ، از یکطرف می‌تواند وسیله‌ای برای کنترل باشد. از طرف دیگر با در دست داشتن این مقادیر توابع مثلثاتی زوایای کوچك، می‌توان با استفاده از قضایای مجموع :

$$\sin(x \pm h) = \sin x \cos h \pm \cos x \sin h ،$$

$$\cos(x \pm h) = \cos x \cos h \mp \sin x \sin h ،$$

مقادیر توابع مثلثاتی زوایای‌فواصل را محاسبه‌نمود . باین‌ترتیب بامحاسبات مقدماتی و بدون اشکال خـاصی ، می‌توان جدولهای مثلثـاتی سه رقمی را تنظیم کرد .

وقتی که مقادیر توابـع مثلثاتی زاویهٔ کوچکی مثل α معلوم بـاشد ، می‌توان با استفاده از روابط مجموع ، توابع مثلثاتی ۲α ، ۳α ، ... را محاسبه کرد وجدول مربوطه را تنظیم نمود .

وقتی که مقادیر سینوس و کسینوس زوایای α ، ۲α ، ... ، $n\alpha$ معلوم باشد ، با استفاده از روابط :

$$\begin{cases} \sin(n+۱)\alpha = ۲\cos\alpha \sin n\alpha - \sin(n-۱)\alpha ، \\ \cos(n+۱)\alpha = ۲\cos\alpha \cos n\alpha - \cos(n-۱)\alpha . \end{cases} \qquad (۱)$$

می‌توان $\sin(n+۱)\alpha$ و $\cos(n+۱)\alpha$ را محاسبه نمود . ضریب $۲\cos\alpha$ نزدیك به‌عدد ۲ است، فرض می‌کنیم $k = ۲ - ۲\cos\alpha$ ، پس ازتبدیلات‌ساده

روابط زیر را برای محاسبهٔ اختلاف سینوس و کسینوس بدست می‌آوریم :

$$\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = \sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha - k\sin n\alpha \text{ ،}$$

$$\cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha = \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha - k\cos n\alpha \text{ .}$$

اگر مثلا $\alpha = 10''$ ویا برحسب واحد رادیان $\frac{\pi}{64800}$ فرض کنیم ، با استفاده از رابطهٔ تقریبی $\sin x = x$ بدست می‌آید :

$$\sin 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0/0000484813681$$

با تقریب $0/5 \times 10^{-13}$. بهمین ترتیب $\cos 10''$ را بوسیلهٔ رابطهٔ مربوطه بدست می‌آوریم . اگر با طریقه‌ای که شرح دادیم ۱۰۸۰۰ مرتبه‌عمل کنیم‌به زاویهٔ ۳۰درجه می‌رسیم ، در اینحالت بسادگی معلوم می‌شودکه :

$$k = 0/00000000023504.....$$

اگر برای‌محاسبهٔ بالا، خطای مربوطه را درنظربگیریم، روشن‌می‌شود که باشروع ازمقادیر مذکور $\sin 10''$ و $\cos 10''$ تا ۱۳ رقم اعشار، می‌توان جدولهای مثلثاتی را با۵رقم اعشار تشکیل داد . ولی امروزه اینگونه‌محاسبات عظیم (ولی مقدماتی) تنها ازنظر تاریخی می‌تواند جالب باشد .

درعمل ازجدولهای مختلف استفاده می‌شود : جدولهای چهار رقمی ، جدولهای پنج رقمی، جدولهای هفت رقمی وغیره ما دربارهٔ موارد استعمال خاص هریك ازاین جدولهاخود را معطل نمی‌کنیم، معمولا هرجدولی‌نوشته‌ای بهمراه داردکه قواعدکاربرد آنرا شرح می‌دهد . فقط متذکر می‌شویم که‌بسته به نوع تنظیم جدولها ، این قواعد ممکن است باهم اختلافاتی داشته باشند. در جدولها معمولا مقادیر توابع مثلثاتی زوایا (یا لگاریتمهای آنها) را با تناوب معینی ذکرکرده‌اند: درجدولی ۶دقیقه به ۶دقیقه ، درجدول دیگریك دقیقه به یك دقیقه ودرجدول سوم۱۰ ثانیه به ۱۰ ثانیه . برای محاسبهٔمقدار تابع مثلثاتی زوایای فاصله، معمولا از درج واسطهٔ خطی استفاده می‌کنند.در

درج واسطهٔ خطی مقدار تابع متناسب با نمو آوند ، نمومی کند .

مثلا فرض کنید که میخواهیم باکمك جدول ۵رقمی که توابع‌مثلثاتی‌را يك‌دقیقه به يك دقیقه داده است ، $\log \sin ۳۷^\circ ۱۰' ۳۲''$ را حساب کنیم . ازجدول مستقیماً بدست می‌آید :

$$\log \sin ۳۷^\circ ۱۰' = \bar{۱}/۷۸۱۱۳$$

اختلاف بین این‌مقدار ومقدار بلافاصله بعد ازآن درجدول مساوی ۱۷ است:

$$d = \log \sin ۳۷^\circ ۱۱' - \log \sin ۳۷^\circ ۱۰' = ۱۷$$

بنابراین با نمو ۶۰ ثانیه اختلافی مساوی ۱۷ بدست آمده است و برای ۳۲ ثانیه (تقریباً) داریم: $\frac{۱۷ \times ۳۲}{۶۰} = ۹$ (یعنی ۹صدهزارم) و بنابراین‌خواهیم داشت :

$$\log \sin ۳۷^\circ ۱۰' ۳۲'' = \bar{۱}/۷۸۱۱۳ + ۰/۰۰۰۰۹ = \bar{۱}/۷۸۱۲۲$$

برای سهولت محاسبه، معمولا مقدار اضافی رابصورت آماده‌ای معین کرده‌اند. مثلا در اغلب جدولهائی که توابع مثلثاتی را ۶دقیقه به‌۶دقیقه‌داده‌اند، هیچگونه احتیاجی به محاسبهٔ نمو واسطه‌ها نیست و نتیجهٔ آنها را در جدول ذکر کرده‌اند .

برای توابع $\log \cos x$ و $\log \cot g\, x$ ، که نزولی هستند ، بایستی مقدار بدست آمده را بجای اضافه‌کردن ،کـم نمود ، چون وقتی آوند نمو مثبت داشته باشد هریك ازدو تابع فوق نمو منفی دارند .

واسطه‌های خطی گاهی نمو قابل توجه دارند وجدول مربوط به‌فاصله‌ها بسرعت ترقی می‌کند . مثلا برای سینوس و تانژانت زوایای در حوالی صفر (و یاکسینوس ، تانژانت وکتانژانت در حوالی ۹۰ درجه) جدول فاصله‌هـا بسرعت ترقی می‌کند و بهمین مناسبت است که دربعضی ازجدولها مثلالگاریتم سینوس زوایای ازصفر تا ۱۴درجه را يك‌دقیقه بیك‌دقیقه واز ۱۴درجه تا ۹۰

درجه را ۶دقیقه به ۶دقیقه داده‌اند . ویامثلا در جدولهائی که لگاریتم[۱] توابع مثلثاتی را ۱۰ ثانیه به ۱۰ثانیه ذکر کرده‌اند ، لگاریتم سینوس زوایای‌صفر تا ۵ دقیقه را ثانیه به ثانیه داده‌اند .

برای محاسبهٔ لگاریتم‌سینوس (یا تانژانت)زوایای نزدیك بصفرمی‌توان از روش زیر هم استفاده کرد ، ازآنجاکه داریم :

$$\sin x \neq x \quad (\text{و } tg\, x \neq x)$$

می‌توان نسبت سینوسها یا تانژانتهای زوایای کوچك را برنسبت قوسهای آنها دانست و بنابراین (به تقریب) خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(x+h)}{\sin x} = \frac{x+h}{x}, \quad \frac{tg(x+h)}{tg\, x} = \frac{x+h}{x}$$

متذکرمی‌شویم که چون درطرف راست نسبت قوسهای $x+h$ و x را داریم، فرقی‌ندارد که قوسها را با چه واحدی درنظر گرفته باشیم وممکن‌است مثلاآنها را برحسب ثانیه نوشت. فرض‌کنیم مثلا $\log \sin x$ معلوم‌باشد، در ـ اینصورت اگر ازطرفین رابطهٔ بالا لگاریتم بگیریم، داریم:

$$\log \sin(x+h) = \log \sin x + \log(x+h) - \log x$$

و مقادیر $\log(x+h)$ و $\log x$ را می‌توان با کمك جدول لگاریتم اعداد بدست آورد .

فرض‌کنید مثلا محاسبه $\log \sin ۱^\circ ۲۲' ۳۶''$ مورد نظر باشد .ازجدول مستقیماً بدست می‌آید :

$$\log \sin ۱^\circ ۲۲' = \bar{۴}/۳۷۷۵۰$$

وچون داریم :

$$۱^\circ ۲۲' = ۴۹۲۰'' \text{ ، } ۱^\circ ۲۲' ۳۵'' = ۴۹۵۶''$$

فرض می‌کنیم : $x = ۴۹۲۰$ ، $x+h = ۴۹۵۶$

دراینصورت بدست می‌آید :

$$\log \sin ۱^\circ ۲۲' ۳۶'' = \log \sin ۱^\circ ۲۲' + \log ۴۹۵۶ -$$
$$- \log ۴۹۲۰ = \overline{۲}/۳۸۰۶۶$$

باکمك جدول فواصل یعنی جدول مربوط به اختلاف مقادیر مجاوریك تابع، می‌توان دربارهٔ دقت محاسبات قضاوت کرد . این فواصل در قسمتهای مختلف جدول یکنواخت نیستند و بنابراین دقت محاسبات بسته به مقدار زوایا فرق می‌کند . مثلا فرض کنید درجدول پنج رقمی که لگاریتم توابع مثلثاتی رادقیقه به دقیقه داده است ، فاصله‌ای مساوی d (صدهزارم) باشد ، دراینصورت اگر زاویه را باندازهٔ k ثانیه تغییر دهیم در مانتیس لگاریتم تغییری باندازهٔ $\frac{d}{۶۰}k$ حاصل می‌شود . باین‌ترتیب هرچه d کوچکتر باشد ، خطای ناشی‌از محاسبه کمتر خواهد بود .

برای پیدا کردن مقدار زاویه از روی لگاریتم تقریبی آن ، بازاء هر واحدی که آخرین رقم اعشار لگاریتم آن تغییر می‌کند (یعنی یك صدهزارم) زاویه راباندازهٔ $(\frac{۶۰}{d})''$ تغییرمی‌دهیم. هرچه فواصل جدول اختلاف، بزرگتر باشد ، با دقت بیشتری می‌توان زاویه را باکمك مقدار لگاریتم یا تابع مثلثاتی آن معین کرد . مثلا در جدولهای پنج رقمی برای لگاریتم سینوس زوایا تا ۱۲ درجه هر اشتباهی در مانتیس باندازهٔ ۰/۰۰۰۰۱ خطائی کمتر از "۱ بوجود می‌آورد ، درحالیکه برای زوایای نزدیك به ۳۰ درجه ، این خطا به حدود "۳ ، برای زوایای نزدیك به ۴۵ درجه تا "۵ و برای زوایای نزدیك به ۸۹ درجه تا '۵ می‌رسد .

برای بدست آوردن زوایا ازروی مقادیر مثلثاتی و یا لگاریتمی آنها از جدولهای مثلثاتی استفاده می‌کنند ، با این تفاوت که در این‌حالت مفروضات را نه زوایا، بلکه توابع مثلثاتی آنها (ویالگاریتمهای این توابع) می‌گیرند.

در جدول زوایائی را پیدا می‌کنیم که مقادیر تابع مثلثاتی (ویا لگاریتم) آنها نزدیکترین مقادیر به عددمفروض باشد وسپس با استفاده ازروش واسطهٔ خطی، مجهول را جستجو می‌کنیم . در این‌مورد بایستی اشتباه جدول راهم درنظر داشت ، زیرا درجدولهای پنج‌رقمی مقادیر مانتیس را با تقریب ۰/۵ در صد هزار ثبت کرده‌اند .

با روشی که قبلا ذکر کردیم می‌توان خطای ناشی از محاسبه را ارزیابی کرد .

برای حل مسائل مربوط به محاسبهٔ اجزاء یك شکل هندسی با روش مثلثاتی ، معمولا بطریق زیر عمل می‌کنند : ابتدا مسئله را درحالت‌کلی حل می‌کنند یعنی معلومات و مجهولات را بوسیلهٔ حروف نشان داده وروابطی‌را بدست می‌آورند که مجهولات را برحسب معلومات معین کند(ویا ازروابطمعلوم استفاده می‌کنند) . روابط‌کلی را (تاحد امکان) بصورتی‌که برای محاسبه با جدول ساده‌تر باشد ، درمی‌آوریم . برای استفاده ازجدولهای طبیعی بهتر است که نتیجهٔ آخر بصورت مجموع باشدکه بتوان بسادگی جملات آنراباهم جمع‌کرد ، برعکس برای استفاده ازجدولهای لگاریتمی بهتر است‌که نتیجهٔ آخربصورت ضرب عوامل باشد تابتوان لگاریتم آنرا مستقیماً ازجدول‌بدست آورد . پس از تشکیل رابطهٔ‌کلی ، مقادیر عددی مفروض را بجای آن قرار می‌دهند و با درنظر گرفتن قانون استفاده ازجدول وقانون محاسبات تقریبی مجهول را بدست می‌آورند .

در زیر نمونه‌هائی ازمحاسبات‌بوسیلهٔ جدولهای‌مثلثاتی ذکر شده‌است.

چند مثال

۱. باکمك جدول چهاررقمی لگاریتمی اجزاءاصلی مثلثی را پیداکنید که درآن $a = ۲۲۵$ ، $b = ۸۰۰$ و $C = ۳۶^\circ ۴۴'$ باشد .

حل . برای حل مثلثی‌که ازآن دوضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم باشد (با استفاده ازجداول‌لگاریتمی) برای‌دقت بیشتر بهتر است‌که ازقضیهٔ‌تانژانتها

و روابط «مول‌وید» استفاده کنیم . ولی وقتی که با جدول چهاررقمی سر وکار داریم می‌توان از روابط کمکی صرفنظر کرد و قضیهٔ سینوسها را مورد استفاده قرار داد .

از روابط : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(A+C)}$ بدست‌می‌آید:

$$tg\,A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$$

شبکهٔ لگاریتمها را تشکیل می‌دهیم :

$$\log a=۲/۳۵۲۲$$
$$\log\cos C=\overline{۱}/۹۰۶۱$$
$$\log(a\cos C)=۲/۲۵۸۳$$

و ازآنجا $a\cos C=۱۸۱$ می‌شود . بنابراین :

$$b-a\cos C=۶۱۹$$

$$\log(b-a\cos C)=۲/۲۹۱۷;$$

$$\log a=۲/۳۵۲۲$$
$$\log\sin C=\overline{۱}/۷۷۶۷$$
$$-\log(b-a\cos C)=\overline{۳}/۲۰۸۳$$
$$\log tg\,A=\overline{۱}/۳۳۷۲$$

بنابراین : $A=۱۲^\circ۱۶'$; $B=۱۸۰^\circ-A-C=۱۳۱^\circ$

ضلع c هم با توجه به قضیهٔ سینوسها بدست می‌آید :

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

داریم :

$$\log\sin A=\overline{۱}/۳۲۷۳$$

$$\log a=۲/۳۵۲۲$$
$$\log\sin C=\overline{۱}/۷۷۶۷$$
$$-\log\sin A=۰/۶۷۲۷$$
$$\log c=۲/۸۰۱۶$$
$$c=۶۳۳$$

روش مذکور در فوق برای محاسبهٔ عادی‌ساده است . ولی‌برای‌محاسبه باکمك ماشینهای حساب، حاصلضرب $a\cos C$ مستقیماً ازحاصلضرب مقدار a در مقدار $\cos C$ با استفاده ازجدول طبیعی مثلثاتی، بدست می‌آید. بهمین‌ترتیب مستقیماً خارج قسمت $\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$ محاسبه می‌شود .

۴. باکمك جدول لگاریتم پنج رقمی اجزاء اصلی مثلثی را پیدا کنید که درآن داریم: $A=۶۱^\circ ۴۰' ۳۰''$ ، $b=۳۷۵/۴۴$ و $c=۲۷۸/۲۰$

حل . برای محاسبات لگاریتمی بهتر است از روابط تانژانتها استفاده کنیم :

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{tg\frac{B-C}{۲}}{tg\frac{B+C}{۲}} \Longrightarrow tg\frac{B-C}{۲}=\frac{b-c}{b+c}tg\frac{B+C}{۲}=$$

$$=\frac{b-c}{b+c}cotg\ \frac{A}{۲}$$

داریم : $b-c=۹۷/۲۴\ ;\ b+c=۶۵۳/۶۴;\ \frac{A}{۲}=۳۰^\circ ۵۰' ۱۵''$

محاسبات لگاریتمی را انجام می‌دهیم :

$$\begin{aligned} log(b-c) &= ۱/۹۸۷۸۴ \\ -log(b+c) &= \bar{۳}/۱۸۴۶۶ \\ log\, cotg\, ۳۰^\circ ۵۰' ۱۵'' &= ۰/۲۲۴۰۲ \\ \hline log\, tg\frac{B+C}{۲} &= \bar{۱}/۳۹۶۵۲ \\ \frac{B-C}{۲} &= ۱۳^\circ ۵۹' ۳۲'' \end{aligned}$$

$log(b+c)=۲/۸۱۵۳۴$:

بااین‌ترتیب : $\frac{B-C}{۲}=۱۳^\circ ۵۹' ۳۲'';$

$$\frac{B+C}{۲}=۹۰^\circ-\frac{A}{۲}=۵۹^\circ۹'۴۵'';$$

از آنجا : $B=۷۳^\circ۹'۱۷''$; $C=۴۵^\circ۱۰'۱۳''$

برای محاسبهٔ a می‌توان از رابطهٔ «مول‌ویده» استفاده کرد :

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{۲}}{\sin\frac{A}{۲}} \Longrightarrow a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{۲}}{\cos\frac{B-C}{۲}}$$

داریم :

$$\log(b+c)=۲/۸۱۵۳۴$$

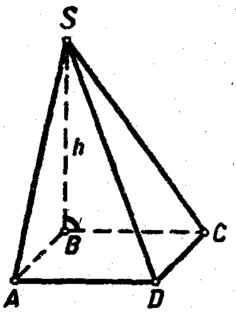
$$\log\sin\frac{A}{۲}=\bar{۱}/۷۰۹۷۸$$

$$-\log\cos\frac{B-C}{۲}=۰/۰۱۳۰۸ \qquad \log\cos\frac{B-C}{۲}=\bar{۱}/۹۸۶۹۲$$

$$\log a=۲/۵۳۸۲۰$$

$$a=۳۴۵/۳۰$$

۰۳ هرم مربع‌القاعده‌ای داریم که دو وجه جانبی آن بر صفحهٔ قاعده عمود است و هریك از دو وجه دیگرش با صفحهٔ قاعده زاویهٔ دو وجهی مساوی $\alpha=۳۵^\circ۴۶'$ می‌سازند ، اگر ارتفاع هرم $h=۲۴/۱۵$ باشد، باکمك جدول لگاریتم‌چهار رقمی سطح جانبی هرم را معین کنید .



ش ۲۵۸

حل . ابتدا مسئله را بصورت‌کلی حل می‌کنیم . باتوجه به‌شکل ۲۵۸ نتیجه‌می گیریم که:

$$S_{\text{جانبی}}=۲S_{ASB}+۲S_{SAD}$$

داریم :

$$S_{ASB}=\frac{۱}{۲}AB\cdot h=\frac{h^{۲}\cot g\,\alpha}{۲},$$

$$S_{SAD}=\frac{۱}{۲}AD\cdot AS=\frac{۱}{۲}h\cot g\,\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}$$

رابطهٔ جواب را بصورت‌کلی می‌نویسیم :

$$S_{\text{جانبی}}=h^{۲}(cotg\,\alpha+\frac{cotg\,\alpha}{sin\,\alpha})=h^{۲}cotg\,\alpha\frac{۱+sin\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

برای محاسبه باجدول لگاریتم ، این نتیجه‌را بصورت قابل محاسبهٔلگاریتمی در می‌آوریم :

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۲h^{۲}cotg\,\alpha\,cos^{۲}(۴۵^{\circ}-\frac{\alpha}{۲})}{sin\,\alpha}$$

و محاسبات را باکمك جدول انجام می‌دهیم :

$log\,۲=۰/۳۰۱۰$	$log\,۲۴/۱۵=۱/۳۸۲۹=log\,h$
$۲log\,۲۴/۱۵=۲/۷۶۵۸$	
$log\,cotg\,۵۳^{\circ}۴۶'=\bar{۱}/۸۶۴۹$	$log\,cos(۴۵^{\circ}-\frac{\alpha}{۲})=log\,cos\,۱۸^{\circ}۷'=$
$۲log\,cos\,۱۸^{\circ}۷'=\bar{۱}/۹۵۶۰$	$=\bar{۱}/۹۷۸۰$
$-log\,sin\,۵۳^{\circ}۴۶'=۰/۰۹۳۳$	
$log\,S_{\text{جانبی}}=۲/۹۸۱۰$	$log\,sin\,۳۵\ \ ۴۶'=\bar{۱}/۹۰۶۷$

و ازآنجا سطح جانبی مساوی ۹۵۷/۲ واحد مربع می‌شود .

۶

نظریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی

۶۸ . روش اصول موضوعی در مثلثات

در این بند تعریف «اصول موضوعی» توابع‌مثلثاتی ، بعنوان‌توابعی که دارای خواص دقیقاً مشخصی هستند و می‌توان همهٔ خواص دیگر آنها را از این‌خواص تعریف شدهٔ اولیه بدقت نتیجه گرفت ، داده شده است .

تعریف. کسینوس تحلیلی $C(x)$ و سینوس تحلیلی $S(x)$ را توابعی میدانیم که :

I . بازاء همه مقادیر حقیقی x معین باشند .

II . در رابطهٔ تابعی زیر صدق کنند :

$$C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y) \qquad (C_{x-y})$$

(بعبارت دیگر تساوی (C_{x-y}) بازاء همهٔ مقادیر x و y صادق‌باشند).

III . در فاصلهٔ $۰<x<\lambda$ (که درآن λ عدد مثبتی است) ، مثبت باشند :

$$C(x)>۰ \text{ و } S(x)>۰ \qquad (\text{بازاء } ۰<x<\lambda)$$

IV . در دو انتهای فاصلهٔ (λ و ۰) تساویهای زیر برقرار باشد :

$$C(۰)=S(\lambda)=۱$$

تعریفی راکه در بالا تنظیم کردیم ، باین سئوال جواب نمی‌دهد که آیا لااقل یك دستگاه توابع $C(x)$ و $S(x)$ وجود داردکه در شرایط بالا صدق کند ، برای‌اینکه به وجود توابع $C(x)$ و $S(x)$ پی ببریم‌کافی است لااقل یکی از نمونه‌های مشخص اینگونه دستگاه توابع را بسازیم . چنین‌دستگاهی را می‌توان باروشهای‌مختلف ساخت(به‌بند۱۰۷مراجعه کنید)، یکی‌ازاین‌روشها نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی است . درحقیقت بازاء $\lambda=\frac{\pi}{۲}$ تمام‌شرایط‌مذکور

در فوق در توابع $\cos x$ و $\sin x$ (که در فصل اول از لحاظ هندسی تعریف شدند) صدق می‌کند . بازاء مقدار مفروض و دلخواه $\lambda>0$ ، شرایط I تا IV در توابع زیر صدق می‌کنند :

$$\cos\frac{\pi}{2\lambda}x \quad \text{و} \quad \sin\frac{\pi}{2\lambda}x.$$

سئوال اساسی دیگری هم مطرح می‌شود : آیا دستگاه توابع $C(x)$ و $S(x)$ (که به‌طریقی ساخته شده است) تنها دستگاهی است (با مفروض بودن λ) که در شرایط فوق صدق می‌کند ؟

در این بند، بدون‌اینکه سئوال مربوط به وجود توابع $C(x)$ و $S(x)$ را مطرح کنیم ، خواصی از این توابع را که ناشی از شرایط I تا IV است ذکر می‌کنیم . باین‌ترتیب بحثی را که در اینجا مطرح می‌کنیم چنین است :

با فرض اینکه توابع $C(x)$ و $S(x)$ وجود دارند ، خواص مربوط به آنها را اثبات می‌کنیم .

۱° . برای مقادیر حدی روابط زیر برقرار است :

$$S(0)=C(\lambda)=0$$

اثبات . در اتحاد (II) :

$$C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y) \qquad (C_{x-y})$$

فرض می‌کنیم $x=y=0$ ، بدست می‌آید :

$$C(0)=C^2(0)+S^2(0)$$

ازآنجا بنا برشرط IV خواهیم داشت :

$$1=1+S^2(0) \implies S(0)=0$$

حالا اگر در اتحاد (II) فرض‌کنیم $x=y=\lambda$ ، بدست می‌آید :

$$C(0)=C^2(\lambda)+S^2(\lambda)$$

از آنجا نتیجه می‌گیریم :

$$1+C^2(\lambda)=1 \implies C(\lambda)=0$$

۲°. اتحاد زیر برقرار است :

$$C^{2}(x)+S^{2}(x)=1$$

اثبات . کافی است در اتحاد (II) فرض کنیم $x=y$ وشرط IV را هم درنظر بگیریم .

نتیجه . توابع $C(x)$ و $S(x)$ محدودند :

$$|C(x)|\leqslant 1 \quad ; \quad |S(x)|\leqslant 1$$

۳° اتحاد زیرکه هریك از توابع $C(x)$ و $S(x)$ را برحسب دیگری می‌دهد ، صحیح است :

$$C(\lambda-x)=S(x)\ ;\ S(\lambda-x)=C(x)\ .$$

اثبات . اگر در رابطهٔ اصلی (II) x را به λ و y را به x تبدیل کنیم ، بدست می‌آید :

$$C(\lambda-x)=C(\lambda)C(x)+S(\lambda)S(x)=S(x)$$

و اگر در این رابطه x را به $\lambda-y$ تبدیل کنیم ، بدست می‌آید :

$$C(y)=S(\lambda-y)$$

۴° . برای تابع $S(x)$ ، رابطهٔ مجموع برقرار است :

$$S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x) \qquad (S_{x+y})$$

اثبات . با استفاده ازخاصیت ۳° ، میتوان نوشت :

$$S(x+y)=C[\lambda-(x+y)]=C[(\lambda-x)-y]=$$
$$=C(\lambda-x)C(y)+S(\lambda-x)S(y)=S(x)C(y)+C(x)S(y);$$

۵° . $C(x)$ تابعی زوج و $S(x)$ تابعی فرد است .

اثبات . اگر در رابطهٔ اصلی (II) فرض کنیم $x=0$ ، بدست می‌آید:

$$C(-y)=C(0)C(y)+S(0)S(y)=C(y)$$

باین ترتیب $C(x)$ تابعی است زوج .

اگر در رابطهٔ (S_{x+y}) ، $y=-x$ فرض کنیم ، بدست می‌آید :

$$0 = S(x-x) = S(x)C(-x)+C(x)S(-x) =$$
$$= C(x)[S(x)+S(-x)] = 0$$

دو حالت پیش می‌آید :

حالت a) : $C(x) \neq 0$ ، دراینصورت :

$$S(x)+S(-x) = 0 \implies S(x) = -S(-x).$$

حالت b) : $C(x) = 0$. y راعدد دلخواهی فرض می‌کنیم که در فاصلهٔ $0 < y < \lambda$ انتخاب‌شده‌باشد، باتوجه‌باینکه $C(-x) = C(x) = 0$ بدست می‌آید :

$$C(x+y) = C[x-(-y)] = C(x)C(-y)+S(x)S(-y) =$$
$$= S(x)S(-y) \quad (1)$$

و ازطرف دیگر :

$$C(y+x) = C[y-(-x)] = C(y)C(-x)+S(y)S(-x) =$$
$$= S(y)S(-x) \quad (2)$$

وچون باتوجه به شرط (III) ، $C(y) > 0$ و $S(y) > 0$ است وبا توجه به حالت a داریم($S(y) = -S(-y)$ ، با مساوی قراردادن عبارتهای(۱) و (۲) ، بدست می‌آید :

$$S(x)S(-y) = S(y)S(-x) \implies -S(x)S(y) = S(y)S(-x)$$

وچون $S(y) \neq 0$ است ، درحالت b هم خواهیم داشت :

$$S(x) = -S(-x)$$

یعنی $S(x)$ تابعی است فرد .

٦° . قضایای مجموعه که باروابط زیر مشخص می‌شوند ، صحیح‌اند :

$$C(x-y) = C(x)C(y)+S(x)S(y) \; ; \qquad (C_{x-y})$$
$$C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y) \; ; \qquad (C_{x+y})$$
$$S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x) \; ; \qquad (S_{x+y})$$

$$S(x-y)=S(x)C(y)-S(y)C(x) \qquad (S_{x-y})$$

رابطهٔ اول طبق شرط وجود دارد ، رابطهٔ سوم را ثابت کردیم ، روابط دوم و چهارم هم از روابط اول وسوم و با استفاده از زوج و فرد بودن توابع (که ثابت کردیم) ، با تغییر y به $-y$ بدست می‌آیند .

۵۷ اتحادهای زیر صحیح‌اند :

$$\begin{cases} C(x)C(y)=\dfrac{C(x+y)+C(x-y)}{۲}; \\ S(x)S(y)=\dfrac{C(x-y)-C(x+y)}{۲}; \\ C(x)S(y)=\dfrac{S(x+y)-S(x-y)}{۲}; \end{cases} \qquad (A)$$

$$\begin{cases} C(x)+C(y)=۲C(\frac{x+y}{۲})C(\frac{x-y}{۲}); \\ C(x)-C(y)=-۲S(\frac{x+y}{۲})S(\frac{x-y}{۲}); \\ S(x)+S(y)=۲S(\frac{x+y}{۲})C(\frac{x-y}{۲}); \\ S(x)-S(y)=۲C(\frac{x+y}{۲})S(\frac{x-y}{۲}); \end{cases} \qquad (B)$$

$$S(۲x)=۲S(x)C(x) \;;\; C(۲x)=C^۲(x)-S^۲(x) \qquad (C)$$

اثبات . روابط (A) (روابط تبدیل به مجموع) نتیجهٔ مستقیم قضایای مجموع (۶°) است . همچنین روابط (B) (روابط تبدیل مجموع به صورت ضرب) هم نتیجه‌ای از قضایای مجموع است . مثلا :

$$C(x)+C(y)=C(\frac{x+y}{۲}+\frac{x-y}{۲})+C(\frac{x+y}{۲}-\frac{x-y}{۲})=$$

$$=C(\frac{x+y}{۲})C(\frac{x-y}{۲})-S(\frac{x+y}{۲})S(\frac{x-y}{۲})+$$

$$+C(\frac{x+y}{۲})C(\frac{x-y}{۲})+S(\frac{x+y}{۲})S(\frac{x-y}{۲})=$$

$$=۲C(\frac{x+y}{۲})C(\frac{x-y}{۲})$$

روابط (C) (آوند دوبرابر) از روابط (C_{x+y}) و (S_{x+y}) بازاء $y=x$ بدست می‌آیند.

۸° . روابط مربوط به نصف‌آوند صحیح‌اند :

$$C(\frac{x}{۲}) = \pm\sqrt{\frac{۱+C(x)}{۲}} \; ; \; S(\frac{x}{۲}) = \pm\sqrt{\frac{۱-C(x)}{۲}}$$

برای اثبات این روابط کافی است از اتحادهای زیر استفاده کنیم :

$$C^۲(\frac{x}{۲}) + S^۲(\frac{x}{۲}) = ۱ \; ; \; C^۲(\frac{x}{۲}) - S^۲(\frac{x}{۲}) = C(x)$$

(اتحاد دوم را از اتحاد (C) با تبدیل x به $\frac{x}{۲}$ بدست‌آوردیم).

۹° . روابط تبدیل برقرارند .

$$C(x+\lambda) = -S(x) \; ; \quad S(x+\lambda) = C(x) \qquad [x+\lambda]$$

$$C(x+۲\lambda) = -C(x); \quad S(x+۲\lambda) = -S(x) \qquad [x+۲\lambda]$$

$$C(x+۳\lambda) = S(x) \; : \quad S(x+۳\lambda) = -C(x) \qquad [x+۳\lambda]$$

$$C(x+۴\lambda) = C(x) \; ; \quad S(x+۴\lambda) = S(x) \qquad [x+۴\lambda]$$

اثبات . اگر مقدار توابع $C(x)$ و $S(x)$ را در نقاط λ ، ۲λ ، ۳λ و ۴λ محاسبه کنیم ، داریم :

$$C(\lambda) = ۰ \; ; \qquad S(\lambda) = ۱ \; ;$$

$$C(۲\lambda) = C^۲(\lambda) - S^۲(\lambda) = -۱; \quad S(۲\lambda) = ۰ \; ;$$

$$C(۳\lambda) = C(\lambda)C(۲\lambda) - S(\lambda)S(۲\lambda) = ۰ \; ;$$

$$S(۳\lambda) = S(\lambda)C(۲\lambda) + S(۲\lambda)C(\lambda) = -۱$$

و بالاخره :

$$C(۴\lambda) = C^۲(۲\lambda) - S^۲(۲\lambda) = ۱; \; S(۴\lambda) = ۲S(۲\lambda)C(۲\lambda) = ۰$$

اکنون برای اثبات روابط تبدیل کافی است قضایای مجموع را مورد استفاده قرار دهیم ، مثلا :

$$C(x+\lambda) = C(x)C(\lambda) - S(x)S(\lambda) = -S(x)$$

نتیجه . توابع $C(x)$ و $S(x)$ متناوب هستند . اتحاد $[x+4\lambda]$ نشان می‌دهد که عدد 4λ برای هریك از این توابع دورهٔ تناوب است .

۱۰° . در هریك ازفواصل $(k\lambda$ و $(k+1)\lambda)$ (که در آن k عددی است صحیح) ، هریك از توابع $C(x)$ و $S(x)$ علامت ثابتی دارند .

با توجه به متناوب بودن توابع مورد مطالعه ، کافی است ثابت کنیم که در هریك از فواصل زیر علامت ثابتی دارند :

$$(0 \text{ و } \lambda)\ ;\ (\lambda \text{ و } 2\lambda)\ ;\ (2\lambda \text{ و } 3\lambda)\ ;\ (3\lambda \text{ و } 4\lambda) .$$

a) در فاصلهٔ $(0$ و $\lambda)$ هر دو تابع مثبت‌اند :

$$C(x)>0\ ;\ S(x)>0$$

b) در فاصلهٔ $(\lambda$ و $2\lambda)$:

$$C(x)<0\ ;\ S(x)>0$$

وقتی که $\lambda<x<2\lambda$ باشد ، $x=\lambda+\alpha$ خواهدبود ، که در آن $0<\alpha<\lambda$ است . با استفاده از روابط تبدیل بدست می‌آید .

$$C(x)=-S(\alpha)<0\ ;\ S(x)=C(\alpha)>0$$

و بهمین‌ترتیب می‌توان قضایای زیر را ثابت کرد :

c) در فاصلهٔ $(2\lambda$ و $3\lambda)$:

$$C(x)<0\ ;\ S(x)<0\ ;$$

d) در فاصلهٔ $(3\lambda$ و $4\lambda)$:

$$C(x)>0\ ;\ S(x)<0$$

نتیجه . تابع $S(x)$ در فاصلهٔ $(0$ و $2\lambda)$ مثبت ودر فاصلهٔ $(2\lambda$ و $4\lambda)$ منفی است . بنابراین باتوجه به تناوب $S(x)$ ، میتوان گفت که در فاصلهٔ $(4k\lambda$ و $(4k+2)\lambda)$ داریم : $S(x)>0$ و در فاصلهٔ $(4(k+1)\lambda$ و $(4k+2)\lambda)$ داریم : $S(x)<0$ و بخصوص در فاصلهٔ $(-2\lambda$ و $0)$ داریم : $S(x)<0$.

تابع $C(x)$ زوج است و بنابراین در فاصلهٔ $(0 \text{ و } -\lambda)$ مثبت است .

از اینجا نتیجه می‌شود که تابع $C(x)$ در فاصلهٔ $(\lambda \text{ و } -\lambda)$ مثبت ودر فاصلهٔ $(3\lambda \text{ و } \lambda)$ منفی است .

با توجه به متناوب بودن تابع $C(x)$ ، این تابع در فاصلهٔ $((4k+1)\lambda \text{ و } (4k-1)\lambda)$ مثبت و درفاصلهٔ $((4k+3)\lambda \text{ و } (4k+1)\lambda)$ منفی است .

۱۱°. تابع $C(x)$ در فاصلهٔ $(2\lambda \text{ و } 0)$ نزولی و در فاصلهٔ $(4\lambda \text{ و } 2\lambda)$ صعودی است .

اثبات . داریم :

$$C(x_2)-C(x_1)=-2S\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)S\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)$$

فرض کنید $0<x_1<x_2<2\lambda$ باشد ، دراینصورت :

$$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\lambda\ ;\quad 0<\frac{x_2+x_1}{2}<2\lambda\ .$$

مقادیر تابع $S(x)$ در نقاط $\frac{x_2-x_1}{2}$ و $\frac{x_2+x_1}{2}$ مثبت است (بـه نتیجهٔ بالا مراجعه کنید) ، بنابراین :

$$C(x_2)<C(x_1);$$

یعنی $C(x)$ در فاصله $(2\lambda \text{ و } 0)$ نزولی است .

فرض کنید $2\lambda\leqslant x_1<x_2<4\lambda$ باشد ، در اینصورت :

$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\lambda$ و $2\lambda<\frac{x_2+x_1}{2}<4\lambda$ می‌شود . در حقیقت $S\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)<0$ است و بنابراین :

$$C(x_1)<C(x_2)$$

یعنی $C(x)$ در فاصلهٔ $(4\lambda \text{ و } 2\lambda)$ صعودی است .

با همین روش می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد :

تابع $S(x)$ در فاصلهٔ (λ و $\lambda -$) صعودی ودر فاصلهٔ (3λ و λ) نزولی است .

بخصوص توجه می‌کنیم که در فاصلهٔ (λ و ۰) تابع $C(x)$ نزولی و تابع $S(x)$ صعودی است .

۱۲° . توابع $C(x)$ و $S(x)$ درفاصلهٔ ($+\infty$ و $-\infty$) متصل‌اند.

قبلا لم زیر را ثابت می‌کنیم :

لم . تابع $C(x)$ در نقطهٔ ۰ = x متصل است.

اثبات . چون $C(0)=1$ است ، برای‌اثبات این لم باید ثابت‌کرد:

$$\lim_{x\to 0} C(x)=1$$

کافی است حد راست $C(x)$را مطالعه کنیم (که درآنجا $x>0$ است)، زیرا اگر حد راست وجود داشته باشد ، با توجه به زوج بودن تابع $C(x)$:

$$C(x)=C(-x);$$

حد چپ تابع $C(x)$ در نقطهٔ صفر هم وجود دارد وهمان مقدار رادارد .

چون تابع $C(x)$ در فاصلهٔ (λ و ۰) یکنوا (تنزل می‌کند) و محدود است ، بنابراین حد راست تابع $C(x)$ وجود دارد . بنابراین در نقطهٔ $x=0$ ، هردو حد راست و چپ ، برای تابع $C(x)$ وجود دارد ، این‌حد را مساوی l فرض می‌کنیم :

$$\lim_{x\to 0} C(x)=l.$$

برای محاسبهٔ l کافی است حد مقادیر متوالی تابع $C(x)$ را بازاء مقادیر خاص متوالی $\{x_n\}$ ازآوند که بسمت‌صفر میل‌می‌کند، پیدا کنیم: $\lim x_n=0$.

این مقادیر خاص متوالی‌را چنین می‌گیریم :

$$x_0=\lambda;\ x_1=\frac{\lambda}{2};\ x_2=\frac{\lambda}{2^2};\dots;\ x_n=\frac{\lambda}{x^n};\dots$$

متوالیاً از رابطهٔ نصف آوند استفاده می‌کنیم ، میشود :

$$C(x_0)=0\ ;\ C(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2};\ C(x_2)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$C(x_3)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};$$

و بطور کلی (با بکار بردن روش استقراء ریاضی) :

$$C(x_n)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}{2}\quad \text{(شامل n رادیکال)}$$

حد $\{S_n\}$ را محاسبه می‌کنیم ، که طبق رابطهٔ برگشتی $S_n=\sqrt{2+S_{n-1}}$ معین می‌شود وضمناً $S_1=\sqrt{2}$ است :

$$S_1=\sqrt{2};\ S_2=\sqrt{2+\sqrt{2}};\dots;\ S_n=\sqrt{2+S_{n-1}};\dots$$

این دنباله صعودی است . ثابت می‌کنیم که $\{S_n\}$ محدود است . داریم :

$$S_1<2\ ;\ S_2=\sqrt{2+S_1}<2\ ;$$

از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم : فرض می‌کنیم که $S_{n-1}<2$ باشد دراینصورت بدست می‌آید :

$$S_n=\sqrt{2+S_{n-1}}<2$$

از آنجاکه دنبالهٔ $\{S_n\}$ صعودي ومحدوداست، $S_n=k$ حد ، وجودخواهد داشت . داریم :

$$S_n^2=2+S_{n-1};$$

ازآنجا : $\quad \text{حد}\,S_n^2=2+\text{حد}\,S_{n-1}\Rightarrow k^2-k-2=0$

ریشهٔ مثبت این معادله مساوی ۲ است و بنابراین : $\quad \text{حد}\,S_n=2.$

حالاحد دنبالهٔ $\left\{ C(x_n) \right\}$ را محاسبه‌می‌کنیم . داریم:

$$\text{حد}\, C(x_n) = \text{حد}\, \frac{S_n}{۲} = ۱$$

و بنابراین داریم :

$$\lim_{x \to ۰} C(x) = \lim_{x \to +\infty} C(x_n) = ۱ = C(۰) \;;$$

یعنی تابع $C(x)$ در نقطهٔ صفر متصل است .

نتیجه . تابع $S(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ متصل است . درحقیقت داریم :

$$\lim_{x \to ۰} S(x) = \text{حد}\left(\pm\sqrt{۱ - C^{۲}(x)} \right) = ۰$$

مقدار تابع $S(x)$ هم در نقطهٔ $x = ۰$ مساوی صفر است :

$$S(۰) = \lim_{x \to ۰} S(x) = ۰$$

قضیه . توابع $C(x)$ و $S(x)$ در هر نقطهٔ x متصل‌اند .

اثبات . بایستی ثابت‌کرد :

$$\lim_{h \to ۰} C(x+h) = C(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \to ۰} S(x+h) = S(x)$$

تساوی اول را ثابت می‌کنیم . داریم :

$$C(x+h) = C(x)C(h) - S(x)S(h)$$

$$\lim_{h \to ۰} C(x+h) = C(x)\, \text{حد}\, C(h) - S(x)\, \text{حد}\, S(h) = C(x).$$

تساوی دوم هم باهمین روش ثابت می‌شود .

۱۳° . تابع $C(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[۰ \text{ و } ۲\lambda]$ از ۱ تا ۱— نزولی است.

اثبات . اولا . در فاصلهٔ $(۰ \text{ و } ۲\lambda)$ تابع $C(x)$ نزولی است (۱۱° را به‌بینید) .

ثانیاً . $C(۰) = ۱$ و $C(۲\lambda) = -۱$.

ثالثاً . k را عدد دلخواهی فرض‌کنید که در شرط $-۱ < k < ۱$ صدق‌کند، با توجه به متصل بودن تابع $C(x)$در فاصلهٔ $(۰ \text{ و } ۲\lambda)$،درنقطه‌ای

مانند ζ (که بعلت یکنوا بودن تابع منحصربفرد است) مقداری مساوی k دارد:

$$C(\zeta)=k \qquad (0<\zeta<2\lambda)$$

بهمین‌ترتیب می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

در فاصلهٔ بستهٔ $[2\lambda, 4\lambda]$ تابع $C(x)$ از -1 تا 1 صعودی است.

۱۴°. عدد 4λ کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت برای توابع $C(x)$ و $S(x)$ است.

اثبات. میدانیم که 4λ دورهٔ تناوب توابع $C(x)$ و $S(x)$ است (نتیجهٔ ۹° را به‌بینید). اگر عدد l دورهٔ تناوب $C(x)$ باشد، داریم:

$$C(l)=C(0)=1$$

تابع $C(x)$ درنقاط 0 ، $\pm 4\lambda$ ، $\pm 8\lambda$ ، ... ، $4k\lambda$ ، ... مقداری مساوی 1 دارد و از این مقادیر ممکنه برای l ، کوچکترین مقدار مثبت، همان عدد 4λ است.

بهمین‌ترتیب برای تابع $S(x)$:

$$S(\lambda+l)=S(\lambda)=1$$

و این تساوی برای $l=4kl$ صادق است که از بین آنها کوچکترین عدد مثبت 4λ است.

در این بندما خواص کسینوس وسینوس‌را بصورت توابع مثلثاتی‌دیگری مطالعه‌کردیم. تابع تانژانت تحلیلی $T(x)$ از رابطهٔ زیر معین می‌شود:

$$T(x)=\frac{S(x)}{C(x)}$$

مطالعهٔ خواص این تابع مشکل نیست ومی‌توانند باروشهای عادی (به فصلهای اول ودوم مراجعه شود) و بر اساس تعریف آن و خواص معلوم کسینوس و سینوس انجام گیرد. بهمین‌ترتیب درمورد کتانژانت.

۶۹. منحصر بفرد بودن توابع $C(x)$ و $S(x)$

قضیه. برای مقادیر مفروض λ دو دستگاه مختلف توابع $C(x)$، $S(x)$ و $C_1(x)$، $S_1(x)$، که درشرایط I تا IV صدق کنند، وجود ندارد.

اثبات. باید ثابت کنیم که اگر (بازاء $\lambda>0$) هم برای توابع $C(x)$ و $S(x)$ وهم برای توابع $C_1(x)$ و $S_1(x)$ شرایط I تا IV صدق کنند، اتحادهای زیر برقرار است؛

$$C(x)\equiv C_1(x)\ ;\ S(x)\equiv S_1(x)$$

۱°. دنبالهٔ آوندهای زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\left\{\frac{\lambda}{2^n}\right\} \qquad \lambda \text{ و } \frac{\lambda}{2} \text{ و } \frac{\lambda}{2^2},\ldots,\frac{\lambda}{2^n},\ldots$$

ثابت می‌کنیم که‌در نقاط این دنباله، مقادیر توابع $C(x)$ و $C_1(x)$ برابرند با توجه به شرط IV داریم:

$$C(\lambda)=0\ ;\ C_1(\lambda)=0$$

با استفادهٔ متوالی از روابط نصف آوند بدست می‌آید (لم ۱۳° از بند قبل را به‌بینید):

$$C\left(\frac{\lambda}{2}\right)=C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};C\left(\frac{\lambda}{2^2}\right)=C_1\left(\frac{\lambda}{2^2}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

و بطور کلی:

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)=C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)=\frac{S_n}{2}$$

که در آن داریم:

$$S_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} \qquad \text{شامل } n \text{ رادیکال}$$

درست بهمین ترتیب بدست می‌آید:

$$S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - S_{n-1}}}{2}$$

۲°. فرض کنید m عدد صحیح دلخواه و n عدد طبیعی دلخواه باشد ، ثابت می‌کنیم که‌در نقاط $\frac{m}{2^n}\lambda$ مقادیر توابع $C(x)$ و $C_1(x)$ ، و همچنین $S(x)$ و $S_1(x)$ ، برابرند . طبق آنچه ثابت کردیم ، بازاء $m=1$ داریم:

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right), \quad S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)$$

فرض می‌کنیم که تساویهای :

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right); \; S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) \qquad (1)$$

بازاء مقدار صحیحی از m صحیح باشند ، ثابت می‌کنیم که دراینصورت‌بازاء عدد $m+1$ هم صحیح خواهند بود . از روابط مجموع استفاده می‌کنیم :

$$C\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right) = C\left(\frac{m}{2^n}\lambda + \frac{\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) -$$

$$-S\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) =$$

$$= C_1\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right).$$

برای تابع $S(x)$ هم استدلال بهمین ترتیب انجام‌می‌گیرد .

باین‌ترتیب با استفاده از روش استقراء ریاضی ثابت شدکه تساویهای (۱) بازاء هرمقدار دلخواه m صحیح است .

بازاء $m=0$ هم داریم :

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 1, \quad S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 0$$

وقتی که $m<0$ ، عدد منفی طبیعی باشد ، برای اثبات تساویهای (۱) کافی است ازخاصیت زوج ویا فرد بودن توابع مورد مطالعه استفاده کنیم . مثلا :

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)=C\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right)=C_1\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right)=C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)$$

۳° . فرض کنید که x عدد حقیقی دلخواهی باشد . کافی است تساویهای زیر را برای حالت $x>0$ ثابت کنیم :

$$C(x)=C_1(x) \text{ ، } S(x)=S_1(x)$$

زیرا دراینصورت با توجه به زوج یا فرد بودن تابع مورد نظر، برای حالت $x<0$ هم صحیح خواهند بود .

نسبت $\frac{x}{\lambda}$ را باین ترتیب تبدیل می کنیم (تبدیل به کسر بامبنای ۲):

$$\frac{x}{\lambda}=p_0+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots \Longrightarrow x=p_0\lambda+\frac{p_1\lambda}{2}+\frac{p_2\lambda}{2^2}+$$
$$+\cdots+\frac{p_n\lambda}{2^n}+\cdots,$$

که در آن p_0 عددی است صحیح و هریك از عددهای p_1 ، p_2 ، $\ldots$ ، p_n مساوی صفر ویا ۱ (یکی از ارقام مبنای ۲) هستند. اگر تعداد کسرها محدود باشد ، ومثلا $p_n \neq 0$ ولی $p_{n+1}=p_{n+2}=\cdots=0$ ، x عددی بصورت $\frac{m}{2^n}\lambda$ خواهد بود که قضیه را در مورد آن ثابت کرده‌ایم . حالا فرض می کنیم که کسر به مبنای ۲ نامحدود باشد ، فرض می کنیم :

$$\overline{x_n}=p_0\lambda+\frac{p_1}{2}\lambda+\cdots+\frac{p_n}{2^n}\lambda$$

داریم : $x=\text{حد}\,\overline{x_n}$. با توجه به اینکه توابع مورد مطالعه متصل‌اند (به ۱۳° از بند قبل مراجعه کنید) بدست می آید :

$$C(x)=\text{حد}\; C(x_n) \text{ و } C_1(x)=\text{حد}\; C_1(x_n);$$

ولی چـون $C(x_n)=C_1(x_n)$ است ، در اینصورت $C(x)=C_1(x)$ خواهد بود .

برای توابع $S(x)$ و $S_1(x)$ هم استدلال بهمین ترتیب انجام‌می گیرد.

باین ترتیب تساوی ، برای هرمقدار حقیقی آوند صحیح خواهدبود .

ما خواص توابع $C(x)$ و $S(x)$ را بازاء مقدار مفروض و مثبت λ بر رسی‌کردیم (با این فرض‌که توابع وجود داشته باشند) ، اگـر بازاء دو مقدار مختلف $\lambda=\lambda_1$ و $\lambda=\lambda_2$ دستگاههای توابع زیر وجود داشته‌باشد :

$$C_{\lambda_1}(x) \text{ ، } S_{\lambda_1}(x) \quad \text{و} \quad C_{\lambda_2}(x) \text{ ، } S_{\lambda_2}(x)$$

دراینصورت دو دستگاه مختلف خواهند بـود . این مطلب لااقل از اینجاناشی می‌شودکه‌بازاء $\lambda_2>\lambda_1$ داریم : $C_{\lambda_2}(\lambda_1)>0$ درحالیکه $C_{\lambda_1}(\lambda_1)=0$ است .

قضیه . اگربازاء مقداری‌از λ ومثلا $\lambda=\lambda_0$ دستگاه توابع :

$$C_{\lambda_0}(x) \text{ و } S_{\lambda_0}(x)$$

وجود داشته باشدکه شرایط I ـ IV را قبول‌کنند ، بازاء هرمقداردلخواه $\lambda>0$ دستگاه توابع $C_\lambda(x)$ و $S_\lambda(x)$ با قبول شرایط I ـ IV وجود خواهد داشت .

اثبات . کافی است‌که دورهٔ تناوب را تغییر دهیم وفرض‌کنیم :

$$C_\lambda(x)=C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right) \text{ ، } S_\lambda(x)=S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right).$$

در حقیقت :

I . توابع C_λ و S_λ در فاصله ($-\infty$ و $+\infty$) معین‌اند ، زیرا توابع C_{λ_0} و S_{λ_0} بازاء هرمقدار حقیقی x معین‌اند .

II . داریم :

$$C_\lambda(x-y)=C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x-\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right)=C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right)+$$

$$+S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right)=C_\lambda(x)C_\lambda(y)+S_\lambda(x)S_\lambda(x)$$

III . اگر داشته باشیم : $0<x<\lambda$ خواهیم داشت :

$0<\frac{\lambda_0}{\lambda}x<\lambda_0$ و بنابراین :

$$C_\lambda(x)=C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)>0 \text{ و } S_\lambda(x)=S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)>0$$

IV . داریم :

$$C_\lambda(0)=C_{\lambda_0}(0)=1\ ;\ S_\lambda(\lambda)=S_{\lambda_0}(\lambda_0)=1$$

و باین ترتیب دستگـاه توابع $C_\lambda(x)$ و $S_\lambda(x)$ در شرایط I تـا IV صدق می‌کنند .

با توجه به قضایای این‌بند ، هیچ دستگاه توابع دیگری از $C_\lambda(x)$و و $S_\lambda(x)$ بجز $C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$ و $S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد .

۷۰ . تعبیر هندسی توابع C(x) و S(x) .

قضیه . دستگاه معادلات :

$$x=C_\lambda(t) \text{ و } y=S_\lambda(t) \qquad (1)$$

که در فاصلهٔ بستهٔ $\cdot \leqslant t \leqslant ۴\lambda$، مفروض باشند، عبارتند از بیان پارامتری دایرهٔ واحد.

اثبات. قوسی را در نظر می‌گیریم که بوسیلهٔ معادلات (۱) در فاصلهٔ بستهٔ $\cdot \leqslant t \leqslant \lambda$ (ربع دورهٔ تناوب) معین شده باشد. در این فاصلهٔ بسته، توابع $C_\lambda(t)$ و $S_\lambda(t)$ متصل و یکنوا هستند (اولی نزولی و دومی صعودی است)، بنابراین دستگاه (۱) معرف یك قوس ساده درصفحه است.

بازاء هرمقدار دلخواه پارامتر t، $\cdot \leqslant t \leqslant \lambda$، مقادیر x و y متناظر با نقطه‌ای از قوسی است که بر ربع اول‌دایرهٔ واحد واقع است، زیرادار یم:

$$x^۲+y^۲=[C_\lambda(t)]^۲+[S_\lambda(t)]^۲=۱$$

$$C_\lambda(t)\geqslant \cdot \;;\; S_\lambda(t)\geqslant \cdot$$

برعکس، فرض‌کنید $M(x \text{ و } y)$ نقطه‌ای واقع بر قوس ربع اول دایرهٔ واحد باشد:

$$y=\sqrt{۱-x^۲} \qquad (\cdot \leqslant x \leqslant ۱)$$

این نقطه متناظر با مقداری از پارامتر t در فاصلهٔ بستهٔ $\cdot \leqslant t \leqslant \lambda$ است که بازاء آن تابع $C_\lambda(t)$ مقداری مساوی x دارد.

و برای انتهای قوسها داریم:

$$t=\cdot \Longrightarrow x=C_\lambda(\cdot)=۱ \;;\; y=S_\lambda(\cdot)=\cdot$$

$$t=\lambda \Longrightarrow x=C_\lambda(\lambda)=\cdot \;;\; y=S_\lambda(\lambda)=۱$$

بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد که فواصل بستهٔ $\lambda \leqslant t \leqslant ۲\lambda$ و $۲\lambda \leqslant t \leqslant ۳\lambda$ و $۳\lambda \leqslant t \leqslant ۴\lambda$ بترتیب بار بعهای دوم، سوم وچهارم دایرهٔ واحد تطبیق می‌کنند.

بنابراین، دستگاه (۱) در فاصلهٔ $\cdot \leqslant t \leqslant ۴\lambda$، بیان پارامتری دایرهٔ واحد را بدست می‌دهد.

۷۱. تعاریف مختلف ومشخص توابع مثلثاتی

در نظریهٔ اصول موضوعی لازم‌است که بخصوص دربارهٔ **وجود** عناصری که در دستگاه اصول موضوعه صدق می‌کنند گفتگو کنیم . ازآنچه که تا اینجا گفتیم نتیجه نمی‌شود که توابع $C(x)$ و $S(x)$ (که باشرایط قراردادی I تا IV می‌سازند) ، وجود داشته باشند . در نتایجی که تا اینجا از اصول‌موضوعهٔ I تا IV گرفتیم به تناقضی برخورد نکردیم ، ولی ممکن است که در تکامل بعدی نظریه دچار چنین تناقضی بشویم ودراینصورت نظریه بی اعتبار خواهد شد . وجود توابع $C(x)$ و $S(x)$ وقتی ثابت می‌شود که بتوانیم دستگاه توابع مشخصی درست کنیم که شامل خصوصیات I تا IV باشد . باین ترتیب عدم تناقض شرایط I تا IV هم ثابت خواهد شد . توابع $C(x)$ و $S(x)$را بطرق مختلف می‌توان ساخت وما دراینجا از مهمترین آنها یاد می‌کنیم :

I . **نظریهٔ هندسی** . این نظریه رادرفصل اول شرح داده‌ایم . کسینوس و سینوس ،که بطریق هندسی تعریف شده‌اند ، همان توابع $C_{\frac{\pi}{2}}(x)$ و $S_{\frac{\pi}{2}}(x)$ هستند :

$$\cos x = C_{\frac{\pi}{2}}(x) \; ; \quad \sin x = S_{\frac{\pi}{2}}(x) \; ;$$

توابع $C_\lambda(x)$ و $S_\lambda(x)$ عبارتند از :

$$C_\lambda(x) = \cos\frac{\pi}{2\lambda}x \; ; \; S_\lambda(x) = \sin\frac{\pi}{2\lambda}x .$$

و با توجه به قضیهٔ مربوط به‌منحصر بودن این توابع ، توابع دیگری که در شرایط I تا IV صدق کنند وجود نخواهد داشت .

میدانیم که در بیان پارامتری دایره :

$$x = \cos t \;;\; y = \sin t$$

پارامتر t عبارتست از طول قوسی که مبداءآن نقطهٔ $A(١ و ٠)$ و انتهای‌آن نقطهٔ $M(x و y)$ است .

اگر $\lambda \neq \frac{\pi}{٢}$ باشد، دراینصورت بیان‌پارامتری دایره‌چنین‌است:

$$\begin{cases} x = \cos_\lambda t \\ y = \sin_\lambda t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \cos \frac{\pi}{٢\lambda} t \\ y = \sin \frac{\pi}{٢\lambda} t \end{cases}$$

طول s قوس AM مساوی $s = \frac{\pi}{٢\lambda} t$ می‌باشد و از آنجا $t = \frac{٢\lambda}{\pi} s$. یعنی **پارامتر بـا طول قوس AM متناسب است ، بـا ضریب تنـاسبی‌که مخالف واحد است .**

II . **معرفی توابع مثلثاتی به‌وسیلهٔ رشته‌های توانی .** دو تابع زیررا که از مجموع رشته‌های توانی تشکیل شده‌اند ، درنظر می‌گیریم :

$$f(x) = ١ - \frac{x^٢}{٢!} + \dots + (-١)^n \frac{x^{٢n}}{(٢n)!} + \dots$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^٣}{٣!} + \dots + (-١)^{n-١} \frac{x^{٢n-١}}{(٢n-١)!} + \dots$$

هریك از رشته‌های توانی مفروض بازاء مقادیر دلخواه x متقارب‌اند (برای اثبات این موضوع می‌توان مثلا از قاعدهٔ دالامبر استفاده‌کرد) ، بنابراین ، همانطورکه از نظریهٔ رشته‌های توانی می‌دانیم ، هریك از این رشته‌ها بازاء هر مقدار واقع در فاصلهٔ $(-\infty \text{ و } +\infty)$ متقارب مطلق‌اند و در نتیجه

شرط I در توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ صدق می کند .

دربارهٔ شرط II تحقیق می‌کنیم :

$$f(x-y)=f(x)f(y)+\varphi(x)\varphi(y) \qquad \text{(II)}$$

سمت چپ تساوی چنین است :

$$f(x-y)=\Sigma(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$

سمت راست تساوی را از راه ضرب رشته‌ها بدست می‌آوریم (که با توجه به متقارب مطلق بودن آنها ممکن است). رشته‌های زیررا درهم ضرب‌می‌کنیم:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

$$f(y)=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

برای رشتهٔ حاصلضرب جملهٔ عمومی زیر را خواهیم داشت :

$$(-1)^n\left[\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!}+\dots+\frac{x^{2n-2k}y^{2k}}{(2n-2k)!(2k)!}+\right.$$
$$\left.+\dots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

بهمین‌ترتیب دو رشتهٔ زیر راهم دریکدیگر ضرب می کنیم :

$$\varphi(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

$$\varphi(y)=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

رشتهٔ حاصلضرب جملهٔ عمومی بصورت زیرخواهد داشت :

$$(-1)^{n-1}\left[\frac{x^{2n-1}\,y}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n-3}\,y^3}{(2n-3)!3!}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{x^{2n-2k+1}y^{2k-1}}{(2n-2k+1)!(2k-1)!}+\dots+\frac{xy^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$$

اگر حاصلجمع $f(x)f(y)+\varphi(x)\varphi(y)$ را در نظر بگیریم ، رشته‌ای با جملهٔ عمومی زیر بدست می‌آید :

$$(-1)^n\Big[\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{x^{2n-1}y}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!}-\dots+$$
$$+\frac{(-1)^k x^{2n-k}y^k}{(2n-k)!k!}+\dots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}\Big]=(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$

بنابراین رشته‌ای که بدست آمد ، باسمت چپ تساوی II متحد است .

برای‌اینکه ثابت کنیم خواص III و IV هم‌در توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ صدق می‌کنند ، ثابت می‌کنیم که این توابع در ناحیه‌ای واقع درسمت راست نقطهٔ صفر یکنوا و باعلامت ثابت‌اند . داریم :

$$\varphi(x)=x\left(2-\frac{x^2}{2\times3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\times7}\right)+\dots\dots$$

بازاء مقادیری از x که باندازهٔ کافی کوچك باشند ، همهٔ جملات این رشته مثبت‌اند و بنابراین $\varphi(x)>0$ است .

این نامساوی وقتی‌که $0<x<2$ باشد محقق است ، بنابراین تابع $\varphi(x)$ در فاصلهٔ (۲ و ۰) مثبت است . ثابت می‌کنیم که‌در این‌فاصله تابع $f(x)$ نزولی است . برای این‌منظور کافی است ثابت کنیم که مشتق آن منفی است .

درحقیقت در فاصلهٔ (۲ و ۰) داریم :

$$f'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=-\varphi(x)<0$$

مقدار $f(x)$ را در نقاط ۰ و ۲ محاسبه می‌کنیم :

$$f(0)=1\ ;\ f(2)=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\dots=$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{4}{7\times8}\right)-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{4}{11\times12}\right)-\dots<0$$

بنابراین تابع $f(x)$ در دو انتهای فاصلهٔ بستهٔ [۲ و ۰] علامتهای مختلفی دارد : $f(۰)>۰$ و $f(۲)<۰$. باتوجه به‌اینکه تابع متصل ویکنواست ، در فاصلهٔ بستهٔ مفروض تنها یك مقدار برای آوند $x=\lambda$ $(۰<\lambda<۲)$ وجود داردکه بازاء آن تابع $f(x)$ بسمت صفر میل می‌کند : $f(\lambda)=۰$ و ضمناً در فاصلهٔ $۰<x<\lambda$ داریم : $f(x)>۰$.

بنابراین توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ در شرط III هم صدق می‌کنند ، زیرا هردوی آنها در فاصلهٔ $۰<x<\lambda$ مثبت‌اند، اگر دراتحاد (II) فرض کنیم $x=y=\lambda$ بدست می‌آید :

$$f(۰)=f^{۲}(\lambda)+\varphi^{۲}(\lambda) \Longrightarrow \varphi^{۲}(\lambda)=۱$$

وچون $\varphi(\lambda)>۰$ است خواهیم داشت : $\varphi(\lambda)=۱$.

باین‌ترتیب توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ در شرط IV هم‌صدق می‌کنند :

$$f(۰)=\varphi(\lambda)=۱$$

و بنابراین داریم :

$$f(x)=C_{\lambda}(x) \quad ; \quad \varphi(x)=S_{\lambda}(x) \,.$$

ثابت می‌کنیم‌که توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ ، یعنی توابعی از مجموعهٔ توابع $C_{\lambda}(x)$ و $S_{\lambda}(x)$ ، که بارشته‌های توانی تعریف شدند :

$$C_{\lambda}(x)=۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\dots \; ; \; S_{\lambda}(x)=x-\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\dots$$

همان توابع $\cos x$ و $\sin x$ هستندکه در فصل اول بطـریق هندسی تعریف شده‌اند .

معادلهٔ پارامتری دایرهٔ واحد را درنظر می‌گیریم :

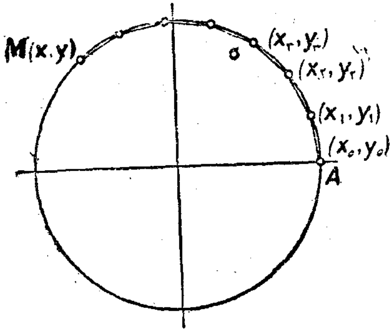
$$x=C_{\lambda}(t) \; ; \; y=S_{\lambda}(t) .$$

فرض‌کنید $AM=\sigma$ ، قوسی ازاین دایره باشدکه به‌نقاط $A(۱ \text{ و } ۰)$ و $M(x \text{ و } y)$ محدود شده است و M نقطه‌ای است متناظر بامقدار مفروضی از

پارامتر که در فاصلهٔ بستهٔ $0 \leqslant t \leqslant 4\lambda$ واقع است . ثابت می کنیم که قوس AM برابر است با t . فاصلهٔ بستهٔ [t و ۰] را به n قسمت بطـریق زیر تقسیم می کنیم :

$$0\,;\frac{t}{n}\,;\,\frac{2t}{n}\,;\ldots\,;\frac{kt}{n}\,;\ldots\,;\frac{(n-1)t}{n}\,;t$$

این تقسیم فاصلهٔ بستهٔ [t و ۰] متناظر است با تقسیم قوس σ به n قوس (شکل ۲۵۹) . طول وتر مربوط به این قوسها را محاسبه می کنیم، دوانتهای kامین قوس نقاطی بامختصات زیرند :



ش ۲۵۹

$$x_{k-1}=f\left(\frac{(k-1)t}{n}\right),$$

$$y_{k-1}=\varphi\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)$$

و :

$$x_k=f\left(\frac{kt}{n}\right)\;;\;\;y_k=\varphi\left(\frac{kt}{n}\right)$$

و طول وتر k ام چنین می‌شود :

$$d_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}=$$

$$=\sqrt{\left[C_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right)-C_\lambda\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right]^2+\left[S_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right)-S_\lambda\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right]^2}=$$

$$=\sqrt{2\left[1-C_\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right]}=\sqrt{4S_\lambda^2\left(\frac{t}{2n}\right)}=2\left|S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)\right|=2S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)^{*}$$

*) علامت قدرمطلق را باین‌مناسبت برداشتیم‌که بازاء مقادیر باندازه‌کافی بزرگ n ، نقطهٔ $\frac{t}{2n}$ در فاصلهٔ (λ و۰) قرار می‌گیردکه درآنجا $S_\lambda(x)>0$ است .

از این محاسبه نتیجه می‌شود که همهٔ وترهای d_k و بنابراین همهٔ قوسهای متناظر با آنها با یکدیگر برابرند. بنابراین خط شکسته ای که از این n وتر تشکیل شده است مساوی $2S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)n$ می‌شود. روشن است که طول قوس AM برابر است با حد خط شکسته‌ای که درآن محاط شده است:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} 2nS_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right) = \lim 2n\left(\frac{t}{2n} - \frac{t^3}{2^3\times 3!n^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^5}{2^5\times 5!n^5} - \ldots\right) = 2\lim\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^3\times 3!n^2} + \ldots\right) = t.$$

باین‌ترتیب $C_\lambda(t)$ و $S_\lambda(t)$ مختصات انتهای قوس $t=\sigma$ از دایرهٔ واحدند که مبداء آن (۰ و ۱) در نظر گرفته شده باشد و با توجه به تعریف هندسی کسینوس وسینوس داریم:

$$C_\lambda(t) = \cos t \;;\; S_\lambda(t) = \sin t$$

اگر $t=\lambda$ فرض کنیم طول ربع دایرهٔ واحد بدست می‌آید و بنابراین:

$$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

III. توابع مثلثاتی بعنوان جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی.

توابع مثلثاتی را می‌توان بعنوان جوابهای خاص معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم تعریف کرد. ضمناً خواص آنهاراهم میتوان براساس قضایای‌عمومی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل بدست آورد.

معادلهٔ خطی زیر را با ضرایب ثابت درنظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (1)$$

بنابر قضیهٔ عمومی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، دو جواب خاص $Y_1(x)$ و

$Y_2(x)$ از معادلهٔ (١) وجود دارد که درشرایط اولیهٔ زیرصدق می کنند :

$$Y_1(0)=1\ ;\ Y_1'(0)=0\ ;\ Y_2(0)=0\ ;\ Y_2'(0)=1$$

توابع $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ بطورخطی بهم مربوط نیستند، زیرا مقدار اولیهٔ «ورونسکیان»٥ آنها مخالف صفر است :

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} Y_1(0) & Y_2(0) \\ Y_1'(0) & Y_2'(0) \end{vmatrix}=1\ ;$$

و بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (١) می‌تواند بصورت زیر باشد :

$$y=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x) \qquad (y)$$

توابع $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ در فاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ متصل‌اند. بنابراین این توابع شرط I مربوط به‌کسینوس و سینوس تحلیلی را دارا هستند.
معادلهٔ دیفرانسیلی (١) را می‌توان بصورت دستگاه معادلات خطی زیر با ضرایب ثابت تغییر داد :

$$\frac{dy}{dx}=z;\frac{dz}{dx}=y \qquad (2)$$

جواب منحصر این دستگاه :

$$y=y(x)\ ;\ \ z=z(x)$$

در شرایط اولیه صدق می کنند :

$$y(0)=0\ ;\ \ z(0)=1$$

تابع $y(x)$، به‌مناسبت روش تشکیل دستگاه (٢)، درمعادلهٔ دیفرانسیلی (١) و شرایط اولیه صدق می کند :

$$y(0)=0\ ;\ y'(0)=z(0)=1$$

بنابراین :

$$y(x)=Y_2(x) \qquad (3)$$

٥) ورونسکیان که از نام ریاضی‌دان لهستانی (یو. ورونسکی) آمده است، دترمینانی است که از n تابع $f_1(x)$ ، $f_2(x)$، ... ، $f_n(x)$ و مشتقات متوالی آنها تا مرتبهٔ $(n-1)$ام درست شده باشد. «مترجم»

تابع $z(x)$ هم در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d(-y)}{dx}=-\frac{dy}{dx}=-z$$

و هم در شرایط اولیه :

$$z(0)=1\ ;\ z'(0)=-y(0)=0$$

و بنابراین :

$$z(x)=Y_1(x) \qquad (4)$$

باین‌ترتیب ، باتوجه به دستگاه (۲) ، داریم :

$$Y_2'(x)=Y_1(x)\ ;\ \ Y_1'(x)=-Y_2(x)$$

معادلهٔ اول دستگاه (۲) را در y ومعادلهٔ دوم آنرا در z ضرب و سپس باهم جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0 \implies \frac{d}{dx}(y^2+z^2)=0$$

ازآنجا :

$$y^2(x)+z^2(x)=\text{مقدار ثابت}$$

و بازاء $x=0$ مقدار سمت‌چپ ، مساوی واحد است . بنابراین اتحاد زیر را داریم :

$$Y_1^2(x)+Y_2^2(x)=1 \qquad (5)$$

نتیجه . توابع $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ محدودند .

حالا فرض کنید ξ عدد حقیقی دلخواهی باشد ، تابع :

$$y(x)=Y_1(x-\xi)$$

(بازاء مقدار مفروض ξ) درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند . درحقیقت :

$$y''(x)=Y_1''(x-\xi)=-Y_1(x-\xi)$$

و بنابراین :

$$y''(x)+y(x)=Y_1''(x-\xi)+Y_1(x-\xi)=0$$

بنابراین ، تابع $y(x)$ بازاء بعضی مقادیر C_1 و C_2 در جواب کلی (y) معادلهٔ (۱) صدق می‌کند :

$$Y_1(x-\xi)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x); \qquad (6)$$

و ازآنجا پس از دیفرانسیل گرفتن :

$$Y_1'(x-\xi)=-Y_2(x-\xi)=-C_1Y_2(x)+C_2Y_1(x) \qquad (7)$$

در تساویهای (۶) و (۷) فرض می‌کنیم $x=\xi$ ، بدست می‌آید :

$$C_1Y_1(\xi)+C_2Y_2(\xi)=1\,;$$

$$-C_1Y_2(\xi)+C_2Y_1(\xi)=0$$

از آنجا ، با در نظر گرفتن رابطهٔ (۵) ، خواهیم داشت :

$$C_1=Y_1(\xi)\,;\,C_2=Y_2(\xi)$$

و تساوی (۶) بصورت زیر در می‌آید :

$$Y_1(x-\xi)=Y_1(x)Y_1(\xi)+Y_2(x)Y_2(\xi)$$

تساوی اخیر یك اتحاد است ، زیرا x و ξ مقادیر عددی دلخواهی هستند .

نتیجه . برای‌توابع $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ شرط II ، مربوط به‌کسینوس‌و سینوس تحلیلی ، صادق‌اند .

قضیه . مقدار مثبتی برای آوند x وجود دارد که بازاء آن تابع $Y_1(x)$ بسمت صفر میل می‌کند.

اثبات . بـر عکس فرض می‌کنیم بازاء مقادیر دلخواه $x>0$ داشته باشیم : $Y_1(x)\neq 0$ ، دراینصورت در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ خواهیم داشت : $Y_1(x)>0$. زیرا اگرمقداری مانند x_1 وجود داشته‌باشد که‌بازاء آن‌مقدار $Y_1(x_1)<0$ باشد ، دراینصورت (بعلت متصل بودن) در فاصله‌ای که‌محدود به نقاط $x=0$ و $x=x_1$ است ، نقطه‌ای مانند ξ وجود دارد (و لااقل یك نقطه) که درآنجا $Y_1(\xi)=0$ است واین مخالف فرض است .

چون $Y_2'(x)=Y_1(x)>0$ است پس تابع $Y_2(x)$ صعودی است.

بنابراین بازاء $x>0$ ، داریم $Y_2(x)>0$ ، زیرا $Y_2(0)=0$ و ضمناً $Y_2(0)<Y_2(x)$ است. چون $Y_2(x)$ درفاصلهٔ $(0, +\infty)$ تابعی مثبت،

صعودی ومحدود است ، بنابراین دارای حد است :

$$\lim_{x\to\infty} Y_2(x) = l_2 > 0$$

از اتحاد $Y'_1 = -Y_2(x)$ و نامساوی $Y_2(x) > 0$ نتیجه‌می‌شود $Y'_1 < 0$

یعنی $Y_1(x)$ تابعی نزولی است . و چون تابع $Y_1(x)$ نزولی و مثبت (و بنابراین محدود) است ، در بی‌نهایت دارای‌حد است :

$$\lim_{x\to\infty} Y_1(x) = l_1 > 0$$

تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم :

$$Y_1(x+1) - Y_1(x) ;$$

این تفاضل در بی‌نهایت حدی مساوی صفر دارد :

$$\lim_{x\to\infty} [Y_1(x+1) - Y_1(x)] = l_1 - l_1 = 0$$

ازطرف دیگر اگر از قضیهٔ لاگرانژ استفاده کنیم :

$$Y_1(x+1) - Y_1(x) = Y'_1(\xi) = -Y_2(\xi)$$

(که در آن $x < \xi < x+1$ است) وبدست‌می‌آید :

$$\lim_{x\to\infty} [Y_1(x+1) - Y_1(x)] = -\lim Y_2(\xi) = -l_2 < 0$$

بنابراین این فرض که تابع $Y_2(x)$ بازاءهمهٔ مقادیر مثبت آوند مخالف‌صفر است ، دچار تناقض شد ، یعنی‌حکم قضیه درست است .

λ را کوچکترین‌ریشهٔ مثبت‌تابع $Y_1(x)$ فرض می‌کنیم [5]، دراینصورت $Y_1(\lambda) = 0$ و $Y_1(x) > 0$ (بازاء $0 < x < \lambda$) . در فاصلهٔ (0 و λ) تابع

۵) کوچکترین جواب مثبت وجود دارد ، زیرا مجموعهٔ نقاطی ،که درآنجا تابع‌متصل $y_1(x)$ بسمت‌صفر میل می‌کند ، مجموعه ای بسته است .

$Y_۲(x)$ صعودی است و $Y_۲(۰)=۰$ و بنابراین $Y_۲(\lambda)>۰$ می‌شود : ٭

$$Y_۲(\lambda)=\lim_{x\to\lambda} Y_۲(x)>۰$$

اگر دراتحاد $Y_۱^۲(x)+Y_۲^۲(x)=۱$ فرض کنیم $x=\lambda$ بدست‌می‌آید $Y_۲(\lambda)=۱$ و بنابراین داریم :

$$Y_۱(۰)=Y_۲(\lambda)=۱$$

و توابع $Y_۱(x)$ و $Y_۲(x)$ در فاصلهٔ (λ و ۰) مثبت اند .

باین‌ترتیب ، این توابع شرایط III و IV را هم دارا هستند .

توابع $Y_۱(x)$ و $Y_۲(x)$ که در شرایط I تا IV صدق می‌کنندعبارتند ازکسینوس وسینوس تحلیلی :

$$Y_۱(x)=C_\lambda(x)\ ;\ Y_۲(x)=S_\lambda(x)$$

با فرض $\lambda=\frac{\pi}{۲}$ معادلهٔ پارامتری دایره بدست می‌آید (صفحهٔ۶۱۵ را به‌بینید) :

$$x=C_\lambda(t)\ ;\ y=S_\lambda(t)\quad (۰<t<۴\lambda)$$

طول قوسσ را حساب می‌کنیم که مبداءآن‌درنقطهٔ A(۰ و۱)، متناظر با پارامتر $t=۰$ ، و انتهای آن در نقطهٔ $M(x\text{ و }y)$ ، متناظر بامقداردلخواه پارامتر t ، واقع است . داریم :

$$\sigma=\int_۰^t\sqrt{[C'_\lambda(t)]^۲+[S'_\lambda(t)]^۲}\,dt=$$

$$=\int_۰^t\sqrt{[-S_\lambda(t)]^۲+[C_\lambda(t)]^۲}\,dt=\int_۰^t dt=t$$

٭) مقدار $Y_۲(\lambda)$ عبارتست از حد تابع صعودی و مثبت در فاصله (λ و۰) ؛

$$Y_۲(\lambda)=\lim_{x\to\xi}Y_۲(x)$$

بنابراین ، $C_\lambda(t)$ و $S_\lambda(t)$ طول و عرض انتهای قوس بطول t از دایرهٔ واحد هستند ، که مبداء آن نقطهٔ A است ، بنابراین :

$$C_\lambda(t) = \cos t \;;\; S_\lambda(t) = \sin t$$

و بازاء $t = \lambda$ داریم : $\sigma = \lambda = \frac{\pi}{۲}$

۷۲ ● دربارهٔ طرق مختلف تنظیم نظریهٔ توابع مثلثاتی

نظریهٔ اصل موضوعی توابع مثلثاتی ، که در بند۶۸ مورد گفتگو قرار گرفت ، این موضوع را روشن نمی‌کندکه باچه روشی می‌توان این توابع را ساخت . نظریهٔ اصل‌موضوعی ثابت می‌کندکه‌می‌توان بر اساس‌بعضی‌خواص مشخص توابع مفروض و بر اساس نظریه‌های عمومی جبر ، آنالیز و نظریهٔ توابع ، بقیهٔ خواص را نتیجه گرفت ، بدون اینکه از روش خاصی برای‌تنظیم وساختن این توابع گفتگوشود . قضیهٔ منحصر بفرد بودن توابع ثابت‌می‌کند که روشهای مختلف تنظیم توابع هم‌ارزند، یعنی اگر براساس اصول موضوعهٔ مورد نظر به طرق مختلف توابعی ساخته شود نمی‌توانندتوابع مختلفی‌باشند.

در بند ۷۱ روشن شدکه برای ساختن توابعی‌که در شرایط I تا IV صدق کنند می‌توان از راههای مختلف شروع‌کرد : به‌کمك هندسه ، به‌کمك رشته‌های توانی ویا بعنوان جوابهای یك‌معادلهٔ دیفرانسیل . روشهای‌دیگری هم‌برای ساختن‌توابع‌مثلثاتی وجوددارد (مثلابوسیلهٔ حاصلضربهای‌بی‌نهایت).

در بند ۷۱ ضمناً دیدیم‌که بررسی خواص توابع مثلثاتی هم‌می‌تواندبه‌مناسبت روشی‌که برای ساختن آنها بکار رفته ، مختلف باشد. مثلا با درنظر گرفتن

نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی ، می‌توان آنها را به‌رشته‌های توانی تبدیل نمود و این‌راهی است که دردورهٔ عمومی آنالیز ریاضی و به کمك‌رابطهٔ تیلور به‌انجام میرسد (وبنابراین به‌دورهٔ متوسطه‌مربوط نیست) . برعکس اگر توابع‌مثلثاتی را بصورت رشته‌های‌توانی تعریف کنیم، می‌توان ثابت کرد که این‌توابع‌دارای تعبیر هندسی هستندکه با نظریهٔ هندسی این توابع تطبیق می‌کند (بند ۷۱ صفحهٔ ۶۲۰ را به‌ببینید) .

از لحاظ نظریهٔ اصل موضوعی **انواع مختلف تعریف توابع مثلثاتی فقط تعبیرهای مشخص مختلفی‌ازآن‌هستند** و برای‌اینکه خواصی‌ازتوابع‌مثلثاتی را ثابت کنیم ، بسته به وضعی که مناسب‌تر باشد ، می‌توان ازیك ویاچندتعبیر مختلف آنها (هر کدام که باشد) استفاده کرد .

از لحاظ تاریخی ، نظریهٔ اصل موضوعی در پایان تکامل نظریهٔ توابع مثلثاتی ظاهر می‌شود . و ازنظر وجودی نمی‌تواند قبل از سایر نظریه ها بوجود آید . مثلثات زائیدهٔ احتیاجات عملی وقبل ازهمه لزوم‌محاسبهٔ‌اجزاء اشکال هندسی است ، بنابراین طبیعی است که نظریهٔ هندسی توابع مثلثاتی از نظر تاریخی قبل از دیگران بوجود آمده باشد . ولی تکامل ریاضیات مسئلهٔ مربوط به‌ساختن توابع مثلثاتی را بطریق تحلیلی خالص مطرح ساخت .

بوجود آمدن دستگاه هندسهٔ غیر اقلیدسی در مقابل بانی آن (ریاضی دان بزرگ روس نیکلای ایوانویچ لباچوسکی) مسئلهٔ تعریف توابع‌مثلثاتی‌را بطور تحلیلی قرار دادکه‌ارتباطی باهندسهٔ اقلیدسی نداشته باشد . لباچوسکی در نوشته‌های خود توابع مثلثاتی را بطریق تحلیلی و به‌کمك رشته‌های توانی تعریف می‌کند ، و این‌تعریف برپایه نظریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی که امروز هم مورد قبول است قرار دارد.

کاربرد همه جانبه‌ای که توابع مثلثاتی در آنالیز ، هندسه ، مکانیك ، فیزیك و سایر علوم‌بدست آورد، باعث شدکه‌نظریهٔ این توابع به‌طرق‌مختلف بنیان گذاشته شود .

در جریان ریشه دواندن نظریهٔ توابع مثلثاتی به جهـات مختلف و در جریان تکامل مثلثات از نظرتعبیرهای مشخص ومختلفی که برای آن‌پیداشد، نظریهٔ اصل موضوعی مثلثات بوجود آمد . در این نظـریه ، توابع مثلثاتی بوسیلهٔ خـواص اصلی خود مشخص می‌شوند (بند ۶۸ ـ شرایط I تا IV) ، بدون‌اینکه به‌طرز ساختن آنهاکاری داشته باشد . باین‌ترتیب روشن‌می‌شود که فهرست خواص‌مشخص توابع مثلثاتی براساس تکامل نظریهٔ این توابع بوجود آمده است .

بعنوان اصول موضوعه ،که توابع مثلثاتی را تعریف می‌کنند، می‌توان خواص مختلفی را انتخاب کرد . بعبارت دیگر ، **بـر اساس نظـریهٔ توابع مثلثاتی دستگاههای مختلفی از اصول موضوعه می‌توان درست‌کرد ، ولی‌این دستگاهها نمی‌توانند بطور دلخواه اختیار شوند بلکه :**

اولا مجموعهٔ خواص اصلی بایستی مجموعه ای بی تناقض باشد .

مثلا اگر به‌شرایط I تا IV خاصیتی راکه در توابع مثلثاتی نیست‌اضافه‌کنیم دستگاه اصولی موضوعهٔ متناقضی‌بدست خواهیم آورد. مثلا اگر بعنوان‌شرط V اضافه‌کنیم‌که باید : $\lim\limits_{x\to\infty} C(x) = +\infty$ باشد ، این شرط با نامساوی $|C(x)|\leq 1$ که ناشی ازسایرشرایط است (بند۶۸ شماره ۲° را به‌بینید)متناقض می‌شود . بنابراین هیچ دو تابعی وجود نداردکه در شرایط I تا V صدق کند . عدم تناقض دستگاه اصول موضوعه باین‌ترتیب ثابت می‌شود (همانطور که در بالا ثابت‌کردیم) که بتوانیم دو تابع پیداکنیم (بند ۷۱ رابه‌بینید) که‌در مورد آنها اصول موضوعهٔ دستگاه مفروض صادق باشد .

ثانیاًدستگاه خواص‌اصلی(اصول موضوعه) باید جامع‌باشندوبخصوص نبایددستگاه توابع مختلفی درآن صدق‌کنند . این خاصیت جامع‌بودن راهم ما دربند ۶۹ به‌کمك قضیهٔ منحصر بفردبودن توابع ثابت‌کردیم .

اگر با وجود عدم تناقض در نظـریهٔ اصول موضوعی ، خواص اصلی

دستگاه جامع نباشد، علاوه برتوابع مثلثاتی، توابع دیگری هم بدست‌خواهد آمد که شامل این‌خواص‌هستند ودراینصورت چنین‌اصول موضوعه‌ای‌نمی‌توانند بعنوان اساس ساختمان مثلثات بکار روند .

دو دستگاه خواص اصلی مختلفی که به‌کمك هریك از آنها بتوان‌توابع مثلثاتی را معین‌کرد بایستی هم ارز باشند . فرض‌کنید A و B دو دستگاه مختلف اصول موضوعه باشند ، دراینصورت باید بتوان بر اساس دستگاه A ، همهٔ خواصی راکه در دستگاه B ذکر شده است بعنوان نتیجه بدست آوردو و برعکس بر اساس دستگاه B ، خواصی راکه در دستگاه A وجود دارد نتیجه‌گرفت .

چند مثال

خواص زیر را بعنوان خواص اصلی توابع C(x) و S(x) در نظر می‌گیریم :

شرایط I ، III و IV را نگه می‌داریم و بجای شرط II رابطهٔ مجموع را برای سینوس درنظر می‌گیریم :

II′ . بازاء تمام مقادیر x و y اتحاد زیر برقرار است :

$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$$

برای سهولت‌کار فرض می‌کنیم $\lambda=\frac{\pi}{2}$. توابع مثلثاتی $\cos x$ و $\sin x$ در هر چهار شرط I ، II′ ، III و IV صدق می‌کنند . ثابت می‌کنیم‌که علاوه بر توابع مثلثاتی ، شرایط نامبرده درتوابع زیر هم‌صدق می‌کنند :

$$C(x)=a^{x}\cos x \text{ و } S(x)=a^{x-\frac{\pi}{2}}\sin x$$

تحقیق صادق بودن شرایط I ، III و IV واضح است . شرط II′ را تحقیق می‌کنیم :

$$S(x+y)=a^{x+y-\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)=$$

$$=(a^{x-\frac{\pi}{۲}}\sin x)(a^{y}\cos y)+(a^{x}\cos x)(a^{y-\frac{\pi}{۲}}\sin y)=$$

$$=S(x)C(y)+C(x)S(y)$$

بازاء مقادیر مختلف a دستگاه توابع مختلفی خواهیم داشت : بازاء $a=۱$ همان دستگاه مثلثاتی بدست‌می‌آید . بنابراین شرایط I ، II′ ، III و IV در مجموعهٔ بی‌نهایت دستگاه توابع‌صدق می‌کنند، یعنی این‌شرایط نمی‌توانند بعنوان نظریهٔ اصل موضوعی توابع مثلثاتی درنظر گرفته شوند .

۲. شرایط زیر را بعنوان خواص اصلی توابع $C(x)$ و $S(x)$ در-نظر می‌گیریم :

I′ . درفاصلهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ معین باشند .

II′ . روابط مجموع برقرار باشد :

$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$$

$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y)$$

III′ . اتحاد زیر برقرار باشد :

$$S^{۲}(x)+C^{۲}(x)=۱$$

IV′ . تابع $S(x)$ در فاصلهٔ $۰<x<\lambda$ مثبت باشد :

$$S(x)>۰$$

V′ . $C(۰)=۱$ و $C(\lambda)=۰$ باشد .

خواص I′ تا V′ نتایجی ازخواص I تا IV هستندکه دربند ۶۸ ذکر کردیم . اگرشرایط I′ تا V′ را خواص اصلی بگیریم میتوان شرایط I تا IV را ازآنها نتیجه گرفت .

خواص I و I′ هم‌ارزند .

اگر در III′ فرض کنیم $x=۰$ ، بدست‌می‌آید :

$$S^{۲}(۰)+C^{۲}(۰)=۱ \implies S(۰)=۰$$

اگر در II′ فرض کنیم $y=-x$ بدست می‌آید :

$$۰ = S(x)C(-x) + C(x)S(-x);$$
$$۱ = C(x)C(-x) - S(x)S(-x)$$

و از این دستگاه بدست می‌آید :

$$S(-x) = -S(x) \; ; \; C(x) = C(-x)$$

بنابراین تابع $C(x)$ زوج و تابع $S(x)$ فرد است .

اگر در اتحاد II'، y را به $-y$ تبدیل واز خاصیت زوج وفردبودن توابع استفاده کنیم ، بدست می‌آید :

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(x)$$

و بنابراین شرط II هم برقرار است .

اگر در III' فرض کنیم $x = \lambda$ بدست می‌آید $S^۲(\lambda) = ۱$ و چون (طبق IV') $S(\lambda) > ۰$ است پس $S(\lambda) = ۱$ می‌شود .

بنابراین توابع $C(x)$ و $S(x)$ درشرط IV هم صدق می‌کنند .

اگر مقدار x در فاصلهٔ (λ و ۰) باشد ، مقدار $\lambda - x$ هم در همین فاصله خواهد بود و بنابراین $S(\lambda - x) > ۰$ می‌شود ودر فاصلهٔ (λ و ۰) داریم : $S(\lambda - x) = S(\lambda)C(x) - C(\lambda)S(x) = C(x) > ۰$

بنابراین شرط III هم صادق است .

بااین‌ترتیب شرایط I تا IV از شرایط I' تا V' نتیجه می‌شود .

شرایط $I' - V'$ ، که هم ارز شرایط $I - IV$ هستند ، می‌توانند بعنوان خواص تعیین‌کنندهٔ توابع مثلثاتی درنظر گرفته شوند .

متذکر می‌شویم که مستقل بودن شرایط I تا IV از یکدیگر بمعنای این نیست که ما حداقل ممکنهٔ خواص اصلی توابع‌مثلثاتی را درنظر گرفته‌ایم در انتخاب شرایط I تا IV ما بیشتر توجه به سادگی وتقارن دراستفاده از دستگاه اصول موضوعی داشته‌ایم . بسادگی دیده می‌شود که می‌توان تعداد شرایطی راکه در اصول موضوعه $I - IV$ ذکر شده است کم کرد . مثلا در

شرط III کافی است تنها یکی از توابع $C(x)$ و $S(x)$ را درفاصلهٔ $(0, \lambda)$ مثبت فرض کرد ، اگر فی‌المثل نامساوی $C(x)>0$ را شرط کنیم، می‌توان نامساوی $S(x)>0$ را بعنوان نتیجه بدست آورد . زیرا کافی است توجه کنیم که بازاء $0<x<\lambda$ داریم : $0<\lambda-x<\lambda$ و بنابراین :

$$S(x)=C(\lambda-x)>0$$

ضمناً به کمك خواص اصلی می‌توان هریك از توابع مثلثاتی را بطور جداگانه هم تعریف کرد. بعنوان نمونه تعریف اصول موضوعی کسینوس را ذکر می‌کنیم.

تعریف. کسینوس تحلیلی به تابعی مانند $C(x)$ گوئیم بشرطی که :

A) در فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ متصل باشد .

B) در معادلهٔ تابعی زیر صدق کند :

$$C(x+y)+C(x-y)=2C(x)C(y);$$

C) برای معادلهٔ $C(x)=0$ ، کوچکترین ریشهٔ مثبتی مانند λ وجود داشته باشد :

بازاء $x=\lambda$: $\quad C(x)=0$

و بازاء $0<x<\lambda$: $\quad C(x)\neq 0$

D) $C(x)>0$ باشد .

نتایج

۱°. تابع $C(x)$ در فاصلهٔ $(0, \lambda)$ مثبت است ، زیرا در این فاصله $C(x)>0$ و $C(x)\neq 0$ است .

۲°. $C(0)=1$. زیرا اگر در رابطهٔ (B) فرض کنیم $x=y=0$

$$2C(0)=2C^2(0)$$

و ازآنجا با درنظر گرفتن شرط (D) بدست می‌آید : $\quad C(0)=1$

۳°. تابع $C(x)$ زوج است . در اتحاد (B) فرض می‌کنیم $x=0$ بدست می‌آید :

$$C(y)+C(-y)=۲C(y) \Longrightarrow C(-y)=C(y)$$

۴°. اتحاد زیر برقرار است :

$$C(x+۲\lambda)=-C(x)$$

زیرا داریم :

$$C(x+۲\lambda)+C(x)=۲C(x+\lambda)C(\lambda)=۰$$

و اگر فرض کنیم $x=۰$ بدست می‌آید : $C(۲\lambda)=-۱$

۵°. رابطهٔ آوند دو برابر صادق است :

$$C(۲x)=۲C^۲(x)-۱$$

زیرا داریم : $C(۲x)+۱=C(۲x)+C(۰)=۲C^۲(x)$

۶°. رابطهٔ تقسیم آوند برقرار است :

$$C(\frac{x}{۲})=\pm\sqrt{\frac{۱+C(x)}{۲}}$$

کافی است در تساوی قبل x را به $\frac{x}{۲}$ تبدیل کنیم .

۷°. تابع $C(x)$ محدود است :

$$|C(x)|\leq۱$$

زیرا اگر برعکس فرض کنیم که بازاء مقداری مانند $x=a$ داشته باشیم $|C(a)|>۱$ ، دراینصورت با توجه به اتحاد (B) داریم :

$$۲C(\lambda+a)C(\lambda-a)=C(۲\lambda)+C(۲a)=۲[C^۲(a)-۱]>۰;$$

ازطرف دیگر :

$$۲C(\lambda-a)C(\lambda+a)=۲C(۲\lambda-(\lambda+a))C(\lambda+a)=$$
$$=-۲C^۲(\lambda+a)\leq۰$$

۸°. تابع $C(x)$ متناوب است و کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت آن ۴λ است .

اولا ۴λ دورهٔ تناوب است زیرا :

$$C(x+4\lambda)=C((x+2\lambda)+2\lambda)=-C(x+2\lambda)=C(x)$$

ثانیاً دورهٔ تناوب مثبتی مانند l کوچکتر از 4λ وجود ندارد. اگر برعکس فرض کنیم که چنین دورهٔ تناوبی وجود داشته باشد، داریم:

$$C(l)=C(0+l)=C(0)=1$$

و: $$C(l)+C(0)=2C^2(\frac{l}{2}) \implies C(\frac{l}{2})=\pm 1$$

اگر $C(\frac{l}{2})=1$ باشد دراینصورت:

$$2C\left(\frac{2\lambda+\frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda-\frac{l}{2}}{2}\right)=-2C\left(2\lambda-\frac{2\lambda+\frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda-\frac{l}{2}}{2}\right)=$$

$$=-2C^2(\lambda-\frac{l}{4})$$

ولی ازطرف دیگر داریم:

$$2C\left(\frac{2\lambda+\frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda-\frac{l}{2}}{2}\right)=C(2\lambda)+C(\frac{l}{2})=0$$

یعنی $C^2(\lambda-\frac{l}{4})=0$ که باشرط اصلی (C) متناقض است.

اگر $C(\frac{l}{2})=-1$ باشد، دراینصورت:

$$0=C(\frac{l}{2})+C(0)=2C^2(\frac{l}{4})$$

از آنجا $C(\frac{l}{4})=0$ می‌شود که متناقض باشرط (C) است.

۶۰. قضیهٔ منحصر بفردبودن تابع $C(x)$، با شرایط A)، B)، C) و D) دوتابع مختلف $C(x)$ و $C_1(x)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

اثبات این قضیه (با بعضی تغییرات جزئی) بهمان ترتیبی است که در

بند ۶۹ ذکر کرده‌ایم .

نتیجه . تابع $C_\lambda(x)$ که در بند ۶۸ تعریف‌شده‌است درشرایط (A)، (B)، (C) و (D) صدق می‌کند و بنابراین تابع دیگری وجود ندارد که بااین‌شرایط تعریف شود :

$$C(x) = C_\lambda(x) = \cos\frac{\pi}{2\lambda}x.$$

۷۳ . غیرجبری بودن توابع مثلثاتی

خاصیت غیرجبری بودن توابع مثلثاتی نتیجه‌ای از قضیهٔ زیر است .

قضیه . هیچیك از توابع $S(x)$ و $C(x)$ در یك معادلهٔ جبری صدق نمی‌کنند .

اثبات . ابتدا تابع $S(x)$ را در نظر می‌گیریم . باید ثابت‌کنیم که کثیرالجمله‌ای مانند $P(x, y)$ (که متحد باصفر نیست) وجود ندارد که با قراردادن $y = S(x)$ اتحاد زیر را بدست‌آوریم :

$$P(x, S(x)) \equiv 0 \qquad (1)$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم . فرض می‌کنیم کثیرالجملهٔ $P(x, y)$ (که متحد با صفر نیست) وجود داشته‌باشد که در اتحاد (۱) صدق کند. کثیرالجملهٔ $P(x, y)$ را برحسب قوای y منظم می‌کنیم :

$$P(x, y) = p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + yp_1(x) + p_0(x)$$

ضمناً طبق شرط لااقل یکی ازکثیرالجمله های $p_0(x)$ ، $p_1(x)$ ، ... ،

$p_n(x)$ متحد با صفر نیست . $y=S(x)$ قرار می‌دهیم ، اتحاد زیر را بدست می‌آوریم :

$$p_n(x)S^n(x)+p_{n-1}(x)S^{n-1}(x)+\cdots+$$
$$+p_1(x)S(x)+p_0(x)\equiv 0$$

مقدار $S(x)$ بازاء مجموعهٔ بی‌نهایت مقادیر آوند $x=2k\lambda$ مساوی صفر است (در حالت خاص ، برای تابع $\sin x$ داریم : $\lambda=\frac{\pi}{2}$) ، که در آن k عدد دلخواه صحیحی‌است. اگر فرض کنیم $y=0$، معادلهٔ جبری $P_0(x)=0$ بدست می‌آید که بایستی مجموعهٔ بی‌نهایت جواب $x=2k\lambda$ را داشته‌باشد. بنابراین $p_0(x)\equiv 0$ می‌شود ومعادله ای که (طبق فرض) تابع $S(x)$ در آن صدق می‌کند بصورت زیر درمی‌آید :

$$y[p_1(x)+p_2(x)\cdot y+\cdots+p_n(x)\cdot y^{n-1}]=0$$

بنابراین ، بازاء همهٔ مقادیر x ، برای $y=S(x)$ بایدداشته باشیم یا :

$$p_1(x)+p_2(x)\cdot y+\cdots+p_n(x)\cdot y^{n-1}=0 \qquad (2)$$

و یا :
$$S(x)=0 \qquad (3)$$

تساوی(۳) تنها بازاء مقادیر $x=2k\lambda$ برقرار است، بنابراین بازاء بقیهٔ مقادیر x ، تساوی (۲) صحیح است . ولی‌تساوی (۲) هم بازاء مقادیر $x=2k\lambda$ صحیح است، زیرا سمت چپ‌تساوی(۲) درحوالی نقاط $x=2k\lambda$ واحتمالا خود نقاط $x=2k\lambda$ مساوی صفر است و بعلت متصل بودن تابع، سمت چپ تساوی بازاء $x=2k\lambda$ هم مساوی صفر می‌شود . بنابراین تساوی (۲) هم به اتحاد تبدیل می‌شود وبا تکرار استدلال قبل نتیجه‌می‌شود که $p_1(x)\equiv 0$ و بهمین ترتیب $p_2(x)\equiv 0$ و... وبالاخره $p_n(x)\equiv 0$.

باین ترتیب ، برخلاف فرض ، $P(x, y)$ کثیرالجمله‌ای متحدباصفر می‌شود . یعنی تابع $S(x)$ درهیچ معادلهٔ جبری صدق نمی‌کند .

تابع $C(x)$ هم غیرجبری است . زیرا اگر این تابع‌در معادلهٔ جبری زیر صدق کند :

$$p_0(x)+p_1(x)\cdot C(x)+\cdots+p_n(x)\cdot C^n(x)=0$$

با تبدیل $C(x)$ به $\pm\sqrt{1-S^2(x)}$ در آن و سپس گویا کردن معادلهٔ گنگی که بدست می‌آید ، معادلهٔ جبری بدست می‌آید که $S(x)$ درآن صدق می‌کند ، چیزی که قبلا غیرممکن‌بودن‌آنرا ثابت‌کردیم .

نتیجه . قوانین مربوط به توابع مثلثاتی $C(x)$ و $S(x)$ رانمی‌توان به وسیلهٔ اعمال جبری‌که روی آوند انجام می‌شود ، بیان‌کرد .

درحقیقت ، اگر مثلا تابع $S(x)$ بتواند بصورت :

$$S(x)=Q(x)$$

(که درآن $Q(x)$ عبارتی جبری است) نوشته شود ، در اینصورت (برخلاف آنچه ثابت‌کردیم) تابع $S(x)$ در معادلهٔ جبری بصورت $P(x \text{ و } y)=0$ صدق می‌کند .

باین‌ترتیب نمی‌توان توابع مثلثاتی‌را تنها باکمك اعمال‌جبری که‌روی آوند انجام می‌شود ، بیان کرد . بیان‌توابع مثلثاتی به‌کمك رشته‌های‌توانی، علاوه برآنکه شامل اعمال جبری روی آوند است ، شامل اعمال مربوط به محاسبهٔ حد (محاسبهٔ مجموع یك‌رشتهٔ بی‌نهایت) نیزهست .

۷۴. محاسبهٔ مقادیر توابع مثلثاتی باروشهای تحلیلی

بیان‌توابع مثلثاتی به‌کمك رشته‌های توانی وسیلهٔ مناسبی است که‌بتوانیم مقادیر این توابع را با هر تقریب دلخواه محاسبه‌کنیم . میدانیم که بـرای

محاسبهٔ توابع مثلثاتی مقدار مفروضی ازآوند، کافی است مقادیرتوابع‌مثلثاتی مقادیری از آوندکه در فاصلهٔ بستهٔ $0<x<\frac{\pi}{4}$ واقع باشد ، در دست داشته باشیم (برای این منظورکافی است که از روابط تبدیل استفاده‌کنیم . بند ۲۲ را به‌ببینید) . بهمین مناسبت جدولهای مقادیر توابع مثلثاتی را معمولا برای زوایای از صفر تا ۴۵ درجه تنظیم می‌کنند . بنابراین فرض می‌کنیم‌که $0<x<\frac{\pi}{4}$ باشد، وچون $\frac{\pi}{4}<1$ است ، باتوجه به‌شرط $0<x<1$ رشته‌های:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

رشته‌های متناوبی هستندکه قدر مطلق جملات آنها نزولی است وهمانطورکه در نظریهٔ رشته‌ها ثابت شده است ، مجموع یك رشتهٔ متناوب‌که جمله‌های نزولی (ازلحاظ قدرمطلق)دارد، بین‌دومجموع جزئی متوالی‌آن قراردارد، بنابراین داریم :

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x;$$

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120};\dots$$

و بهمین ترتیب می‌توان نامساویهای مربوط به‌کسینوس را تنظیم‌کرد .

وقتی‌که مقادیر توابع مثلثاتی‌آوند مفروضی را (که درفاصلهٔ $0<x<1$ واقع است) با تبدیل رشتهٔ مربوطه به مجموع جزئی آن محاسبه می‌کنیم یعنی چند جملهٔ اول رشته را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم ، خطای موجود از لحاظ قدر مطلق‌کوچکتر از اولین جملهٔ حذف شده خواهد بود .

فرض کنید که مثلا بخواهیم جدول پنج رقمی مقادیر سینوس را تنظیم کنیم. چهار جملهٔ اول رشته را حفظ می‌کنیم ، در اینصورت بعنوان مقدار تقریبی خواهیم داشت :

$$\sin x \# x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!} \qquad (1)$$

با خطائی کوچکتر از $\frac{x^{9}}{9!}$ و باتوجه باینکه داریم : $0<x<\frac{\pi}{4}<0/8$

خواهیم داشت :

$$\frac{x^{9}}{9!}<\frac{(0/8)^{9}}{9!}<\frac{0/2}{362880}<0/000001$$

بنابراین ، رابطهٔ تقریبی (۱) برای تنظیم مقادیر جدول پنج رقمی سینوسی کافی‌خواهد بود . باید توجه داشت که برای مقادیر کوچکتر آوند از تعداد کمتری جملات هم می‌توان استفاده کرد .

چند مثال

۱. ثابت کنید که برای تنظیم جدول چهار رقمی مقادیر سینوس‌زوایای صفر تا ۱۵ درجه‌کافی است ازرابطهٔ تقریبی $\sin x = x-\frac{x^{3}}{6}$ استفاده کنیم:

زاویهٔ ۱۵ درجه برحسب‌رادیان برابر $\frac{\pi}{12}\#0/2618<0/3$ خواهد بود . با استفاده از رابطهٔ مفروض ، خطائی باین‌ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{x^{5}}{5!}<\frac{(0/3)^{5}}{120}=\frac{3^{5}}{120\times10^{5}}=\frac{3^{4}}{4\times10^{6}}<0/00002$$

۲. بادقت پنج رقم اعشار $\cos 24°30'$ را محاسبه کنید .

حل . زاویهٔ $24°30'$ برحسب رادیان $0/427606$ است . از رابطهٔ تقریبی زیر استفاده می‌کنیم :

$$\cos x = 1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}$$

با خطائی کمتر از: $\frac{x^8}{8!} < \frac{(0/5)^8}{8!} = \frac{5^8}{8!10^8} < 0/0000005$

با فرض $x = 0/427606$ داریم :

جملات منفی	جملات مثبت
$\frac{x^2}{2!} = 0/091422$	$1 = 1/000000$
$\frac{x^6}{6!} = 0/000008$	$\frac{x^4}{4!} = 0/001393$
$0/091430$	$1/001393$

که پس از محاسبه خواهیم داشت :

$$\cos 24^\circ 30' \# 0/90996$$

۷

توابع مقدماتی غیر جبری در حوزهٔ اعداد مختلط

در این فصل بطور مختصر (و تا حد امکان مقدماتی) اطلاعاتی درباره توابع غیر جبری مقدماتی باآوند مختلط ذکر می‌کنیم. مطالعهٔ همه جانبهٔ توابع مقدماتی در حوزهٔ اعداد مختلط یکی از مباحث نظریهٔ توابع تحلیلی را تشکیل می‌دهد ودر همانجا هم مورد بحث قرار می‌گیرد. در بندهای زیر توجه اساسی را به مطالعهٔ خواصی از توابع مقدماتی غیر جبری معطوف می‌کنیم‌که باکمك جبرمقدماتی ومثلثات قابل بحث هستند.

۷۵. تابع نمائی در حوزهٔ اعداد مختلط و ارتباط آن با توابع مثلثاتی

یکی از خواصی‌که مشخص تابع نمائی است، معادلهٔ تابعی زیراست:

$$f(z_۱+z_۲)=f(z_۱)\cdot f(z_۲) \qquad (۱)$$

که بایستی بازاء مقادیر مختلط دلخواه $z_۱$ و$z_۲$ صادق باشد. حالا به دونوع تعریف تابع نمائی e^x می‌پردازیم، روش اول بر اساس استفاده از رشته‌های توانی وروش دوم بدون استفاده از آنها قرار دارد.

روش اول. تابعی با آوند مختلط جستجو می‌کنیم‌که در شرایط زیر صدق کند:

I. تابع $f(z)$ تابع صحیح غیر جبری است، یعنی می‌تواند بصورت مجموع یك رشتهٔ توانی بیان شودکه بازاء همهٔمقادیر مختلط آوند متقارب باشد.

II. تابع $f(z)$ بازاء همهٔ مقادیر مختلط $z_۱$ و $z_۱$ در معادلهٔ تابعی (۱) صدق می‌کند.

برای اثبات وجود تابع $f(z)$ ، رشتهٔ توانی می‌سازیم که مجموع آن در شرایط I و II صدق کند. فرض می کنیم :

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots;$$

این رشته ، طبق شرط I ، بازاء همهٔ مقادیر z متقارب است . اگر بطور جداگانه قسمتهای سمت چپ وسمت راست تساوی (۱) را محاسبه کنیم ، سمت چپ تساوی چنین می‌شود :

$$f(z_1+z_2)=a_0+a_1(z_1+z_2)+a_2(z_1+z_2)^2+\cdots+$$
$$+a_n(z_1+z_2)^n+\cdots$$

برای محاسبهٔ سمت‌راست‌تساوی(۱) باید دورشتهٔ توانی‌زیررا درهم‌ضرب کنیم:

$$f(z_1)=a_0+a_1z_1+\cdots+a_nz_1^n+\cdots$$

$$f(z_2)=a_0+a_1z_2+\cdots+a_nz_2^n+\cdots$$

گروه جملات درجهٔ n رشتهٔ حاصلضرب کثیرالجملهٔ متجانس زیر است :

$$a_0a_nz_1^n+a_1a_{n-1}z_1^{n-1}z_2+a_2a_{n-2}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots+a_na_0z_2^n$$

طبق شرط ، این گروه جملات ، بازاء هرمقدار صحیح ودلخواه n باید با کثیرالجملهٔ زیر متحد باشد :

$$a_n(z_1+z_2)^n=a_nz_1^n+a_nC_n^1x_1^{n-1}z_2+\cdots+$$
$$+a_nC_n^kz_1^{n-k}z_2^k+\cdots+a_nz_2^n$$

شرایط لازم برای ضریب مجهول a_i ، از مساوی قرار دادن ضرایب متناظر در دو عبارتی که برای گروه جملات درجه n بدست آوردیم ، پیدا می‌شود (بازاء : ... و۲ و۱ و ۰ $=n$). بخصوص بازاء هرمقدار دلخواه n خواهیم داشت : $a_0a_n=a_n$. طبق شرط ، رشته بی‌نهایت است (یعنی برای‌مجموعهٔ بی‌نهایت مقدار n : $a_n\neq 0$) و بنابراین $a_0=1$ می‌شود . بامساوی‌قرار

دادن ضرایب $z_2 \cdot z_1^{n-1}$ رابطهٔ برگشتی زیررا بدست می‌آوریم :

$$na_n = a_1 a_{n-1}$$

و ازآنجا : $a_2 = \frac{a_1^2}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3} a_1 a_2 = \frac{a_1^3}{1 \times 2 \times 3}$;.....

اگر فرض کنیم $a_{n-1} = \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}$ ، از رابطهٔ $a_1 a_{n-1} = na_n$ بدست می‌آید : $a_n = \frac{a_1^n}{n!}$. بنابراین تنها یك دستگاه منحصر بفرد برای مقادیر ضرایب رشتهٔ مجهول بدست می‌آید .

فرض می‌کنیم که رشتهٔ :

$$1 + a_1 z + \frac{a_1^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{a_1^n}{n!} z^n + \dots \qquad (2)$$

در تمام شرایط مورد نظر صدق کند .

شرط I برقرار است ، زیرا رشتهٔ (۲) بازاء تمام مقـادیر z متقارب است (کافی است مثلا از نسبت تقارب مطلق دالامبر استفاده کنیم) . بنابراین مجموع رشتهٔ (۲) تابع غیرجبری صحیح $f(z)$ است . شرط II هم برقرار است ، زیرا اگر دو رشتهٔ زیر را درهم ضرب کنیم :

$$f(z_1) = 1 + a_1 z_1 + \frac{(a_1 z_1)^2}{1 \times 2} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \dots$$

$$f(z_2) = 1 + a_1 z_2 + \frac{(a_1 z_1)^2}{1 \times 2} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} + \dots$$

رشته‌ای با جملات عمومی زیر بدست می‌آید :

$$\frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \frac{(a_1 z_1)^{n-1} a_1 z_2}{(n-1)!1!} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^{n-k} (a_1 z_2)^k}{(n-k)!k!} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} = \frac{a_1^n (z_1 + z_2)^n}{n!}$$

مجموع رشتهٔ حاصلضرب برابر است با مجموع رشتهٔ (۲) بازاء :

$$z = z_1 + z_2$$

بازاء مقادیر مختلف a_1 توابع مختلفی بدست می‌آید که در شرایط I و II صدق می‌کنند. اگر درحالت خاص $a = 1$ فرض کنیم، تابعی بدست‌می‌آید که آنرا با علامت «expz» نشان می‌دهند :

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

تابع expz بازاء همه مقادیر حقیقی $z = x$ حقیقی و متصل است و در معادلهٔ تابعی (۱) صدق می‌کند . بنابراین تابع expz ، که در حوزهٔ اعداد حقیقی مطالعه می‌شود ، یك تابع نمائی است (درهمین حوزهٔ اعداد حقیقی) :

$$\exp x = a^x$$

که در آن داریم :

$$a = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

مجموع رشتهٔ $\cdots + \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{2!} + 2$ همان عدد e ، مبنای لگاریتم طبیعی است ، زیرا با توجه به نظریهٔ حدود داریم :

$$e = \text{حد}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

بنابراین بازاء همهٔ مقادیر حقیقی x داریم .

$$\exp x = e^x$$

با آنچه گفتیم می‌توان تعریف استدلالی زیر را ذکر کرد :

تعریف . تابع نمائی e^z در حوزهٔ اعداد مختلط به تابع غیر جبری صحیحی گفته می‌شود که بارابطهٔ زیر معین شده باشد :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

فرض کنید z عدد موهومی خالصی باشد: $z=iy$ ، اگر این مقداررا دررشتهٔ توانی قرار دهیم وقسمتهای حقیقی و موهومی آنرا از هم جدا کنیم ، رابطهٔ زیر را بدست خواهیم آورد :

$$e^{iy}=(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\dots)+$$

$$+i(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots)=$$

$$=\cos y+i\sin y$$

که عبارتست ازبیان تابع نمائی باآوند موهومی خالص بصورت توابع مثلثاتی.

برای تابع نمائی با آوند دلخواه مختلط $z=x+iy$ رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

بازاء $z=\pm iy$ داریم :

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \quad ; \quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y \qquad (A)$$

باکمك روابط اخیر می‌توان بیان توابع مثلثاتی را بصورت تابع نمائی نوشت:

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}; \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad (B)$$

روابط (A) و (B) به روابط **اولر** مشهورند (به‌نام دانشمند بزرك‌ریاضی‌دان لئونارداولر) .

روش دوم . حالا نظـریهٔ توابع نمائی در حوزهٔ اعداد مختلط را ، بدون استفاده از رشته‌های توانی ذکـر می‌کنیم، برای‌تعمیم تابع e^x بازاء توان مختلط دلخواه شرایط اساسی زیر را در نظر می‌گیریم .

تابع $\exp z$:

I . **بازاء مقادیر حقیقی z ، حقیقی است .**

IV . **درتمام صفحه مختلط ، متصل است .**

III درمعادلهٔ تابعی زیرصدق می‌کند:

$$\exp(z_1+z_2)=\exp z_1 \cdot \exp z_2 \quad ;$$

IV. دومقدار زیر برای $\exp z$ مفروض است:

$$\exp 1 = e \cdot \quad \text{و} \quad \exp\frac{i\pi}{2}=i ،$$

V. وقتی‌که قسمت موهومی‌آوند درفاصلهٔ $\left(0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ واقع باشد،قسمت موهومی تابع $\exp z$ مثبت است:

اگرداشته باشیم: $0<I(z)<\frac{\pi}{2}$ داریم $I(\exp z)>0$ *

درحالت خاص اگرداشته باشیم $z_1=x_1$ و $z_2=x_2$ (اعداد حقیقی)، دراینصورت:

۱°. $\exp(x_1+x_2)=\exp x_1 \cdot \exp x_2;$

۲°. تابع $\exp x$ درفاصلهٔ $(-\infty \text{ و } +\infty)$ متصل است.

بنابراین $\exp x$ تابعی نمائی است بر اساس:

$$a=\exp(1)=e$$

و از آنجا: $\exp x = e^x$

اگر $z=iy$ (عدد موهومی خالص) باشد وفرض کنیم.

$$\exp(iy)=u(y)+iv(y)$$

طبق شرط III داریم:

$$\exp(iy_1+iy_2)=\exp(iy_1)\cdot\exp(iy_2) \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم:

$$\Phi(y)=|\exp(iy)|$$

---

*) قسمت حقیقی b به ضریب i در عدد مختلط $a+bi$ گفته می‌شود و معمولا باین وسیله نشان داده می‌شود: $I(a+bi)=b$

تابع $\Phi(y)$ تابعی حقیقی با آوند y است که‌در فاصلهٔ $-\infty < y < +\infty$ متصل است . با توجه به شرط (۱) ، تابع $\Phi(y)$ در معادلهٔ تابعی زیر صدق می‌کند :

$$\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) \cdot \Phi(y_2) \qquad (2)$$

بنابراین ، $\Phi(y)$ تابعی توانی است : $\Phi(y) = a^y$

با توجه به شرط IV داریم :

$$\Phi(\frac{\pi}{2}) = \left|\exp(i\frac{\pi}{2})\right| = |i| = 1$$

بنابراین $a^{\frac{\pi}{2}} = 1$ و از آنجا $a = 1$ می‌شود و بنابراین داریم :

$$\Phi(y) = \text{مقدار ثابت} = 1$$

و از این شرط نتیجه می‌شود :

$$[\Phi(y)]^2 = u^2(y) + v^2(y) = 1$$

تساوی (۱) را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$u(y_1 + y_2) + iv(y_1 + y_2) = [u(y_1) + iv(y_1)][u(y_2) + iv(y_2)].$$

در طرف راست قسمتهای حقیقی وموهومی را از هم جدا می‌کنیم، تساویهای زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u(y_1 + y_2) = u(y_1)u(y_2) - v(y_1)v(y_2); \\ v(y_1 + y_2) = v(y_1)u(y_2) + v(y_2)u(y_1). \end{cases} \qquad (4)$$

چون $\exp(0) = 1$ است با فرض $y = 0$ داریم :

$$u(0) = 1 \quad ; \quad v(0) = 0$$

وچون $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$ است ، بنابراین :

$$u(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad ; \quad v(\frac{\pi}{2}) = 1$$

و با توجه به شرط V بازاء $0<y<\frac{\pi}{2}$ داریم : $v(y)>0$

از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که توابـع $u(y)$ و $v(y)$ در دستگـاه شرایط (مثال ۲ صفحهٔ ۶۳۲ را به‌بینید) هم‌ارز باشرایط I ـ IV (بند ۶۸ را به‌بینید) صدق می‌کنند وتوابع مثلثاتی را (بازاء $\lambda=\frac{\pi}{2}$) معین‌می‌کنند.

علاوه بر آن توابع $u(y)$ و $v(y)$ هم مثل‌توابع مثلثاتی متصل‌اند ، بنابراین داریم :

$$\exp(iy)=\cos y+i\sin y;$$

و بالاخره :

$$\exp z=\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$$

تابع $\exp z$ ، طبق تعریف ، بازاء همهٔ مقادیر مختلط آوند z بعنوان تعمیم تابع توانی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و بهمین مناسبت فرض‌می‌کنند :

$$e^z=\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

در حالت‌خاص بازاء $z=\pm iy$ روابط اولر (صفحهٔ ۶۴۸) بدست می‌آید .

تبصره. بیان تابع نمائی باآوند مختلط را بصورت رشتهٔ توانی‌می‌توان بعنوان نتیجه‌ای از تساوی زیر بدست آورد :

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

برای این منظورکافی است توابع $e^x\cos y$ و $\sin y$ باآوندحقیقی رابه‌رشته‌های توانی تبدیل وضرب رشته‌ها را انجام دهیم .

چند مثال .

۱. $$e^i=\cos 1+i\sin 1$$

۲. $$e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$$

۳. $$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

۴. $$e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i$$

خواص اساسی تابع توانی .

۱°. تابع توانی بازاء همهٔ مقادیر z مخالف صفر است .

درحقیقت فرض $e^z = ۰$ با تساوی زیر متناقض است :

$$e^z \cdot e^{-z} = ۱$$

۲°. تابع e^z متناوب است و کوچکترین دورهٔ تناوب آن $۲\pi i = l$ است .

درحقیقت داریم :

$$e^{z+۲\pi i} = e^z + e^{۲\pi i} = e^z(\cos ۲\pi + i \sin ۲\pi) = e^z$$

در حالت خاص $e^{۲k\pi i} = ۱$ است که درآن k عددصحیح دلخواهی است.

۳°. هردورهٔ تناوب ω ازتابع توانی e^z ، مضربی از $۲\pi i$ است یعنی $\omega = ۲k\pi i$. زیرا اگر $\omega = \alpha + i\beta$ ، دورهٔ تناوب تابع توانی باشد ،

داریم: $e^{\omega} = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta) = ۱$;

از آنجا : $e^{\alpha}\cos\beta = ۱$ ؛ $e^{\alpha}\sin\beta = ۰$

بنابراین $\sin\beta = ۰$ و $\beta = n\pi$ می‌شود . ازشرط $e^{\alpha}\cos n\pi = ۱$

بدست می‌آید : $e^{\alpha} = ۱$ و $\cos n\pi = ۱$ و از آنجا $\alpha = ۰$ و $n = ۲k$ و $\omega = \alpha + i\beta = ۲k\pi i$ می‌شود .

۴°. هرعدد مختلط $z = a + bi$ را می‌توان به‌کمك یك تابع توانی بصورت : $z = re^{i\varphi}$ نشان داد که درآن $r = |z|$ و $\varphi = \arg z$ است، ضمنا آوند φ با تقریب $۲\pi i$ معین می‌شود .

در این موردکافی است z را بصورت مثلثاتی درآوریم :

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$ (وقتی که $z = ۰$ باشد، $r = ۰$ می‌شود و بعنوان φ می‌توان هرعدد دلخواه اختیارکرد) .

۵°. تعبیر تابع نمائی. فرض کنید $w=e^z$ ، اگر $z=x+iy$ و $w=u+iv$ باشد ، داریم :

$$u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)$$

ویا :
$$u=e^x\cos y \ ; \ v=e^x\sin y$$

وچون e^z تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است ، کافی است آنرا در همین فاصله مورد مطالعه قرار دهیم :

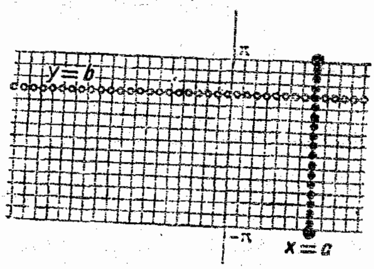
$$-\infty<x<+\infty \ ; \ -\pi<y\leqslant\pi$$

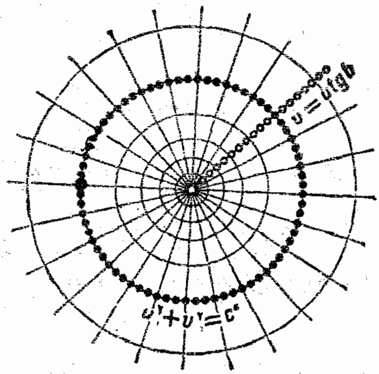
اگر فرض کنیم $y=b$ که در آن $-\pi<b\leqslant\pi$ است ، بدست می‌آید :

$$u=e^x\cos b \ ; \ v=e^x\sin b$$

معادلات اخیر در صفحهٔ uov، معادلات پارامتری نیم خط $v=u\,tg\,b$ هستند که از مبداء مختصات می‌گذرند وبا محور طول زاویه‌ای مساوی b می‌سازند. بنابراین خطوط موازی Ox متناظرند با نیم‌خطهائی که درصفحهٔ w از مبداء مختصات عبور می‌کنند (خود مبداء استثنا است ، $w\neq 0$) . حالا فرض می‌کنیم $x=a$ ، دراینصورت معادلهٔ پارامتری دایره را بدست می‌آوریم :

$$u=e^a\cdot\cos y \ ; \ v=e^a\cdot\sin y \qquad (-\pi<y\leqslant\pi)$$





ش ۲۶۰

بنابراین ، پاره‌خط موازی محور Oy متناظر با دایرهٔ به‌مرکز مبداء مختصات است . شعاع دایرهٔ متناظر بـا پاره خط $x=a$ برابر e^a است ، پاره خطهای واقع در نیم صفحهٔ راست (بازاء $a>0$) با دایره‌هائی به شعاع بزرگتر از واحد متناظرند و پاره خطهای واقع در نیم صفحهٔ چپ (بازاء $a<0$) متناظر بادایره‌های به شعاع کوچکتر از واحد هستند(شکل ۲۶۰).

باین ترتیب شبکهٔ مختصات دکارتی در صفحهٔ z متناظر است با شبکهٔ مختصات‌قطبی درصفحهٔ w که ازآن تنها نقطهٔ $w=0$ استثنا است(شکل ۲۶۰).

و با توجه به متناوب بودن‌تابع توانی ، هریك ازخطوط :

$$-\infty<x<+\infty \;;\; (2k-1)\pi<y\leqslant(2k+1)\pi$$

باستثنای $w=0$ ، متناظری در صفحهٔ w دارند .

۷۶ . توابع‌مثلثاتی با آوند مختلط

تعریف . توابع مثلثاتی $\cos z$ و $\sin z$ به‌توابعی‌گوئیم‌که باروابطزیر مشخص‌شده باشند :

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \;;\; \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad (1)$$

این توابع در حوزهٔ مجموعهٔ **همهٔ اعداد مختلط** معین‌اند . در حالت خاص یعنی وقتی‌که z عددی حقیقی باشد ، بنابر روابط اولر (صفحهٔ ۶۴۸را به‌بینید) ، توابعی‌که با تساوی (۱) تعریف شدند بـا توابع مثلثاتی با آوند حقیقی تطبیق می‌کنند .

اگر توابع‌نمائی e^{iz} و e^{-iz} را به‌رشته‌های توانی (برحسب‌توانهای z) تبدیل‌کنیم و در رابطهٔ (۱) قرار دهیم ، بیان‌کسینوس و سینوس بصورت

رشته‌های توانی بدست می‌آید :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \;;\; \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

که بازاء همهٔ مقادیر مختلط z صحیح‌اند .

از روابط (۱) نتیجه می‌شود که تساویهای :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ و } e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

بازاء مقادیر دلخواه ومختلط z صادق‌اند .

چند مثال .

۱.
$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e} \;;$$

$$\sin i = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e - e^{-1}}{2} i = \frac{e^2 - 1}{2e} i$$

۲.
$$\cos(1 - i) = \frac{e^{(1-i)i} + e^{-(1-i)i}}{2} =$$

$$= \frac{e^i . e^{-i^2} + e^{-i} . e^{i^2}}{2} = \frac{e}{2} e^i + \frac{1}{2e} e^{-i} = \frac{e}{2}(\cos 1 + i \sin 1) +$$

$$+ \frac{1}{2e}(\cos 1 - i \sin 1) = \frac{e^2 + 1}{2e} \cos 1 + i \frac{e^2 - 1}{2e} \sin 1$$

. خواص اساسی توابع مثلثاتی

۱°. قضایـای مجموع ،که در مورد توابع مثلثاتی بـا آوند حقیقی صادق‌اند ، درمورد توابع‌مثلثاتی باآوند مختلط نیزصحیح هستند .

مثلا :

$$\cos(z_1 - z_2) = \frac{e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 - z_2)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{iz_1} \cdot e^{-iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{iz_2}}{2} =$$

$$\frac{(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)+(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)}{2}$$

$$=\cos z_1\cos z_2+\sin z_1\sin z_2$$

و بهمین ترتیب می‌توان‌بقیهٔ قضایای مجموع را نیز نتیجه گرفت .

تبصره. قضایای مجموع را می‌توان مستقیماً و با کمك ضرب رشته‌ها بدست آورد (شبیه روشی که درضرب‌رشته‌ها درصفحهٔ ۶۱۸ بکاربردیم).

۲°. از رابطهٔ (۱) اتحاد زیر بدست می‌آید :

$$\cos(-z)=\cos z\ ;\ \ \sin(-z)=-\sin z\ ;\ \sin^2 z+\cos^2 z=1$$

۳° توابع $\cos z$ و $\sin z$ درهرصفحهٔ مختلطی نامحدودند . ☆

مثلا تابع $\cos z$ را روی محور موهومی در نظر می گیریم ، داریم :

$$\cos iy=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\ \text{و}\ \lim_{y\to\infty}\cos iy=+\infty$$

۴°. از قضایای مجموع (وبهمان روشی‌که دربند ۲۲ صحبت‌کردیم) می‌توان روابط تبدیل را نتیجه‌گرفت .

۵°. توابع $\cos z$ و$\sin z$ متناوب‌اند ودورهٔتناوب‌آنها حقیقی ومساوی 2π است ، مثلا :

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{zi}.e^{2\pi i}+e^{-iz}.e^{-2\pi i}}{2}=\frac{e^{zi}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

وهر دورهٔ تناوبی ازکسینوس وسینوس بصورت $2k\pi$ ، یعنی مضربی از 2π، است . زیرا اگر فی‌المثل $\omega=\alpha+i\beta$ دورهٔ تناوب کسینوس باشد ، باید داشته باشیم :

$$\cos\omega=\cos 0=1 \implies e^{2\omega i}-2e^{\omega i}+1=0$$

☆) محدود نبودن توابع مثلثاتی را از قضایای عمومی نظریهٔ توابع تحلیلی در بارهٔ توابع غیر جبری صحیح هم‌میتوان‌نتیجه‌گرفت.

و از آنجا $e^{i\omega}=1$ و یا (به صفحهٔ ۶۵۲ مراجعه کنید) $i\omega=2k\pi i$ یعنی $\omega=2k\pi$ می‌شود.

۶۰. تابع $\cos z=\cos(x+iy)$ روی محور حقیقی $y=0$ و روی خطوط $x=k\pi$ حقیقی است و در بقیهٔ نقاط z، مقادیری موهومی دارد.

اثبات. اگر قسمتهای حقیقی و موهومی کسینوس را ازهم جدا کنیم، بدست می‌آید:

$$\cos z=\cos(x+iy)=\frac{e^{(x+iy)i}+e^{(-x-iy)i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{-y}.e^{ix}+e^{y}.e^{-ix}}{2}=$$

$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2}=$$

$$=\cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-i\sin x\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y^{*}$$

مقدار $\cos z$ تنها وقتی حقیقی است که داشته باشیم:

یا: $\sin x=0$ و یا: $\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=0$

و بنابراین بنابر خواص معلوم سینوس با آوند حقیقی خواهیم داشت:

یا: $x=k\pi$ و یا: $e^{y}=e^{-y}$ یعنی $y=0$

از رابطهٔ: $\sin z=\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$

نتیجه می‌شود که مقادیر $\sin z$ روی محور حقیقی $y=0$ و روی خطوط $x=k\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{2k-1}{2}\pi$ حقیقی است.

* میدانیم که توابع $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ و $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ را کسینوس هیپربولیك و سینوس هیپربولیك می‌نامند و بصورت $\mathrm{ch}x$ و $\mathrm{sh}x$ نمایش می‌دهند.

در حالت خاص تمام مقادیر مختلط $z=x+iy$ را پیدا می‌کنیم که بازاء آنها $\cos z=0$ باشد . این مقادیر از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\cos x \operatorname{ch} y=0 \quad ; \quad \sin x \operatorname{sh} y=0$$

چون $\operatorname{ch} y>0$ است ، از معادلهٔ اول $\cos x=0$ و $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ می‌شود

از معادلهٔ دوم بدست می‌آید $\operatorname{sh} y=0$ وازآنجا $e^y=e^{-y}$ و $y=0$ می‌شود.

بنابراین $z=\frac{2k+1}{2}\pi$. باین‌ترتیب معادلهٔ $\cos z=0$ دارای ریشه‌های موهومی نیست .

برای یافتن مقادیری از z که بازاء آنها $\sin z=0$ باشد ،کافی است معادلهٔ زیر را حل کنیم :

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=0 \implies z+\frac{\pi}{2}=\frac{2k+1}{2}\pi \implies z=k\pi$$

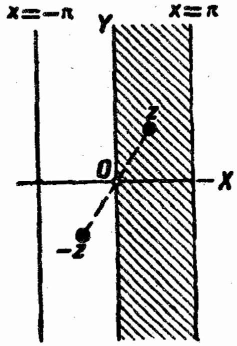
۷°. تعبیر توابع مثلثاتی . تابع $\cos z$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم :

$$w=u+iv=\cos z ;$$

بدست می‌آوریم (به شمارهٔ قبل مراجعه کنید) :

$$u=\cos x \operatorname{ch} y \ , \ v=-\sin x \operatorname{sh} y .$$

به‌علت متناوب بودن تابع $\cos z$ ، کافی است آنرا تنها در حوزهٔ $-\pi<x<\pi$ بررسی کنیم . $\cos z$ تابعی است زوج : $\cos z=\cos(-z)$ ، یعنی نقاط z و $-z$ که درصفحهٔ xOy نسبت به‌مبداءمختصات قرینهٔ یکدیگرند، درصفحهٔ uOv بیک نقطهٔ w تبدیل می‌شوند (شکل ۲۶۱) .



ش ۲۶۱

بنابراین کافی است $\cos z$ را تنها در

حوزهٔ $0<x<\pi$ مطالعه کنیم .

بازاء $x=0$ داریم :

$$u=\cos iy=\text{ch}\,y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2};\quad v=0$$

تابع chy در فاصلهٔ $-\infty<y<0$ از $+\infty$ تا ۱ نزولی و در فاصلهٔ $0<y<+\infty$ از ۱ تا $+\infty$ صعودی است ، بنابراین محورموهومی Oy متناظر است با نیم‌خطی (یا صحیح‌تر دو نیم‌خط منطبق برهم) از محور حقیقی در صفحهٔ uOv :

$$1<u<+\infty\;;\quad v=0$$

بازاء $x=\pi$ داریم :

$$u=-\text{ch}\,y\;;\quad v=0$$

بهمین‌ترتیب ثابت می‌شود که خط $x=\pi$ متناظر است با نیم خطی (یا صحیح‌تردو نیم منطبق برهم) از محور حقیقی :

$$-\infty<u<-1\;;\quad v=0$$

پاره‌خط $y=c$ ، $0<x<\pi$ ، با شرط $c\neq 0$ ، که‌موازی محورحقیقی است ، با منحنی زیر متناظر است :

$$u=\text{ch}\,c\cos x\;;\quad v=-\text{sh}\,c\sin x\;;$$

و این بیضی است به معادلهٔ :

$$\frac{u^{2}}{\text{ch}^{2}c}+\frac{v^{2}}{\text{sh}^{2}c}=1\;;$$

که متناظر با فاصلهٔ بستهٔ $0<x<\pi$ می‌باشد . بازاء $c>0$ داریم $v<0$ ، و بازاء $c<0$ داریم $v>0$ ؛ بنابراین بازاء $c>0$ نیم بیضی پائین و بازاء $c<0$ نیم بیضی بالا بدست می‌آید .

بازاء $c=0$ ، بیضی به پاره‌خطی از محور حقیقی تبدیل می‌شود :

$-1<u<1$ ، $v=0$. خط $x=c$ ، که در آن $0 \leqslant c \leqslant \pi$ و $c \neq \frac{\pi}{2}$ است و موازی با محور موهومی است با منحنی زیر متناظر است :

$$u=\cos c\, ch y \ ; \ v=-\sin c\, sh y \ ;$$

که در آن $-\infty<y<+\infty$ می‌باشد . واین هذلولی است به معادلهٔ :

$$\frac{u^2}{\cos^2 c}-\frac{v^2}{\sin^2 c}=1^{\circ}$$

ضمناً اگر $0<c<\frac{\pi}{2}$ باشد ، شاخهٔ راست و اگر $\frac{\pi}{2}<c<\pi$ باشدشاخهٔچپ هذلولی بدست می‌آید ، زیرا درحالت اول $u>0$ ودرحالت دوم $u<0$است وقتی‌که $c=\frac{\pi}{2}$ باشد ، هذلولی به‌محور موهومی $u=0$ تبدیل می‌شود .

بنابراین شبکهٔ مختصات دکارتی در حوزهٔ مورد مطالعه ، به‌خانوادهٔ بیضی‌هاو هذلولی‌هائی مربوط می‌شودکه کانونهای آنها نقاط ± 1 است (که بسادگی ثابت میشود) (شکل ۲۶۲) .

تابع $tg z$ بوسیلهٔ رابطهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$tg z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

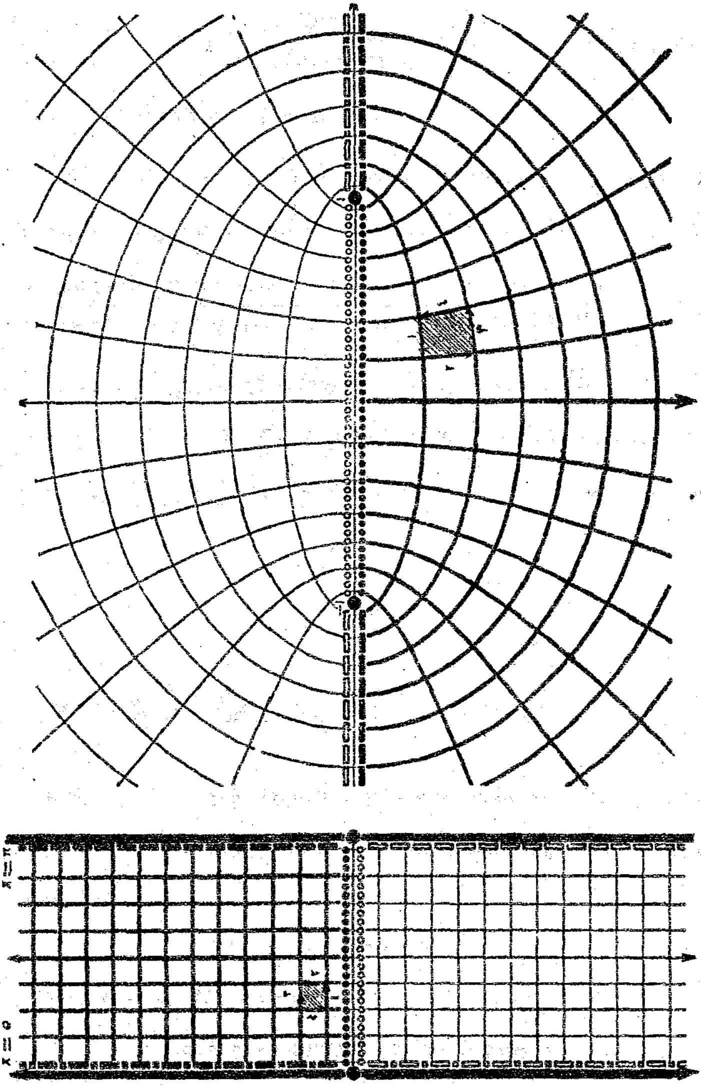
تانژانت بازاء همهٔ مقادیر z ، بجز ریشه‌های معادله $\cos z=0$ یعنی اعداد $z=\frac{2k+1}{2}\pi$ ، دارای مفهوم است .

اثبات قضایـای مجموع را برای تـانژانت می‌توان بطریق معمولی انجام داد .

تانژانت تابعی متناوب است وهر دورهٔ تناوب آن مضربی از π است،

°) اتحاد زیر را درنظر داشته باشید :

$$ch^2 y-sh^2 y=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2=1$$



ش ۲۶۲

درحقیقت اگر ω دورهٔ تناوبی از تانژانت باشد، لازم و کافی است داشته باشیم:

$$tg(z+\omega)-tgz=\cdot \Longrightarrow \frac{\sin\omega}{\cos(z+\omega)\cos z}=\cdot\ ;$$

از آنجا $\sin\omega=\cdot$ و $\omega=k\pi$ می‌شود:

بازاء مقادیر حقیقی z ، مقدار tgz حقیقی وبازاء مقادیر موهومی z، مقدار tgz موهومی است . درحقیقت اگر $z=x+iy$ باشد، داریم :

$$tgz=\frac{\text{۱}}{i}\,\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}=\frac{\text{۱}}{i}\cdot\frac{-\cos x\,shy+i\sin x\,chy}{\cos x\,chy-i\sin x\,shy}$$

و اگر قسمت موهومی tgz را مساوی صفر بگیریم، بدست می‌آید :

$$\cos^{\text{۲}}x\,shy\,chy+\sin^{\text{۲}}x\,shy\,chy=shy\,chy=\cdot$$

و چون $chy>\cdot$ است $shy=\cdot$ شود و از آنجا بدست می‌آید : $y=\cdot$

۷۷ . توابع لگاریتمی

فرض کنید $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$، عددی مختلط ومخالف‌صفر باشد. طبق تعریف ، لگاریتم طبیعی عدد z عبارتست ازعددی مثل w که در معادلهٔ زیر صدق کند :

$$z=e^{w}\qquad(\text{۱})$$

اگر $w=u+iv$ باشد ، داریم :

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{u}(\cos v+i\sin v)$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$e^{u}=r\ ;\ v=\varphi+\text{۲}k\pi$$

یا : $n=\ln\ ;\ v=\varphi+\text{۲}k\pi$ و $w=\ln+(\varphi+\text{۲}k\pi)i\quad(\text{۲})$

که در آن $\ln r$، لگاریتم طبیعی در حوزهٔ اعداد حقیقی و k عدد صحیح دلخواهی است.

بازاء $z=0$، معادلهٔ (۱) جواب ندارد، زیرا بازاء هرمقداردلخواه w داریم: $e^w \neq 0$. بنابراین عدد صفر لگاریتم ندارد.

از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که **هر عدد مختلط (مخالف صفر) دارای بی‌نهایت لگاریتم است، که مقادیر آنها تشکیل یك تصاعد حسابی دوطرفه با قدر نسبت موهومی $2\pi i$ می‌دهند** و این از متناوب بودن تابع‌نمائی نتیجه می‌شود. مجموعهٔ همهٔ مقادیر لگاریتم عدد z را باین ترتیب نشان می‌دهند:

$$Lz = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln|z| + i\arg z$$

که با علامت $\arg z$ مجموعهٔ همهٔ مقادیر آوند را درنظر می‌گیرند. اگر برای $\arg z$ مقدار معینی در فاصلهٔ از $-\pi$ تا π (یا از صفر تا 2π) انتخاب شود:

$$-\pi < \varphi < \pi \qquad (\text{یا} \quad 0 < \varphi < 2\pi);$$

در اینصورت از مجموعهٔ همهٔ اعداد Lz مقداری که به **مقداراصلی لگاریتم** موسوم است جدا شده است:

$$\ln z = \ln r + i\varphi \qquad (r = |z| \text{ و } -\pi < \varphi < \pi)$$

مجموعهٔ همهٔ اعداد Lz تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند:

$$\ldots; \ln z - 4\pi i; \ln z - 2\pi i; \ln z; \ln z + 2\pi i; \ln z + 4\pi i; \ldots$$

چند مثال:

۱. داریم:

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i;$$

$$L(-1) = (2k+1)\pi i$$

۲. a را عدد دلخواه ومنفی فرض کنید، داریم:

$$|a| = -a; \quad \arg a = \pi + 2k\pi;$$

$$\ln a = \ln(-a) + \pi i$$

$$La = \ln(-a) + (2k+1)\pi i$$

۳. $$\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

و $$Li = \frac{(4k+1)\pi}{2}i$$

۴. $$\ln(1+i) = \ln[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

$$L(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$$

اگر z عددی مثبت باشد : $z = a$ $(a > 0)$ ، در اینصورت $\varphi = 0$ می‌شود و بنابراین La با مقدار لگاریتم در حوزهٔ اعداد حقیقی تطبیق می کند؛ **همهٔ** مقادیر دیگر لگاریتم موهومی خواهد بود . برعکس اگر مقدار اصلی Lz عددی حقیقی باشد ، $\varphi = 0$ و z عددی مثبت می‌شود . بنابراین **تنها اعداد مثبت دارای مقادیر لگاریتم حقیقی هستند .**

خاصیت اصلی لگاریتم :

$$L(z_1 z_2) = Lz_2 + Lz_1 \qquad (3)$$

بقوت خود باقی است. ضمناً تساوی (۳) دارای این مفهوم است که **سمت‌راست و سمت‌چپ آن تنها معرف یك مجموعهٔ اعداد هستند** . درحقیقت فرض کنید :

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \; ; \; z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

دراینصورت : $$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];$$

و داریم :

$$L(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + (\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi)i \qquad (3')$$

و
$$Lz_1 + Lz_2 = [\ln r_1 + (\varphi_1 + 2k_1\pi)i] + [\ln r_2 + \\ + (\varphi_2 + 2k_2\pi)i] = \ln r_1 + \ln r_2 + [(\varphi_1+\varphi_2) + \\ + 2(k_1+k_2)\pi]i \qquad (3'')$$

طبق خاصیت لگاریتم اعداد حقیقی داریم :

$$\ln(r_1 r_2) = \ln r_1 + \ln r_2 \cdot$$

هر عدد از مجموعهٔ اعداد (″۳) در مجموعهٔ (′۳) وجود دارد ، زیرا (k_1+k_2) عددی است صحیح : $k_1+k_2=k$. برعکس هرعددازمجموعهٔ (′۳) در مجموعهٔ (″۳) وجود دارد ، زیرا عدد صحیح ودلخواه k رامیتوان (بی‌نهایت نوع) به‌مجموع دوعدد صحیح $k=k_1+k_2$ تقسیم‌کرد . باین‌ترتیب مجموعه‌های (′۳) و (″۳) از یك نوع اعداد تشکیل شده‌اند . بهمین‌ترتیب می‌توان ثابت‌کرد :

$$L\frac{z_1}{z_2}=Lz_1-Lz_2$$

تبصره. تساوی: $\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$ همیشه صادق نیست ، زیرا مجموع $\varphi_1+\varphi_2$ ممکن است از فاصلهٔ (π و $-\pi$) ، که مقدار اصلی آوند باید در آن فاصله واقع باشد ، خارج شود ، اگر (درحالت خاص) z_1 و z_2 مثبت باشند ، این تساوی صادق است ، زیرا دراینصورت داریم :

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_1+\varphi_2=0$$

تساوی : $$Lz^m=mLz$$

در حالت‌کلی صادق نیست . در حالتی‌که m عدد طبیعی باشد بحث می‌کنیم.

فرض‌کنید $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ، دراینصورت :

$$z^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi) \text{ ، } Lz^m=mLr+(m\varphi+2k\pi)i;$$

ولی :

$$mLz=m\ln r+m(\varphi+2k_1\pi)i=m\ln r+(m\varphi+2k_1m\pi)i.$$

هر مقداری از mLz بین مقادیر Lz^m وجود دارد ، ولی مقادیر Lz^m تنها وقتی بین مقادیر mLz وجود داردکه k مضربی از m باشد.

باین ترتیب درحالت خاص :

$$L(-1)=Li^2=(2k+1)\pi i$$

ولی : $$2Li=2(\frac{\pi}{2}+2k_1\pi)i=(4k_1+1)\pi i$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر mLz قسمتی ازمجموعهٔ Lz^m خواهد بود .

تابع لگاریتمی :

$$w = Lz = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln r + i\arg z$$

تابعی است از آوند مختلط z که هرمقدار $z \neq 0$ متناظر با مجموعهٔ بی‌نهایت مقادیر w_k است که در آن :

$$w_k = w_0 + 2k\pi i \quad \text{و} \quad w_0 = \ln z$$

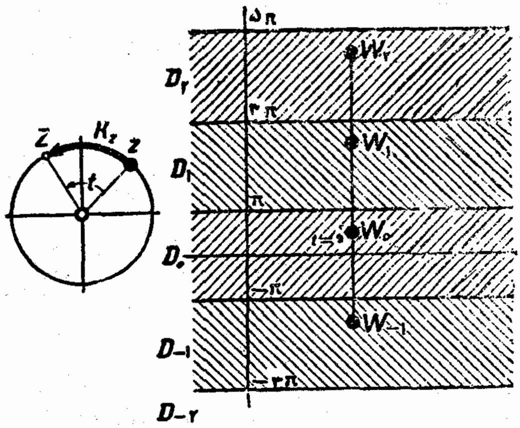
فرض کنید $z \neq 0$ ، مقداری از آوند ، متناظر با مقدار w_0 بوسیلهٔ نقطه‌ای از صفحهٔ uOv ، که درحوزهٔ D_0 واقع و بوسیلهٔ نامساوی: $-\pi < v \leq \pi$ معین شده است ، نشان داده شده باشد . مقدار w_k در حوزهٔ $(2k-1)\pi < v \leq (2k+1)\pi$ واقع است . فرض کنید $z \neq 0$ عدد مختلط مفروضی باشد ، بعنوان $\arg z$ مقدار اصلی آنرا انتخاب می‌کنیم . دایرهٔ K_z را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۶۳) که شعاع آن $|z|$ و مرکزش مبداء مختصات باشد . وضع هر نقطهٔ Z از این دایره ، بوسیلهٔ زاویهٔ مرکزی t معین می‌شود که از شعاع حامل نقطهٔ z حساب شده است . فاصلهٔ بستهٔ $0 \leq t \leq 2\pi$ متناظر با تمام دایره است وضمناً دو انتهای فاصلهٔ $t = 0$ و $t = 2\pi$ متناظر با یك نقطهٔ z می‌باشند . بعنوان آوند Z مقدار معین $\varphi + t$ را انتخاب می‌کنیم که درآن $0 \leq t \leq 2\pi$ است . در صفحهٔ uOv ، نقطهٔ z متناظر با نقطهٔ w_0 است که در D_0 واقع است و نقطهٔ Z بر نقطهٔ :

$$w = \ln|Z| + i(\varphi + t);$$

مقدار $t = 0$ متناظر با نقطهٔ w_0 در حوزهٔ D_0 است ومقدار $t = 2\pi$ با نقطهٔ w_1 درحوزهٔ D_1 ، و تمام دایرهٔ مورد بحث متناظر با پاره‌خطی‌است که دو نقطهٔ w_0 و w_1 را بهم وصل می‌کند . بطور خلاصه می‌توان گفت :

اگر نقطهٔ z درصفحهٔ xOy ودر جهت مثبت روی دایرهٔ به مرکز نقطهٔ O

حرکت کند، مقدار لگاریتم آن w_0 به طرف مقدار w_1 نزدیک می‌شود بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد که مقدار w_k به‌مقدار w_{k+1} نزدیک می‌شود.



ش ۲۶۳

۷۸. توابع معکوس مثلثاتی با آوند مختلط

مجموعهٔ همهٔ مقادیر آوند z را چنان پیدا می‌کنیم که بازاء آنها تابع مثلثاتی $\cos z$ مقدار مفروض w را داشته باشد:

$$w = \cos z \quad \text{یا} : \quad w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (1)$$

برای تعیین z معادلهٔ درجه دومی نسبت به e^{iz} خواهیم داشت:

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \implies e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

بنابراین برای z مجموعهٔ بی‌نهایت مقادیر زیر بدست می‌آید:

$$z=\frac{1}{i}L(w+\sqrt{w^2-1})^*$$

معادلهٔ (۱) بازاء هر مقدار w برای z جواب خواهد داشت ، زیـرا بازاء هرمقدار w داریم : $w+\sqrt{w^2-1}\neq 0$. درحقیقت معادلهٔ $w=-\sqrt{w^2-1}$ منجر به رابطهٔ غیرممکن‌زیر می‌شود : $w^2=w^2-1$

تابع زیر (با تغییر جای حروف z و w) :

$$w=\frac{1}{i}(z+\sqrt{z^2-1})$$

معکوس تابع $z=\cos w$ است و باین ترتیب نشان داده می‌شود :

$$w=\mathrm{Arc}\cos z=\frac{1}{i}L(z+\sqrt{z^2-1}).$$

تابع $\mathrm{Arc}\cos z$ بازاء مجموعهٔ همهٔ مقادیرمختلط z معین است واین بمناسبت این حقیقت است که کسینوس (درحوزهٔ اعدادمختلط) می‌تواند مساوی‌هرمقدار مختلط دلخواهی باشد .

اگر علامت $\sqrt{z^2-1}$ را با علامت یکی ازمقادیر آن درنظر بگیریم، مقدار دیگر آن‌مساوی : $-\sqrt{z^2-1}$ می‌شود و از اتحاد :

$$z-\sqrt{z^2-1}=\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}$$

نتیجه می‌شود که مقادیر زیر علامت لگاریتم در $\mathrm{Arc}\cos z$ عکس یکدیگر ند. بنابراین مقادیر اصلی آوند (که در فاصلهٔ $-\pi$ تا π انتخاب می‌شوند) ، یعنی اعداد : $z+\sqrt{z^2-1}$ و $z-\sqrt{z^2-1}$ مختلف‌العلامه‌اند ؛ اگر :

$$\arg(z+\sqrt{z^2-1})=\varphi \qquad (2)$$

---

*) در این رابطه رادیکال درحوزهٔ اعداد مختلط مورد بررسی قرارمی‌گیرد ودارای‌دو جواب است ، بهمین مناسبت صحبت‌ازوجود رادیکال‌وعلامت جلو آن لازم نیست .

باشد ($-\pi<\varphi<\pi$) ، دراینصورت خواهیم داشت :

$$\arg(z-\sqrt{z^{2}-1})=-\varphi$$

برای معین بودن تابع شرط می‌کنیم که مقدار رادیکال چنان باشدکه بازاء $0<\varphi<\pi$ رابطهٔ (۲) برقرار باشد . بعبارت دیگر مقداری از رادیکال را انتخاب می‌کنیم ،که بازاء آن عدد $z+\sqrt{z^{2}-1}$ بر نقطه‌ای از نیمدایرهٔ بستهٔ فوقانی واقع‌باشد .

اگر $z+\sqrt{z^{2}-1}=a$ عددی حقیقی باشد (که وقتی ممکن است که z عددی حقیقی باشد) داریم : $z=\dfrac{a^{2}+1}{2a}$ و از $\sqrt{z^{2}-1}$ مقدار حسابی رادیکال را استنباط خواهیم‌کرد .

مجموعهٔ همهٔ مقادیر $\mathrm{Arc}\cos z$ را می‌توان بصورت زیر نشان داد :

$$\mathrm{Arc}\cos z=\frac{1}{i}L(z\pm\sqrt{z^{2}-1})=\begin{cases}\frac{1}{i}L(z+\sqrt{z^{2}-1})\\ \frac{1}{i}L\frac{1}{z+\sqrt{z^{2}-1}}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{i}L(z+\sqrt{z^{2}-1})\\ \frac{1}{i}[L1-L(z+\sqrt{z^{2}-1})]=\pm\frac{1}{i}L(z+\sqrt{z^{2}-1})+2n\pi\end{cases}$$

(زیرا $L1=2n\pi i$ است) . ولی :

$$L(z+\sqrt{z^{2}-1})=\ln|z+\sqrt{z^{2}-1}|+(\varphi+2m\pi)i$$

از آنجا :

$$\mathrm{Arc}\cos z=\pm\frac{1}{i}(\ln|z+\sqrt{z^{2}-1}|+i\varphi)+2k\pi$$

$k=m\pm n$ فرض کردیم وبالاخره :

$$\mathrm{Arc}\cos z=\pm(\varphi-i\ln|z+\sqrt{z^{2}-1}|)+2k\pi$$

مقدار $\mathrm{Arc}\cos z$ را بازاء $k=0$ و با انتخاب علامت $+$ ، مقدار اصلی

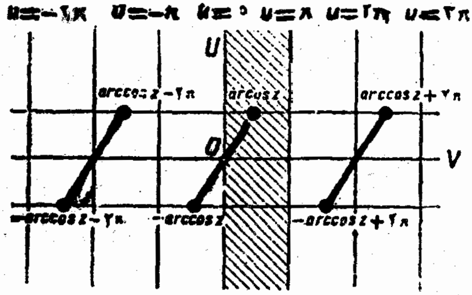
آرك‌كسينوس می‌ناميم وچنين نشان دهيم :

$$\text{arc}\cos z = \varphi - i\ln|z + \sqrt{z^{2} - 1}| ;$$

مقدار $\text{arc}\cos z$ درحوزهٔ $0 < u < \pi$ صفحهٔ uOv قرار دارد ، زيرا $u = \varphi$ است و $0 < \varphi < \pi$ ، مجموعهٔ همهٔ مقـادير تابع $\text{Arc}\cos z$ را می‌توان بوسيلهٔ رابطهٔ زير نشان داد :

$$\text{Arc}\cos z = \pm \text{arc}\cos z + 2k\pi$$

در اين رابطه‌مقدار $-\text{arc}\cos z$ ، قرينهٔ مقدار اصلی، درحوزهٔ $-\pi < u < 0$ واقع است و بقيهٔ مقادير آرك‌كسينوس با اضافه‌كردن $2k\pi$ (مضربی ازدورهٔ تناوب‌كسينوس) به اين مقادير بدست می‌آيد (شكل ۲۶۴) .



ش ۲۶۴

تابع $\text{Arc}\sin z$ بعنوان معكوس تابع $z = \sin w$ معين می‌شود . اگر معادلهٔ :

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

را نسبت به w حل‌كنيم ، بدست می‌آيد :

$$w = \text{Arc}\sin z = L[iz + \sqrt{1 - z^{2}}] \qquad (3)$$

كه با استفاده از رابطهٔ :

$$\sin w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right) = z$$

بدست می‌آيد: $\frac{\pi}{2} - w = \text{Arc}\cos z$ يا :

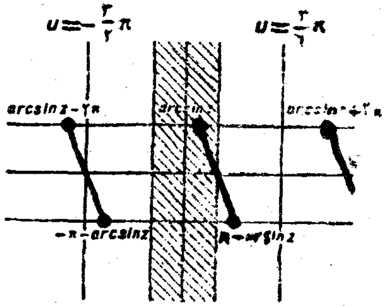
$$w=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{Arc}\cos w=\frac{\pi}{۲}\pm\frac{۱}{i}L(z+\sqrt{z^{۲}-۱}) \qquad (۴)$$

تبصره. رابطهٔ (۴) را با تبدیل رابطهٔ (۳) هم می‌توان بدست آورد و و ما انجام این تبدیل را بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

اگر مقدار اصلی آرك‌کسینوس را انتخاب‌کنیم تابع يك ارزشی:

$$\mathrm{arc}\sin z=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{arc}\cos z$$

را بدست می‌آوریم که مقدار اصلی آرك سینوس نامیده می‌شود . از آنجاکه مقدار $\mathrm{arc}\cos z$ درحوزهٔ محدود به خطوط $u=۰$ و $u=\pi$ قرار دارد ، مقدار $\mathrm{arc}\sin z$ دزحوزهٔ محدود به خطوط $u=-\frac{\pi}{۲}$ و $u=\frac{\pi}{۲}$ واقع خواهد بود (شکل ۲۶۵) .



ش ۲۶۵

اگر $z=x$ عددی حقیقی باشد که از لحاظ قدر مطلق از ۱ تجاوز نکند ، دراینصورت داریم :

$$\left|z+\sqrt{z^{۲}-۱}\right|=\left|x+i\sqrt{۱-x^{۲}}\right|=۱$$

نقطهٔ M با مختصات (x و $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$) بردایرهٔ واحد قرار خواهد داشت . مقدار $\varphi=\arg(x+i\sqrt{۱-x^{۲}})$ عبارتست از زاویه‌ای که شعاع حامل OM با محور طول می‌سازد وچون $\sqrt{۱-x^{۲}}\geqslant ۰$ است ، بنابراین

نقطهٔ M بر نیمدایرهٔ بستهٔ فوقانی واقع خواهد شد . درحالت مورد بحث :

$$\operatorname{arc}\cos z = \operatorname{arc}\cos x = \varphi \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

باین ترتیب روی پاره خط محور حقیقی $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ، $y = 0$ تابع

$\operatorname{arc}\cos z$ دارای تعبیر هندسی است که در نظریهٔ هندسی بعنوان تعریف این تابع قبول می‌شود . در این‌حالت (حالت خاص) مجموعهٔ مقادیر :

$$\operatorname{Arc}\cos x = \pm \operatorname{arc}\cos x + 2k\pi$$

عبارتند از مجموعهٔ همهٔ جوابهای معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی زیر :

$$\cos w = x$$

که در آن w بعنوان مجهول درنظر گرفته شده‌است .

بهمین ترتیب تابع :

$$\operatorname{arc}\sin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cos z$$

بازاء $z = x \ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ ، تعبیر هندسی دارد که بعنوان اساس نظریهٔ هندسی مورد قبول قرار می‌گیرد .

تابع $\operatorname{Arc}tg\, z$ بعنوان معکوس تابع :

$$z = tg\, w = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

تعریف می‌شود . اگر w را برحسب z بیان کنیم بدست می‌آید :

$$w = \operatorname{Arc}tg\, z = \frac{1}{2i} L \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1}{2i} L \frac{i - z}{i + z}$$

این تابع دارای بی‌نهایت جواب است و بازاء همهٔ اعداد مختلطی که مساوی $\pm i$ نباشند معین است . بازاء $z = \pm i$ آرك تانژانت مفهوم خودرا ازدست می‌دهد . اگر $z = x$ عددی حقیقی باشد دراینصورت :

$$|i - x| = |i + x| \quad \text{و} \quad \left|\frac{i - x}{i + x}\right| = 1 ,$$

و بسادگی میتوان تحقیق کرد که در اینحالت $Arctg z$ مقداری است حقیقی .

چند مثال .

۱. فرض کنید $z=x$ و $|x|>1$. در اینحالت :

$$z+\sqrt{z^2-1}=x+\sqrt{x^2-1}\begin{cases}>0 & (x>1)\\ <0 & (x<-1)\end{cases}$$

بنابراین :

$$\varphi=\begin{cases}0 & (x>1)\\ \pi & (x<-1)\end{cases}$$

ودر نتیجه :

$$\arccos x=\begin{cases}-i\ln(x+\sqrt{x^2-1}) & (x>1)\\ \pi-i\ln(-x-\sqrt{x^2-1}) & (x<-1)\end{cases}$$

مثلا :

$$\arccos 2=-i\ln(2+\sqrt{3});\arccos(-2)=\pi-i\ln(2-\sqrt{3})$$

$$\arcsin 2=\frac{\pi}{2}+i\ln(2+\sqrt{3})\ ;\ \arcsin(-2)=-\frac{\pi}{2}+$$

$$+i\ln(2-\sqrt{3})$$

۲. با فرض $z=i$ داریم :

$$z+\sqrt{z^2-1}=(1+\sqrt{2})i\ ;\ \ \varphi=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین :

$$\arccos i=\frac{\pi}{2}-i\ln(1+\sqrt{2});$$

$$\arcsin i=i\ln(1+\sqrt{2})$$

اتحادهای :

$$\operatorname{Arcsin} z=\operatorname{Arccos}\sqrt{1-z^2}\ ;\ \operatorname{Arcsin} z=\operatorname{Arctg}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$\operatorname{Arcsin} z_1+\operatorname{Arcsin} z_2=\operatorname{Arcsin}(z_1\sqrt{1-z_2^2}+z_2\sqrt{1-z_1^2})$$

وسایر اتحادهای مشابه را میتوان از روابط بین توابع مثلثاتی و از قضایای

مجموع نتیجه گرفت ودارای این مفهوم‌اند که سمت‌راست وسمت‌چپ هریك از این اتحادها تنها یك‌مجموعهٔ اعداد را بیان می‌کنند .

۷۹. تعمیم مفهوم توابع نمائی وتوابع لگاریتمی

فرض کنید :

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(که درآن $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ است)، عدد مختلط دلخواهی باشد .

تعریف . توان عدد $z \neq 0$ بانمای $a = \alpha + i\beta$ به مجموعهٔ اعدادی گفته می‌شودکه بوسیلهٔ رابطهٔ زیرمعین شوند :

$$z^a = e^{aLz}$$

در حالت خاص اگر $z = x > 0$ وعدد $a = \alpha$ حقیقی باشند و اگـر مقدار اصلی لگاریتم را $\ln z$ بگیریم ، اتحاد :

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

را بدست می‌آوریم که درحوزهٔ اعداد حقیقی‌صادق است .

حالتهای ممکن زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت ۱°. $a = n$ عددی صحیح باشد .

$$z^n = e^{nLz} = e^{n(\ln z + 2k\pi i)} = e^{n(\ln\rho + i\varphi + 2k\pi i)} =$$

$$= e^{n\ln\rho}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

باین ترتیب همان مقدار z^n بدست می‌آید که در رابطهٔ مواور پیدا می‌شود .

دراینحالت : $w = z^n$

تابع نمائی یك ارزشی با آوند مختلط است .

حالت ۲°. $a=\frac{p}{q}$ که در آن $\frac{p}{q}$ کسر غیرممکن‌التحویل و $q>1$ است.

در این حالت داریم :

$$z^{\frac{p}{q}}=e^{\frac{p}{q}Lz}=e^{\frac{p}{q}(\ln\rho+i\varphi+2k\pi i)}=e^{\frac{p}{q}\ln\rho}\cdot e^{\frac{p(\varphi+2k\pi)}{q}i}=$$

$$=\rho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{(\varphi+2k\pi)p}{q}+i\sin\frac{(\varphi+2k\pi)p}{q}\right)$$

اگر حالت خاص $p=1$ باشد ، بدست می‌آید :

$$z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{q}\right)=\sqrt[q]{z}$$

بنابراین مقادیر $z^{\frac{1}{q}}$ همان مقادیر رادیکال مختلط $\sqrt[q]{z}$ است. بازاءمقدار دلخواه p ، که نسبت به q اول است داریم :

$$z^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{z}\right)^p=\sqrt[q]{z^p}$$

باین ترتیب تعریف توان کسری یك‌عدد مختلط همان تعریفی است که در جبر وجود دارد .

تابع $w=z^{\frac{p}{q}}$ تابعی است q ارزشی با آوند z

حالت ۳°. $z=\alpha$ که درآن α عددی است حقیقی و گنگ . در این حالت داریم :

$$z^{\alpha}=\rho^{\alpha}[\cos(\alpha\varphi+2k\pi\alpha)+i\sin(\alpha\varphi+2k\pi\alpha)] \qquad (1)$$

بازاء مقادیردلخواه وصحیح k مجموعهٔ بی‌نهایت مقادیر توان گنگ z^{α} بدست می‌آید . بازاء مقادیر مختلف k مقادیر مختلفی برای z^{α} پیدا می‌شود ، زیرا اگر بازاء $k=k_1$ و $k=k_2$ مقادیر مشابهی برای z^{α}

بدست آید بایستی تساوی زیر را داشته باشیم :

$$\alpha\varphi+2k_1\pi\alpha=\alpha\varphi+2k_2\pi\alpha+2n\pi$$

(که درآن n عددی است صحیح) ، ولی دراینصورت بر خلاف شرط ، $\alpha=\frac{n}{k_1-k_2}$ عددی گویا می‌شود . باین‌ترتیب تابع $w=z^{\alpha}$ تابعی است بی‌نهایت ارزشی با آوند مختلط z . شاخه‌های مختلف این تابع ازرابطهٔ(۱) وبازاء مقادیر مختلف k بدست می‌آید .

حالت خاص مربوط به‌توان گنگ $-b$ ‏$z=-b\ (b>0)$ را مورد توجه قرار می‌دهیم . داریم : $\rho=b$ و $\varphi=\pi$ و بنابراین :

$$(-b)^{\alpha}=b^{\alpha}[\cos(2k+1)\alpha\pi+i\sin(2k+1)\alpha\pi];$$

و چون $(2k+1)\alpha\pi\neq n\pi$ است (nعددی صحیح و α عددی است گنگ) بنابراین همهٔ مقادیر توان گنگ یك‌عدد منفی موهومی خواهد بود . باین‌علت است که توانهای گنگ اعداد منفی در حوزهٔ اعداد حقیقی مورد مطالعه قرار نمیگیرند .

حالت ۴. $a=\alpha+i\beta$ عددی استموهومی و $\beta\neq0$. دراین‌حالت:

$$z^{a}=e^{(\alpha+i\beta)[\ln\rho+(\varphi+2k\pi)i]}=e^{\alpha\ln\rho-\beta(\varphi+2k\pi)}\times$$

$$\times e^{i[\beta\ln\rho+\alpha(\varphi+2k\pi)]}=\rho^{\alpha}e^{-\beta(\varphi+2k\pi)}\times$$

$$\times[\cos(\beta\ln\rho+\alpha\varphi+2k\pi\alpha)+i\sin(\beta\ln\rho+\alpha\varphi+2k\pi\alpha)].$$

تابع z^{a} بازاء مقادیر موهومی a تابعی بی‌نهایت ارزشی است و بازاء مقادیر مختلف k مقادیر مختلفی برای z^{a} بدست می‌آید، زیرا مقادیر کالبد:

$$\left|z^{\alpha}\right|=\left|z\right|^{\alpha}e^{-\beta(\varphi+2k\pi)}$$

بازاء مقادیر مختلف k ، مختلف‌اند .

چند مثال .

۱. $i^i=e^{i(\ln i+2k\pi i)}=e^{i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$

بنابراین تمام مقادیر توانهای i^i اعدادی حقیقی هستند .

۲. مطلوبست بیان کلی توان $1^{\alpha+i\beta}$. داریم :

$$1^{\alpha+i\beta}=e^{(\alpha+i\beta)L1}=e^{2(\alpha+i\beta)k\pi i}=e^{-2\beta k\pi}\cdot e^{2\alpha k\pi i}=$$

$$=\frac{1}{e^{k\pi\beta}}[\cos 2k\pi\alpha+i\sin 2k\pi\alpha]$$

درحالت خاص بازاء $\alpha=0$ بدست می‌آید : $1^{i\beta}=e^{2k\pi\beta}$ (k را به $-k$ تبدیل کردیم ، زیرا k عدد دلخواه صحیحی است) . بنابراین تمام مقادیر مربوط به توان موهومی خالص عدد واحد، حقیقی هستند .

تعریف . بطورکلی تابع نمائی با پایهٔ مختلط $a\neq 0$ به‌تابعی‌گوئیم که بوسیلهٔ رابطهٔ زیر معین می‌شود :

$$w=a^z=e^{zLa} \qquad (1)$$

فرض‌کنید $\rho=|a|$ و φ مقدار اصلی آوند a باشد، دراینصورت داریم:

$$w=e^{z[\ln\rho+(\varphi+2k\pi i)]} \qquad (2)$$

بنابراین تابع‌کلی نمائی تابعی است بی‌نهایت ارزشی و بازاء مقادیر مختلف k شاخه‌های مختلفی از آن بدست می‌آید .

تا عصر حاضر علامت e^z معرف تابع یك ارزشی بوده‌که بوسیلهٔ رشتهٔ توانی زیـــر :

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

و یا بوسیلهٔ رابطهٔ اولر :

$$e^x(\cos y+i\sin y)$$

نشان داده می‌شد . ولی اگر در رابطهٔ (۱) $a=e$ فرض کنیم ، علامت e^z مفهوم دیگری پیدا می‌کند ونمایندهٔ یك تابع بی‌نهایت ارزشی می‌شود . برای احتراز از اشتباهی که ممکن است در این‌مورد پیش بیاید تابع نمائی را به مفهوم اول باین طریق نمایش می‌دهیم :

$$\exp z = ۱ + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \exp x(\cos y + i\sin y) \;;$$

وعلامت e^z را برای تابع نمائی درحالت کلی با پایهٔ مساوی e بکار می‌بریم. باین‌ترتیب رابطهٔ (۲) را باید باین‌ترتیب نوشت :

$$w = a^z = \exp\left\{z[\ln\rho + (\varphi + ۲k\pi)i]\right\};$$

و در حالت خاص :

$$e^z = \exp\left\{z[Le]\right\} = \exp[z(۱ + ۲k\pi i)].$$

معهذا باید متذکر شدکه تابع نمائی در حالت کلی و با پایهٔ e بندرت‌مورد توجه قرار می‌گیرد .

چند مثال .

۱. رابطهٔ توان‌نمائی‌را درحالت کلی بازاء $a=۱$ تشکیل دهید.داریم:

$$۱^z = ۱^{x+iy} = \exp(-۲k\pi y)\cdot[\cos ۲k\pi x + i\sin ۲k\pi x].$$

بازاء $k=۰$ شاخه‌ای از این تابع بدست می‌آیدکه متحد با ۱ است . سایر شاخه‌های تابع ۱^z موهومی‌اند ومقدار ثابتی هم نیستند .

۲. داریم :

$$i^z = \exp\left\{z\left(\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi\right)i\right\} = \exp\left(\frac{\pi}{۲}z\right)\cdot\exp(۲k\pi zi) =$$

$$= \exp\frac{\pi z}{۲}[\cos ۲k\pi z + i\sin ۲k\pi z].$$

تعریف. لگاریتم کلی‌عدد $N = m + in$ درمبنای $a \neq ۰$ $(\log_a N)$ به

مجموعهٔ همهٔ جوابهای معادلهٔ نمائی سادهٔ زیر گفته می‌شود :

$$a^{w}=N.$$

این معادله را باین ترتیب می‌نویسیم :

$$\exp(wLa)=N\ ;$$

از آنجا : $$wLa=LN \text{ و } w=\log_a N=\frac{LN}{La}$$

فرض کنید :

$$a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ ;\ \ N=R(\cos\Phi+i\sin\Phi)\ ;$$

دراینصورت داریم :

$$\log_a N=\frac{\ln R+(\Phi+2k\pi)i}{\ln\rho+(\varphi+2l\pi)i}$$

باین‌ترتیب ، مجموعهٔ مقادیر لگاریتم بامفهوم کلی خود بوسیلهٔ رابطه‌ای‌معین می‌شود که شامل دو پارامتر صحیح k و l است .

تابع کلی لگاریتمی $w=\log_a z=\frac{Lz}{La}$ تابعی‌بی‌نهایت ارزشی‌است.

چند مثال .

۱. بازاء $a=e$ بدست می‌آید :

$$\log_e N=\frac{LN}{Le}=\frac{LN}{1+2l\pi i}$$

بنابراین درحوزهٔ اعداد مختلط $\log N$ و LN یکی نیستند . مقدار LN جزو مقادیر $\log N$ (بازاء $l=0$) است .

۲. رابطه‌ای برای $\log_1 N$ بدست آورید .

حل . داریم :

$$\log_1 N=\frac{\ln R+(\Phi+2k\pi)i}{2l\pi i};$$

که در آن l عدد صحیح دلخواهی مخالف صفر و k عدد صحیح دلخواهی است . اگر $|N|=R=1$ باشد ، مقدار $log_1 N$ حقیقی خواهد بود .

۳. معادلهٔ زیر را در حوزهٔ اعداد مختلط حل کنید :

$$10^z=100$$

حل . داریم :

$$z=\frac{L100}{L10}=\frac{2\ln 10+2k\pi i}{\ln 10+2l\pi i}$$

مقدار z بشرطی حقیقی است که $(2\ln 10+2k\pi i)(\ln 10-2l\pi i)$ حقیقی باشد و این هم وقتی است که داشته باشیم :

$$2k-4l=0$$

از آنجا $k=2l$ و خواهیم داشت :

$$z=\frac{2\ln 10+4l\pi i}{\ln 10+2l\pi i}=2$$

۴. مبنای لگاریتم منفی است ، با چه شرطی عدد مثبت A لااقل یك مقدار لگاریتم حقیقی خواهد داشت ؟

حل . داریم :

$$log_{-a} A=\frac{\ln A+2k\pi i}{\ln a+(2l+1)\pi i}$$

مقدار $log_{-a} A$ بشرطی حقیقی است که :

$$(\ln A+2k\pi i)[\ln a-(2l+1)\pi i]$$

عددی حقیقی باشد ، از آنجا :

$$2k\ln a-(2l+1)\ln A=0$$

و در نتیجه :

$$\ln A=\frac{2k}{2k+1}\ln a\ ;\ A=a^{\frac{2k}{2l+1}}=\sqrt[2l+1]{a^{2k}}$$

مثلا :
$$log_{-2}4=\frac{2\ln 2+2k\pi i}{\ln 2+(2l+1)\pi i}=\frac{2(\ln 2+k\pi i)}{\ln 2+(2l+1)\pi i};$$

مقدار حقیقی لگاریتم وقتی بدست می‌آید که داشته باشیم :

$$k\pi\ln 2=(2l+1)\pi\ln 2 \implies k=2l+1$$

و در اینصورت مقدار $log_{-2}4$ مساوی ۲ خواهد بود :

$$(-2)^2=4$$

عدد ۳ در مبنای ۲ — دارای لگاریتم حقیقی نیست .

باین‌ترتیب وقتی که مبنای لگاریتم عدد منفی a — است ، تنهااعدادی دارای لگاریتم حقیقی هستند که مثبت باشند و بتوان آنها را بصورت توانی از a نوشت که نمای آن مساوی کسری باشد باصورت زوج و مخرج فرد .

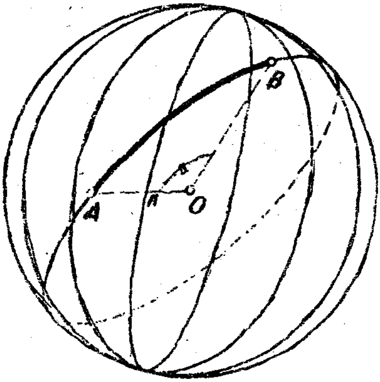
۸

عناصر مثلثات کروی

۸۰ ۰ مفاهیم اساسی

در این بند بطور خلاصه‌درباره‌ٔ مطالبی از هندسهٔ فضائی صحبت‌خواهیم کرد که در مثلثات کروی مورد استفاده قرار می‌گیرند . مطالب مربوط به هندسهٔ فضائی در دورهٔ اختصاصی هندسه مورد تجزیه وتحلیل قرار می‌گیرد، بنابراین مادراینجا فقط ازآنچه‌که برای‌بحثهای‌بعدی خود لازم داریم، بدون اثبات ، نام خواهیم برد .

I . ازهر دو نقطهٔ غیر متقاطری‌که بر سطح کره واقع باشند، **تنها یك** دایرهٔ عظیمه و از دو نقطهٔ متقاطر واقع بر سطح کره بی‌نهایت دایرهٔ عظیمه عبور می‌کنند (ش ۲۶۶).



ش ۲۶۶

دو نقطهٔ غیر متقاطر از سطح کره ، دایرهٔ عظیمه ای راکه از آنها عبور می‌کند به دو قسمت تقسیم می‌کندکه یکی از آنها کوچکتر از نیمدایره و دیگری بزرگتر از نیمدایره است .

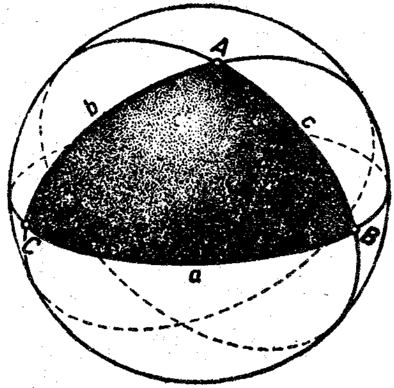
هر قوس دایرهٔ عظیمه ، متناظر است با زاویهٔ مرکزی ، بین دو شعاعی‌که مرکزکره را به‌دوانتهای قوس وصل می‌کنند .

قوسهای دایرهٔ عظیمه را مقیاس **قوس** (مثلا برحسب‌رادیان یا درجه)، وزاویهٔ مرکزی متناظر باآن‌راهم با مقیاس **زاویه اندازه** می‌گیرند.

اگر R شعاع‌کره و α اندازهٔ قوس AB برحسب رادیان باشد، دراینصورت طول این قوس یعنی v طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \alpha R.$$

سه نقطهٔ A ، B و C را برسطح کره درنظر می‌گیریم، بنحوی که‌در بین آنها دو نقطهٔ متقاطر وجود نداشته باشد. این نقاط را بوسیلهٔ سه قوس دایرهٔ عظیمه ،که هرکدام آنها کوچکتر از π هستند، بهم‌وصل می‌کنیم. روی سطح کره، شکلی بدست‌می‌آید که‌به **مثلث‌کروی اولر** ویا بطورخلاصه **مثلث‌کروی** موسوم است (شکل ۲۶۷). نقاط A،Bو C را **رئوس** وقوسهائی که‌این نقاط را بهم وصل کرده است **اضلاع** مثلث‌کروی نامیده‌اند. اضلاع مثلث‌کروی را که روبروی رئوس A ، B وC قرارگرفته‌اند بترتیب باحروف a، b و c نشان می‌دهند. زاویهٔ مثلث‌کروی دریك رأس مفروض عبارتست از زاویهٔ بین اضلاعی که در این رأس بهم رسیده‌اند، یعنی زاویهٔ بین مماسهای بر دو ضلع در نقطهٔ تلاقی آنها. زاویهٔ مثلث‌کروی زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای است که از تلاقی دوایر عظیمهٔ ماربر دوضلع‌رأس مفروض بدست آمده است (شکل۲۶۸).

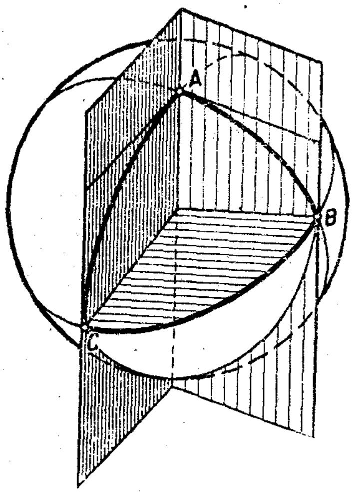


ش ۲۶۷

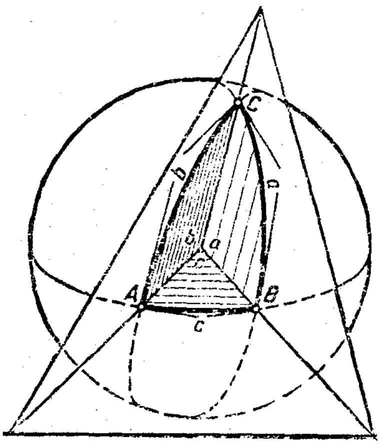
ضمناً قسمت داخلی این زاویه قسمتی است که شامل ضلع مقابل به رأس این زاویه باشد. زوایا و اضلاع مثلث‌کروی را **اجزاء اصلی** آن‌نامند. ازآنچه گفته شد نتیجه میشود که: **مقدارهریك ازاجزاء اصلی‌مثلث‌اولر درفاصلهٔ از**

صفر تا π قرار دارند . ✡

II . هر مثلث کروی متناظر با یك کنج سه وجهی است که رأس آن در مرکز کره واقع است و یالهای آن شعاعهائی از کره هستند که مرکز را به رئوس مثلث وصل می‌کنند . برعکس هر کنج سه وجهی که رأس آن در مرکز کره باشد متناظر با مثلث کروی است که این کنج روی سطح کره بوجود می‌آورد (شکل ۲۶۹) .



ش ۲۶۸

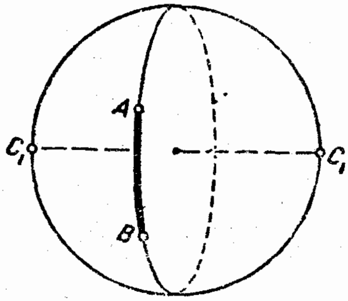


ش ۲۶۹

اجزاء مثلث کروی و کنج سه وجهی بترتیب زیر بهم مربوطاند : مقادیر زوایای A ، B و C از مثلث همان مقادیر زوایای دو وجهی از کنج و مقادیر اضلاع a ، b و c مثلث همان مقادیر زوایای رأس کنج هستند . هر رابطه‌ای که بین اجزاء مثلث کروی باشد می‌تواند تعبیری از رابطهٔ بین اجزاء کنج سه وجهی باشد و برعکس .

✡) گاهی بطور نظری مثلث کروی را مثلثی با اجزائی که اندازهٔ آنها **دلخواه** باشد درنظر می‌گیرند (که در اینصورت به مثلث مبیوس موسوم است) . ولی مطالعهٔ چنین مثلثهائی دارای مفهوم عملی نیست .

III. اگر AB قوسی از دایرهٔ عظیمه باشد، دراینصورت قطر عمود برصفحهٔ این‌دایره، سطح کره را دردو نقطهٔ C_1 و C_1' قطع می‌کنند که‌دو **قطب** این‌قوس نامیده‌می‌شوند (شکل ۲۷۰).



ش ۲۷۰

اگر رئوس مثلث $A_1B_1C_1$ قطبهای اضلاع مثلث ABC باشند، مثلث $A_1B_1C_1$ را مثلث قطبی نسبت به مثلث ABC گویند (شکل ۲۷۱).

ضمناً علامتگذاری را باین‌ترتیب می‌گذرانند؛ نقطهٔ A_1 قطب BC، نقطهٔ B_1 قطب AC و نقطهٔ C_1 قطب AB. رئوس مثلث قطبی راطوری انتخاب می‌کنند که رئوس A و A_1 نسبت به‌صفحهٔ قوس BC در یکطرف واقع باشند و بهمین‌ترتیب برای سایر رئوس مثلث قطبی.

در هندسهٔ فضائی ثابت می‌کنند که **اگر مثلث $A_1B_1C_1$ قطبی مثلث ABC باشد، برعکس مثلث ABC هم‌قطبی مثلث $A_1B_1C_1$ خواهد بود.**

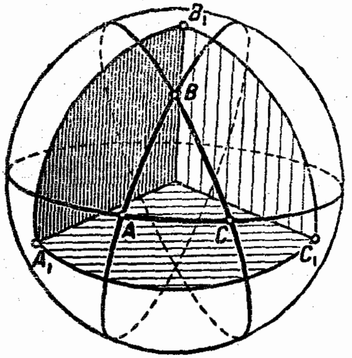
باین‌ترتیب، رأس A از مثلث ABC قطب‌ضلع a_1 ازمثلث $A_1B_1C_1$ و رأس A_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ قطب ضلع a از مثلث ABC خواهد بود.

درهندسهٔ فضائی ثابت می‌کنند که هرزاویهٔ مثلث‌وضلع متناظرش ازمثلث قطبی‌آن مجموعی برابر π دارند (شکل ۲۷۲).

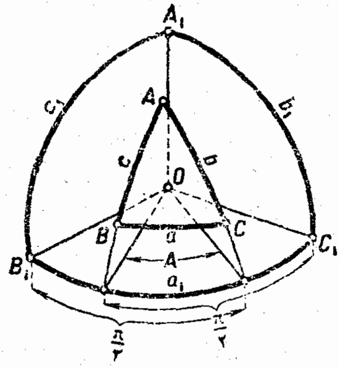
$$A+a_1=\pi\ ;\ A_1+a=\pi\ ;\ B+b_1=\pi\ ;$$
$$B_1+b=\pi\ ;\ C+c_1=\pi\ ;\ C_1+c=\pi.$$

IV. در هر مثلث‌کروی:

۱°. هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است:



ش ۲۷۱



ش ۲۷۲

$$a<b+c \ ; \quad b<a+c \ ; \quad c<a+b$$

۲°. هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است .

۳°. مجموع اضلاع مثلث مثبت و از 2π کوچکتر است .

$$0<a+b+c<2\pi$$

تبصره. این قضایا با توجه به خاصیت زوایای کنج سه وجهی هم که در هندسهٔ فضائی ثابت می‌شود ، واضح است .

۴°. مجموع زوایای مثلث کروی بزرگتر از π وکوچکتر از 3π است .

$$\pi<A+B+C<3\pi$$

(با درنظر گرفتن خاصیت ۳° برای اضلاع a_1 ، b_1 و c_1 از مثلث قطبی).

تبصره. برخلاف مثلث مستقیم‌الخط، مثلث کروی می‌تواند دو یا حتی سه زاویهٔ منفرجه یا قائمه داشته باشد .

۵°. در مثلث کروی روبروی به ضلع بزرگتر ، زاویهٔ بزرگتر قرار گرفته است و برعکس .

همچنین دوضلع مساوی مقابل به دو زاویهٔ مساوی‌اند وبرعکس .

۶°. زوایای مثلث کروی درنامساویهای زیر صادق‌اند .

$$A+B-C<\pi \ ; \quad A-B+C<\pi \ ; \quad B+C-A<\pi$$

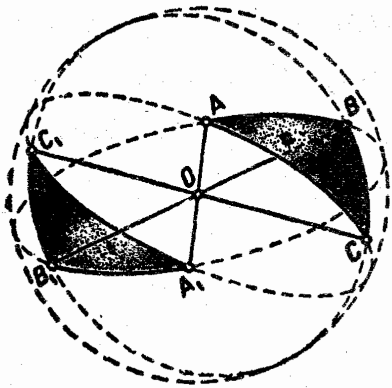
مثلا برای اثبات نامساوی اول می‌توان شرط ۱° را در مورد اضلاع مثلث قطبی‌نوشت : $a_1 < b_1 + c_1$ وسپس‌اضلاع مثلث $A_1B_1C_1$ رابرحسب زوایای مثلث ABC بیان کرد .

روابط ۱° تا ۶° ، مجموعهٔ مقادیرقابل قبول برای اجزاء مثلث کروی را معین می‌کنند . در مسائل‌مربوط به محاسبهٔ اجزاء مثلث‌کروی با مفروض گرفتن این روابط باید تعیین‌کردکه آیا مسئله جواب دارد یانه ودرصورت وجود جواب تعداد جوابها چقدر است ؟

V. اگر اجزاء مثلث‌کروی ABC با اجزاء نظیرش در مثلث‌کروی $A'B'C'$ برابر باشد :

$$A = A' \; ; \; B = B' \; ; \; C = C' \; ; \; a = a' \; ; \; b = b' \; ; \; c = c' .$$

یا دومثلث‌مساوی‌مستقیم‌اند (یعنی می‌توان با حرکت در فضاآنها رابرهم منطبق کرد) **ویامساوی معکوس**(یعنی نسبت به‌یك صفحه‌قرینهٔ‌یکدیگرند) دو مثلث مساوی معکوس را نمیتوان‌باحرکت درفضابرهم منطبق کرد ولی می‌توان آنها را در وضعی‌قرار دادکه رئوس متناظرشان‌نقاط متقاطری ازکره باشند (شکل ۲۷۳) . مثلثهای مساوی معکوس را مثلثهای قرینه هم‌گویند .



ش ۲۷۳

VI. درهندسهٔ فضائی‌برای ساختن‌مثلث‌کروی حالتهای زیرمورد بحث قرار می‌گیرد : **بوسیلهٔ سه ضلع ؛ بوسیلهٔ سه زاویه ؛ یك‌ضلع و دوزاویهٔ مجاور آن ؛ یك‌زاویه ودو ضلع مجاور آن ؛ دوضلع وزاویهٔ روبروی به‌یکی ازآنها ؛ دوزاویه وضلع روبروی بیکی از آنها** . ضمناً مثلثهای‌مساوی‌مستقیم

ومثلثهای مساوی معکوس بعنوان دوحالت جداگانه و مختلف در نظر گرفته نمی‌شود . وقتی که برای ساختن یك مثلث کروی سه جزء آن مفروض باشد ، ممکن است مسئله جواب نداشته باشد (دستگاه اجزاء مفروض غیرقابل قبول باشند) ، ممکن است تنها یك‌جواب داشته‌باشد وممکن است دو جواب‌مختلف داشته باشد .

درمورد مثلث کروی مسائل مربوط به محاسبهٔ اجزاء اصلی مثلث از روی اجزاء سه‌گانه مفروض هم مورد مطالعه قرار می گیرد .

VII . مجموع سه زاویهٔ هر مثلث کروی از π بزرگتر است :

$$A+B+C>\pi$$

تفاضل : $\varepsilon=(A+B+C)-\pi$

بین مجموع زوایا و π را«قدر اضافی» مثلث کروی گویند .

مساحت‌مثلث کروی برابراست باحاصلضرب قدراضافی‌در مجذورشعاع:

$$S_{\Delta}=\varepsilon R^{2}$$

۸۱ . روابط اساسی بین اجزاء مثلث کروی

در این‌بند از روابط بین اجزاء مثلث غیرمشخص اولر صحبت می‌شود، روابطی‌که برای حل یك مثلث کروی مورد استفاده قرار می گیرند .

روابط‌کسینوس اضلاع

قضیهٔ I .کسینوس یك ضلع مثلث کروی برابر است با حاصلضرب کسینوسهای دو ضلع دیگر باضافهٔ حاصلضرب سینوسهای همین دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها :

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \ ; \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \ ; \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \ . \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

با در داشتن یکی از این روابط می‌توان با تبدیل دوری آن نسبت به‌حروف a ، b ، c و A ، B ، C دو رابطهٔ دیگر را بدست آورد .

اثبات . برای اثبات‌کافی است‌کنج سه وجهی متناظر مثلث را در نظر بگیریم. ازآنجاکه a ، b ، c و A ، B ، C بترتیب مقادیر زوایای‌مسطحهٔ رأس‌کنج وزوایای دو وجهی آن هستند ، داریم :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

(اثبات این رابطه دربند ۶۴ مثــال ۳ صفحهٔ ۵۵۱ آمده است) . این تساوی معادل اولین رابطهٔ (۱) می‌باشد ، بقیهٔ روابط هم بهمین‌ترتیب ثابت می‌شود.

اثبات دوم . رابطهٔ‌کلی زیر مربوط به‌تبدیل حاصلضرب اسکالر دو حاصلضرب برداری را در جبر برداری دیده‌ایم :

$$([ab][xy]) = (ax)(by) - (ay)(bx) \qquad (\ast)$$

شعاع حاملهای نقاط A ، B و C یعنی بردارهائی‌که مرکزکره را به رئوس مثلث مفروض وصل می‌کنند به r_A ، r_B و r_C نشان می‌دهیم. حاصلضرب $([r_A r_B][r_A r_C])$ را طبق رابطهٔ $(\ast)$ تبدیل می‌کنیم ، بدون‌اینکه به‌کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود می‌توان شعاع‌کره را واحدگرفت ، دراینصورت بدست می‌آید :

$$[r_A r_B] = \sin c \ ; \quad [r_A r_C] = \sin b \ ;$$

حاصلضربهای برداری $[r_A r_B]$ و $[r_A r_C]$ بر وجوه فرجهٔ رأس A عمودند و زاویهٔ بین آنها مساوی A است (توجه داشته باشید که زاویهٔ A از π کوچکتر است) . بنابراین :

$$([r_A r_B][r_A r_C]) = \sin c \sin b \cos A \ ;$$

و ضمناً داریم :

$$(r_A r_A) = 1 \quad ; \quad (r_B r_C) = \cos a \ ;$$

$$(r_A r_C) = \cos b \ ; \quad (r_B r_A) = \cos c$$

که اگر در رابطهٔ (۵)گذاشته شود، تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\sin c \sin b \cos A = \cos a - \cos b \cos c ;$$

که معادل با اولین رابطهٔ (۱) است . بهمین‌ترتیب سایر روابط (۱) هم بدست می‌آید .

روابط سینوسها

قضیهٔ II . سینوسهای اضلاع مثلث‌کروی با سینوسهای زوایای‌روبروی آنها متناسب است :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \qquad \text{(II)}$$

اثبات . کافی‌است توجه کنیم که‌از روابط کسینوسها می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = K ;$$

که در آن داریم :

$$K = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}$$

با این شرط که هریك‌از مقادیر a ، b ، c، A ، B وC در فاصلهٔ (۰ و π) واقع باشند (این محاسبه دربند ۲۷ ، مثال ۱۳ صفحهٔ ۱۹۳ آمده است) .

روابط پنج جزئی

قضیهٔ III . حاصلضرب سینوس یك‌ضلع مثلث‌کروی درکسینوس زاویهٔ مجاور آن‌برابراست باحاصلضرب‌کسینوس ضلع مقابل به این‌زاویه‌درسینوس ضلع سوم‌منهای حاصلضرب سینوس ضلع مقابل در کسینوس ضلع سوم و در کسینوس زاویهٔ بین آنها :

$$\begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A ; \\ \sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B ; \\ \sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C ; \\ \sin a \cos c = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A ; \\ \sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B ; \\ \sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C . \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

اثبات . برای اثبات رابطهٔ اول از تساویهای زیر استفاده می‌کنیم :

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\ ;$$

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\ .$$

ازاین‌دورابطه $\cos a$ را حذف می‌کنیم. برای این منظور طرفین‌رابطهٔ اول را در $\cos c$ ضرب و نتیجه‌را با رابطهٔ دوم جمع می‌کنیم، بدست‌می‌آید:

$$\cos b=\cos b\cos^2 c+\sin b\sin c\cos c\cos A+\sin a\sin c\cos B\ .$$

اگر درطرف راست این تساوی $\cos^2 c$ را به $1-\sin^2 c$ تبدیل کنیم (پس از ساده‌کردن) رابطه‌ای معادل رابطهٔ اول (III) بدست‌می‌آید . روابط دیگر هم بهمین ترتیب بدست می‌آید .

متذکر می‌شویم‌با تبدیل دوری‌رابطهٔ اول نسبت به a ، b ، c ، A ، B و C روابط دوم وسوم و با تبدیل دوری رابطهٔ چهارم نسبت به این حروف ، روابط پنجم وششم بدست می‌آید .

IV . حاصلضرب سینوس یك زاویه درکسینوس ضلع‌مجاور آن‌برابر است باحاصلضرب‌کسینوس زاویهٔ روبروی به این ضلع در سینوس زاویهٔ سوم باضافهٔ حاصلضرب سینوس زاویهٔ مقابل درکسینوس زاویهٔ سوم ودر کسینوس ضلع بین آنها :

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a\ ;\\
&\sin B\cos c=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos b\ ;\\
&\sin C\cos a=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos c\ ,\\
&\sin A\cos c=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a\ ;\\
&\sin B\cos a=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos b\ ;\\
&\sin C\cos b=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos c\ .
\end{aligned}\right.\qquad \text{(IV)}$$

اثبات . تساوی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\sin c\cos B=\cos b\sin a-\sin b\cos a\cos C$$

اگر در این رابطه $\sin a$ ، $\sin b$ ، $\sin c$ را به اعداد متناسب آنها $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ تبدیل کنیم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\sin C\cos B = \cos b\sin A - \sin B\cos a\cos C \ ;$$

که معادل با رابطهٔ اول دستگاه (IV) است. بهمین ترتیب بقیهٔ روابط هم بدست می‌آید.

روابط کسینوس زوایا

قضیهٔ V. کسینوس زاویهٔ مثلث کروی برابر است با قرینهٔ حاصلضرب کسینوسهای دو زاویهٔ دیگر باضافهٔ حاصلضرب سینوسهای همین زوایا در کسینوس ضلع بین آنها:

$$\begin{cases} \cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a \ ; \\ \cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b ; \\ \cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c ; \end{cases} \qquad (V)$$

اثبات. از تساویهای زیر (دستهٔ دوم روابط پنج جزئی):

$$\sin A\cos b = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a \ ;$$

$$\sin B\cos a = \cos A\sin C + \sin A\cos C\cos b \ ;$$

حاصلضرب $\sin A\cos b$ راحذف می کنیم، باین‌ترتیب که مقدار $\sin A\cos B$ را از رابطهٔ اول در رابطهٔ دوم قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\sin B\cos a = \cos A\sin C + (\cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a)\cdot\cos C$$

یا: $\sin B\cos a = \cos A\sin C + \cos B\cos C\sin C + \sin B\cos a(1 - \sin^2 C)$

ازآنجا (پس از ساده کردن) یکی از تساویهای موردنظر بدست می‌آید. بهمین ترتیب می‌توان سایر تساویها را هم بدست آورد.

اثبات‌دوم. مثلث $A_1B_1C_1$ قطبی مثلث مفروض‌را در نظر می گیریم. رابطهٔ کسینوس را برای مثلث قطبی می‌نویسیم:

$$\cos a_1 = \cos b_1\cos c_1 + \sin b_1\sin c_1\cos A_1$$

که با توجه به روابط:

$$a_1 = \pi - A \;;\; b_1 = \pi - B \;;\; c_1 = \pi - C \;;\; A_1 = \pi - a$$

بسادگی به رابطهٔ موردنظر تبدیل می‌شود .

روابط کتانژانت

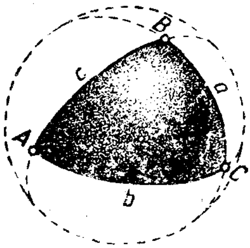
چهار جزئی متوالی مثلث کروی را در نظر می‌گیریم ، شش ترکیب چهار جزء از این نوع وجود خواهد داشت (شکل ۲۲۴) :

$$AcBa \;; \quad cBaC \;; \quad BaCb \;;$$
$$aCbA \;; \quad CbAc \;; \quad bAcB \,.$$

در هریك از این ترکیبات اجزاء روبرو (یعنی A و a یا c و C وغیره) طرفین و دوجزء دیگر وسطین نامیده می‌شود .

قضیهٔ VI (قاعدهٔ نپر) . تفاضل بین حاصلضربهای سینوس ضلع‌وسط درکتانژانت ضلع طرف و سینوس زاویهٔ وسط درکتانژانت زاویهٔ طرف برابر است با حاصلضرب اجزاء وسط :

$$\text{(VI)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin c \,\mathrm{cotg}\, a - \sin B \,\mathrm{cotg}\, A = \cos c \cos B \;; \\ &\sin a \,\mathrm{cotg}\, b - \sin C \,\mathrm{cotg}\, B = \cos a \cos C \;; \\ &\sin b \,\mathrm{cotg}\, c - \sin A \,\mathrm{cotg}\, C = \cos b \cos A \;; \\ &\sin a \,\mathrm{cotg}\, c - \sin B \,\mathrm{cotg}\, C = \cos a \cos B \;; \\ &\sin b \,\mathrm{cotg}\, a - \sin C \,\mathrm{cotg}\, A = \cos b \cos C \;; \\ &\sin c \,\mathrm{cotg}\, b - \sin A \,\mathrm{cotg}\, B = \cos c \cos A \,. \end{aligned} \right.$$



ش ۲۷۴

اثبات . روابط زیر راکه قبلا اثبات کردیم درنظر می‌گیریم :

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B$$

اگرطرفین این دو رابطه رابرهم تقسیم‌کنیم رابطه‌ای معادل‌رابطهٔ اول (VI) بدست می‌آید وشبیه آن بقیهٔ روابط هم ثابت می‌شود .

۸۲ . روابط بین اجزاء مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی‌را در نظر می‌گیریم (یعنی مثلثی که یکی‌اززوایای آن قائمه باشد) . زاویهٔ قائمه مثلث را A می‌گیریم ، ضلع روبروی به آن یعنی a **وتر** و دوضلع دیگر **مجاور** به‌قائمه نامیده می‌شوند . زوایای B وC را زوایای «ناراست» می‌نامیم ، بین زوایای ناراست ممکن است قائمه و یا منفرجه هم وجود داشته باشد .

اگر در روابط (I) تا (VI) آنهائی راکه شامل A هستند انتخاب کنیم و $A=\frac{\pi}{2}$ بگیریم پس از ساده‌کردن روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\cos a=\cos b\cos c\ ; \qquad \text{(I}'\text{)}$$

$$\begin{cases}\sin b=\sin a\sin B\ ;\\ \sin c=\sin a\sin C\ ;\end{cases} \qquad \text{(II}'\text{)}$$

$$\begin{cases}\cos B=\cos b\sin C\ ;\\ \cos C=\cos c\sin B\\ \cos a=\cot g B\cot g C;\end{cases} \qquad \text{(V}'\text{)}$$

$$\begin{cases}\cos B=\cot g\, a\, tg\, c\ ;\\ \sin b=tg\, c\cot g C\ ;\\ \cos C=tg\, b\cot g\, a\ ;\\ \sin c=tg\, b\cot g B\ .\end{cases} \qquad \text{(VI}'\text{)}$$

(رابطهٔ (I') نتیجه‌ای از رابطهٔ (I) . روابط (II') نتیجه‌ای از روابط(II) وغیره است) .

روابط (I') ، (II') ، (V') و (VI') را **روابط ده‌گانهٔ مثلث قائم‌الزاویه** گویند .

رابطهٔ (I') عبارتست از بیان وترمثلث برحسب اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه و نقش قضیهٔ فیثاغورث مربوط به هندسهٔ اقلیدسی را بعهده دارد . بهمین مناسبت آنرا **رابطهٔ کروی فیثاغورث** گویند .

نتایج .

۱° . اگر هر دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ ویاهردوی آنها بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد، وتر از $\frac{\pi}{2}$ کوچکتر می‌شود . اگر یکی ازاضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ و دیگری کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد ، وتر بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌شود .

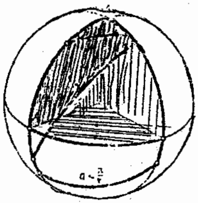
درحقیقت از رابطهٔ کروی‌فیثاغورث :

$$\cos a = \cos b \cos c$$

نتیجه می‌شود که اگر $\cos b$ و $\cos c$ هم علامت باشند

یعنی اگر $\frac{\pi}{2} > b > 0$ و $\frac{\pi}{2} > c > 0$ یا

$\frac{\pi}{2} < b < \pi$ و $\frac{\pi}{2} < c < \pi$



ش ۲۷۵

دراینصورت $\cos a > 0$ و $0 < a < \frac{\pi}{2}$ می‌شود و اگر $\cos b$ و $\cos c$ مختلف‌العلامه باشند ، $\cos a < 0$ و $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ می‌شود (شکل ۲۷۵)

°۲. از رابطهٔ :

$$\cos a = \cot g B \cot g C$$

نتیجه می‌شود که اگر زوایای ناراست هر دوکوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشند ، وتر کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌شود و اگر یکی از آنها کوچکتر ودیگری بزرگتراز $\frac{\pi}{2}$ باشد ، وتر بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌شود .

استدلال را می‌توان شبیه استدلال مربوط به نتیجهٔ °۱ انجام داد .

°۳ . ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه وزاویهٔ روبروی به‌آن یا هر دو کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$است ، یاهر دو مساوی $\frac{\pi}{2}$ و یا هردو بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ است .

در حقیقت از رابطهٔ :

$$\cos B = \cos b \sin C$$

نتیجه می‌شود که $\cos B$ و $\cos b$ هم علامت‌اند (زیرا $\sin C > 0$ است) و این معادل با اثبات قضیه است .

۸۳ . حل مثلث قائم‌الزاویه

مسائل مختلف مربوط به محاسبهٔ اجزاء مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی با کمك روابط ده‌گانه حل می‌شوند .

برای سهولت استفاده از روابط ده‌گانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی روشی بنام **قاعدهٔ نپر** وجود دارد که‌کار بخاطر سپردن‌آنها را خیلی ساده می‌کند.

با تبدیل اجراء b و c به $\frac{\pi}{2}-b$ و $\frac{\pi}{2}-c$ می‌توان روابط ده‌گانهٔ

مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی را بصورت زیر نوشت :

$$\cos a = cotg B \, cotg C \; ; \qquad \cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - b) \sin(\frac{\pi}{2} - c) ;$$

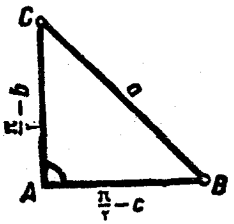
$$\cos B = cotg a \, cotg(\frac{\pi}{2} - c), \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin a \sin B \; ;$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - b) = cotg(\frac{\pi}{2} - c) cotg C ; \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - c) = \sin a \sin C \; ;$$

$$\cos C = cotg(\frac{\pi}{2} - b) cotg a \; ; \qquad \cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - b) \sin C \; ;$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - c) = cotg(\frac{\pi}{2} - b) cotg B \qquad \cos C = \sin(\frac{\pi}{2} - c) \sin B \; ;$$

مثلث قائم‌الزاویهٔ مسطحه‌ای رسم می‌کنیم، وتر آنرا a وزوایای حاده را B و C می‌گیریم (شکل ۲۷۶) ، اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه را به $\frac{\pi}{2} - b$ و $\frac{\pi}{2} - c$ علامت‌می‌گذاریم برای‌هریك ازپنج‌جزء مثلث(زاویهٔ‌قائمه را بحساب‌نیاورده‌ایم) دو جزء مجاور ودو جزء غیرمجاور وجوددارد .



ش ۲۷۶

مثلا برای جزءC، اجزاء مجاور a و $\frac{\pi}{2} - b$ و اجزاء غیر مجاور B و $\frac{\pi}{2} - c$ هستند .

با توجه به ده رابطه می‌توان قاعدهٔ زیر راکه برای بخاطر نگه‌داشتن آنها مفید است ذکرکرد :

قاعدهٔ نپر :کسینوس هرجزءبرابر است با حاصلضرب‌کتانژانتهای دو جزء مجاور وبرابراست با حاصلضرب سینوسهای دوجزء غیرمجاور .

مثلث کروی بامعلوم بودن مقادیرقابل‌قبول سه‌جزء اصلی آن معین‌می‌شود،

بنابراین درحالتی که مثلث قائم‌الزاویه‌است یك‌جزء آن معلوم است $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ ومثلث با معلوم بودن مقادیر قابل‌قبول دو جزء اصلی آن، قابل حل است .

با توجه به آنچه گفته شد ۶حالت برای حل مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی مشخص می‌شود :

۱°. دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه معلوم است .

b و c مفروض است ، a و B و C را محاسبه کنید.

۲°. وتر و یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه معلوم است :

a و b مفروض است ، c و B و C را محاسبه کنید.

۳°. یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه وزاویهٔ روبروی آن‌معلوم است :

b و B مفروض است ، a و c و C را محاسبه کنید ،

یا :

c و C مفروض است . a و b و B را محاسبه کنید.

۴° یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه وزاویهٔ مجاور آن معلوم است :

b و C مفروض است، a و c و B را محاسبه کنید ،

یا :

c و B مفروض است ، a و b و C را محاسبه کنید .

۵°. وتر ویك زاویهٔ مجاور آن معلوم است :

a و C مفروض است ، b و c و B را محاسبه کنید،

یا :

a و B مفروض است ، b و c و C را محاسبه کنید .

۶°. دو زاویه معلوم است :

B و C مفروض است ، a و b و c را محاسبه کنید .

ده رابطهٔ مربوط به مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی تمام روابط ممکنهٔ بین سه جزء ازپنج جزء مثلث‌یعنی a، b، c ، B و C را بما می‌دهد ، زیرا تعداد

ترکیبات ۵ حرف ۳ به ۲ مساوی ۱۰ است ($C_5^3 = 10$) و تعداد روابط هم مساوی ۱۰ می‌باشد . برای پیدا کردن اجزاء مجهول، باید سه رابطه ازاین ۱۰ رابطه را انتخاب کرد بنحوی که در هریك از آنها دو جزء معلوم ویکی از اجـزاء مجهول وجود داشته باشد . این‌روابط دستگـاه معادلاتی تشکیل می‌دهند که می‌تواند برای محاسبهٔ مجهولات مورد استفاده قرار گیرد . باین ـ ترتیب که توابع مثلثاتی اجزاء مجهول‌را برحسب توابع اجزاء معلوم‌محاسبه می‌کنیم ، دراینصورت معـادلات سادهٔ مثلثاتی خواهیـم داشت که با توجه به نامساویهائی که مقادیر اجزاء مجهول را محدود می‌کنند ، می‌توان‌جوابهارا بدست آورد .

انتخاب روابط مورد لزوم برای حل مسئله را طبق قاعدهٔ نپر انجـام می‌دهیم و از رابطهٔ بین‌سه‌جزء مجهول‌هم می‌توانیم بعنوان وسیلهٔ تحقیق‌صحت نتایج ، استفاده کنیم :

آنچه راکه گفتیم‌ضمن‌چند مسئلهٔ مربوط به‌حل مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی روشن می‌کنیم .

مسئله . اضلاع‌مجاور به زاویهٔ‌قائمه‌یعنی b و c معلوم‌اند. مطلوبست‌محاسبهٔ وتر a وزوایای ناراست B و C .

حل . بااستفاده ازقاعدهٔ نپر روابطی که‌هریك ازمجهولات را به‌معلومات مسئله مربوط می‌کند ، می‌نویسیم .

برای محاسبهٔ a :

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

یا :

$$\cos a = \cos b \cos c ;$$

برای محاسبهٔ B :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot g B$$

یا : $$\sin c = tg\, b\, cotg\, B;$$

و برای محاسبهٔ C :

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) = cotg\, C \cdot cotg\left(\frac{\pi}{۲} - c\right)$$

یا : $$\sin b = cotg\, C\, tg\, c$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$\cos a = \cos b \cos c \;;\quad tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c};\; tg\, C = \frac{tg\, c}{\sin b}$$

$$۰ < a < \pi \;;\quad ۰ < B < \pi \;;\quad ۰ < C < \pi$$

و این دستگاه مختلط تنها یك جواب خواهد داشت .

تحقیق صحت محاسبات را می‌توان بوسیلهٔ رابطه‌ای که بین اجزاء مجهول وجود دارد انجام داد :

$$\cos a = cotg\, B \cdot cotg\, C$$

مسئله . وتر a وضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ b معلوم است . مطلوبست ضلع دیگر وزوایای ناراست B و C.

حل . طبق قاعدهٔ نپر داریم :

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) = \sin a \sin B \;;$$

$$\cos C = cotg\, a\, cotg\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) \;;$$

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{۲} - c\right)$$

وبرای محاسبهٔ c، B و C دستگاه مختلط زیر را خواهیم داشت :

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a};\; \cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a};\; \cos c = \frac{\cos a}{\cos b};$$

$$۰ < c < \pi \;;\quad ۰ < B < \pi \;;\quad ۰ < C < \pi$$

برای اینکه اولین معادلهٔ این دستگاه جواب داشته باشد، لازم است که شرط $\sin b \leqslant \sin a$ برقرار باشد. طبق این شرط ضمناً خواهیم داشت:

$$|\cos a| < |\cos b| \quad \text{و} \quad |tg\, b| \leqslant |tg\, a|$$

بنابراین معادلات دوم وسوم دستگاه هم‌دارای جواب‌خواهندبود. معادلهٔ اول‌در فاصلهٔ (π و ۰) دوجواب دارد:

$$B_1 = \arcsin\frac{\sin b}{\sin a} \text{ و } B_2 = \pi - \arcsin\frac{\sin b}{\sin a}$$

اگر $B_1 \neq B_2$ باشد (تساوی تنها درحالت $B_1 = B_2 = \frac{\pi}{2}$ ممکن‌است)، وقتی که $b < \frac{\pi}{2}$ باشدباید مقدار B_1 را که کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ است انتخاب کردواگر $b > \frac{\pi}{2}$ باشد باید مقدار B_2 راکه بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ است انتخاب‌نمود. زیرا ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه وزاویهٔ روبروی آن باید هردو کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ ویا هر دو بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ باشند.

مسئله. ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه یعنی b وزاویهٔ روبروی به‌آن B معلوم است. مطلوبست محاسبه a و c و C.

حل. با استفاده از قاعدهٔ نپر دستگاه مختلط زیر بدست می‌آید:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad \sin c = \frac{tg\, b}{tg\, B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b};$$

$$0 < a < \pi; \quad 0 < c < \pi; \quad 0 < C < \pi$$

معادلهٔ اول وقتی‌جواب داردکه شرط $\sin b \leqslant \sin B$ برقرار باشد وچون‌مقادیر قابل قبول b و B یا هردو در ربع اول و یا هر دو در ربع دوم واقع‌اند، بنابراین یا $b \leqslant B \leqslant \frac{\pi}{2}$ و یا $\frac{\pi}{2} \leqslant B \leqslant b$ خواهد بود. بعبارت دیگر مسئله‌تنها

وقتی جواب دارد که مقدار B بین دومقدار b و $\frac{\pi}{۲}$ واقع باشد . باین‌ترتیب هریك از معادلات سادهٔ مثلثاتی دوجواب دارند که درحالت کلی متمایزند .

از معادلهٔ اول برای وتر مقادیر زیر بدست می‌آید :

$$a_{۱} = \arcsin\frac{\sin b}{\sin B} \; ; \; a_{۲} = \pi - \arcsin\frac{\sin b}{\sin B}$$

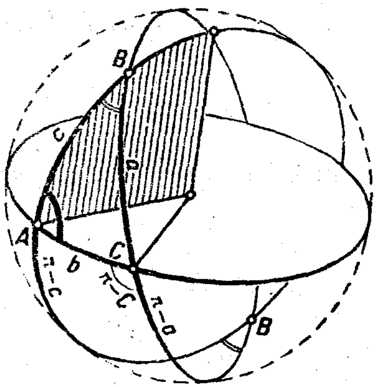
فرض می‌کنیم که این مقادیر یکی نباشند :

$$a_{۱} < \frac{\pi}{۲} < a_{۲}$$

(تساوی $a_{۱} = a_{۲} = \frac{\pi}{۲}$ وقتی‌وجود دارد که‌داشته‌باشیم: $\sin b = \sin B$) . بازاء

$a = a_{۱} < \frac{\pi}{۲}$ اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه وزوایای ناراست در یك ربع‌قرار خواهند گرفت : یا در ربع اول ویا در ربع دوم . بنابراین ازدوجواب معادلهٔ دوم (یاسوم) بایدآنراانتخاب کرد که با ضلع b (یا زاویهٔ B)در یك ربع قرارگیرد. بازاء :

$a = a_{۲} > \frac{\pi}{۲}$ اضلاع‌مجاور به‌زاویهٔ قائمه و زوایای ناراست در دوربع مختلف قرار می‌گیرند، بنابراین‌از دوجواب معادلهٔ دوم (یاسوم) بایستی آنرا انتخاب کرد که باضلع b (یا زاویهٔ B) در دوربع مختلف قرارگیرند.



ش ۲۷۷

باین‌ترتیب مسئله در حالت کلی دوجواب مختلف دارد (شکل ۲۷۷) .

انواع دیگر مسائل مربوط به محاسبهٔ اجزاء اصلی مثلث قائم‌الزاویهٔ

کروی هم ، وقتی که دو جزء اصلی آن معلوم باشد . با همین روش انجام می گیرد .

حل مثلث کروی که یکی از اضلاع آنها برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد ، منجر به حل مثلث قائم‌الزیه می‌شود . درحقیقت ، وقتی که $a=\frac{\pi}{۲}$ باشد ، مثلث قطبی آن قائم‌الزاویه خواهد بود ، زیرا برای مثلث قطبی داریم :

$$A_۱=\pi-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

سینوس‌زوایائی‌که به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیکند وکسینوس زوایائی‌که به‌صفر نزدیکند به‌کندی تغییر می‌کنند و بنا براین استفاده ازجدول در بسیاری ازموارد نمی‌تواند دقت لازم را بدست دهد در اینگونه موارد با بکار بردن روابط اساسی می‌توان ازتانژانت استفاده‌کرد . مثلا برای‌محاسبهٔ ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه‌یعنی c از روی وتر a وضلع دیگر b می‌توان بشکل زیرعمل‌کرد :

با استفاده ازرابطهٔ $tg\frac{c}{۲}=\sqrt{\frac{۱-\cos c}{۱+\cos c}}$ فرض می‌کنیم $\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}$ ، بدست‌می‌آید:

$$tg\frac{c}{۲}=\sqrt{tg\frac{a+b}{۲}\,tg\frac{a-b}{۲}}$$

و برای محاسبهٔ زاویهٔ B از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

$$tg\frac{B}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos B}{۱+\cos B}}\Longrightarrow tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{B}{۲}\right)=\pm\sqrt{\frac{۱+\sin B}{۱-\sin B}}$$

اگر در این‌رابطه $\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}$ بگیریم، بدست می‌آید :

$$tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{B}{۲}\right)=\pm\sqrt{\frac{tg\frac{a+b}{۲}}{tg\frac{a-b}{۳}}}$$

اگر بدانیم‌که b وB دریك ربع قرارگرفته‌اند علامت جلو رادیکال معین خواهد بود .

۸۴ : حل مثلثهای کروی

حل مثلثهای کروی را می‌توان با همان اصول کلی که برای حل مثلثهای قائم‌الزاویه بکار بردیم ، انجام داد و ما فقط حالتهای اساسی آنرا شرح می‌دهیم . وقتی که سه جزء اصلی وقابل قبول مثلث معلوم باشد ، در یکی از دستگاههای سه گانه روابط اصلی (ومثلا روابط I مربوط به کسینوس اضلاع) مقادیر معلوم را قرار می‌دهیم، بدین ترتیب دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی بین خطوط مثلثاتی اجزاء مجهول بدست می‌آید . اگر به این دستگاه معادلات ، دستگاه نامساویهای مربوط به اجزاء مثلث کروی را اضافه کنیم ، دستگاه مختلطی بدست می‌آید که از روی آن می‌توان مسئله را حل وبحث کرد . برای محاسبهٔ مقادیر اجزاء مجهول می‌توان دستگاههای مختلفی را انتخاب کرد (بند ۸۱ را به‌بینید) ، ولی این انتخاب باید چنان انجام گیرد که حل دستگاه مثلثاتی مربوط به آن تاحد امکان ساده‌تر و برای محاسبه و بحث راحت‌تر باشد . بعضی موارد بهتر اینست که با یك رسم عمود فضائی از یك رأس بر ضلع روبرو ، مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کنیم . دراینصورت حل مسئله به‌حل دومثلث قائم‌الزاویه (یا صحیح‌تر به‌محاسبهٔ بعضی از اجزاءمورد لزوم این دومثلث) منجر می‌شود .

در اینجا شش‌حالت اصلی مربوط به‌حل مثلث را ذکر می‌کنیم :

°۱. **حالت سه ضلع :** a، b ، c معلوم و A ، B ، C مجهول است.

°۲. **حالت سه‌زاویه :** A ، B ، C معلوم و a ، b ، c مجهول است.

°۳. **حالت دوضلع وزاویه بین آنها :** مثلا a ، b ، C معلوم و A ، B ، c مجهول است .

۴°. حالت دو زاویه وضلع بین آنها : مثلا A ، B ، c معلوم و a، b ، C مجهول است .

۵°. حالت دوضلع وزاویه روبروی یکی از آنها : a، b ، A معلوم و B ، C ، c مجهول است .

۶°. حالت دوزاویه وضلع روبروی یکی ازآنها : A، B ، a معلوم و b ، c ، C مجهول است .

مسئلهٔ ۱° . حل این مسئله را می‌توان با استفاده از روابط کسینوس اضلاع انجام داد . از تساوی :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

معادلهٔ ساده‌ای برای محاسبهٔ زاویهٔ A بدست می‌آید :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

برای محاسبهٔ بقیهٔ زوایا معادلات مشابهی بدست می‌آید، به این معادلات باید نامساویهای زیر راهم اضافه‌کرد :

$$0 < A < \pi \;;\quad 0 < B < \pi \;:\quad 0 < C < \pi \;;\quad A + B + C > \pi$$

متذکر می‌شویم‌که این دستگاه روابط برای محاسبهٔ با ماشین حساب دستگاه ساده‌ای است .

مسئلهٔ ۲° محاسبهٔ اضلاع‌را از روی زوایا می‌توان باکمك روابط(V) مربوط به‌کسینوس زوایا انجام داد ، از تساوی :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

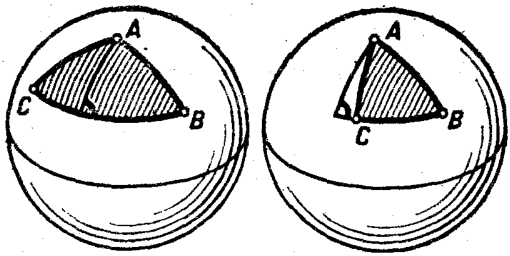
بدست می‌آید :

$$\sin a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

برای محاسبهٔ اضلاع دیگر هم روابط مشابهی بدست می‌آید .

مسئله ۳°. با مفروض بودن a ، b و C می‌توان ضلـع c را از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$



ش ۲۷۸

زوایای A و B رامی‌توان‌از روابط کتانژانت بدست آورد (بند ۸۱ را به‌بینید):

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin b \operatorname{cotg} a}{\sin C} - \cos b \operatorname{cotg} C$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\sin a \operatorname{cotg} b}{\sin C} - \cos a \operatorname{cotg} C$$

(این روابط برای محاسبه باماشین حساب مناسب‌ترند) .

این مسئله را می‌توان با تقسیم به دو مثلث قائم‌الزاویه حل کرد (عمود را ازرأس A برضلع a فرود می‌آوریم) . ولی این طریقه‌کار را مشکل‌تـر می‌کند ، زیرا باید در دوحالت مختلف‌که درشکل ۲۷۸ نشان داده شده‌است مورد بحث قرار گیرد .

مسئلهٔ ۴°. شبیه مسئلهٔ قبل حل می‌شود . برای محاسبهٔ اجزاء a ، b، C می‌توان از رابطهٔ کسینوس زاویه وروابط کتانژانت استفاده کرد:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos C\ ;$$

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} c \operatorname{cotg} B + \frac{\sin B \operatorname{cotg} A}{\sin c};$$

$$cotg\,\mathrm{h} = cotg\,\mathrm{c}\cos \mathrm{A} + \frac{\sin \mathrm{A}\, cotg\, \mathrm{B}}{\sin \mathrm{c}}$$

مسئلهٔ ۵°. برای محاسبهٔ زاویهٔ B با معلوم بودن a ، b و A می‌توان از رابطهٔ سینوس استفاده کرد :

$$\sin \mathrm{B} = \sin \mathrm{A} = \frac{\sin \mathrm{b}}{\sin \mathrm{a}}$$

برای محاسبهٔ ضلع c وزاویهٔ C می‌توان ازروابط III پنج جزئی استفاده کرد:

$$\sin \mathrm{a} \cos \mathrm{B} = \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} - \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{c} \cos \mathrm{A}$$

(برای محاسبهٔ c با معلوم بودن A ، b ، B و a) .

$$\sin \mathrm{c} \cos \mathrm{B} = \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{a} - \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{C}$$

(برای محاسبهٔ C با معلوم بودن B ، b ، a و c) .

مسئلهٔ ۶°. شبیه مسئلهٔ قبل حل می‌شود .

همانطور که دیده می‌شود براساس روابطاصلی می‌توان‌هر مسئلهٔ مذکور در ۱° تا ۶° مربوط به محاسبهٔ اجزاء مثلث‌کروی را حل‌کرد ، ولی این روابط برای محاسبات‌لگاریتمی ساده نیستند . بهمین مناسبت درمثلثات‌کروی روابط دیگری بدست آورده‌اند که بکار محاسبات لگاریتمی‌می‌خورد . درزیر این روابط وروش اثبات آنها را ذکر می‌کنیم . اگر در روابط زیر :

$$\sin \frac{\mathrm{A}}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos \mathrm{A}}{۲}}\ ;\ \cos \frac{\mathrm{A}}{۲} = \sqrt{\frac{۱ + \cos \mathrm{A}}{۲}};$$

$$tg \frac{\mathrm{A}}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos \mathrm{A}}{۱ + \cos \mathrm{A}}}$$

بجای $\cos \mathrm{A}$ مقدارش را از تساوی زیر قرار دهیم :

$$\cos \mathrm{a} = \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c} \cos \mathrm{A}\ ;$$

پس از تبدیلات مقدماتی خواهیم داشت :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\ ; \\ \cos\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\ ;\ tg\frac{A}{۲}=\frac{M}{\sin(p-a)} \end{array}\right. \quad \left[\frac{A}{۲}\right]$$

که در آنها داریم :

$$۲p=a+b+c\ ;\ \ M=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$$

و شبیه آنها می‌توان روابطی‌را برای خطوط مثلثاتی زوایای $\frac{B}{۲}$ و $\frac{C}{۲}$ بدست آورد (چون p و M نسبت باضلاع متقارن‌اند ، در روابط مربوط به‌زوایای مختلف ، تغییر نمی‌کنند) .

این‌روابط‌برای محاسبهٔ زوایای مثلث ازروی اضلاع‌آن بکار می‌روند.

همچنین با توجه به روابط‌کسینوس زوایا :

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

و روابط‌کلی نصف آوند می‌توان روابط خطوط مثلثاتی نصف اضلاع را بدست آورد :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{a}{۲}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}}\ ; \\ \cos\frac{a}{۲}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}\ ;\ tg\frac{a}{۲}=K\cos(P-A) \end{array}\right. \quad \left[\frac{a}{۲}\right]$$

که در آنها داریم :

$$۲P=A+B+C$$

$$K=\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}$$

بهمین ترتیب روابطی برای خطوط مثلثاتی $\frac{b}{2}$ و $\frac{c}{2}$ بدست می‌آید (بصورت تمرین همین روابط را از روی مثلث قطبی بدست آورید) .

این روابط برای محاسبهٔ اضلاع مثلث کروی بر حسب زوایای آن بکار می‌آید.

روابط دالامبر . روابط :

$$(D)\quad \begin{cases} \sin\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\cos\dfrac{C}{2}; \\[2ex] \sin\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}\cos\dfrac{C}{2}; \\[2ex] \cos\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\sin\dfrac{C}{2}; \\[2ex] \cos\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}\sin\dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

و روابط مشابه‌آن برای ترکیبهای دیگر اضلاع و زوایا را روابط دالامبر گویند .

برای اینکه اولین رابطه‌را بدست آوریم ، در اتحاد :

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

مقادیر سینوس و کسینوس نصف زوایارا برحسب اضلاع مثلث(روابط $\left[\frac{A}{2}\right]$)

قرار می‌دهیم . دراینصورت با توجه به رابطهٔ :

$$\cos\frac{C}{۲}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

و پس از تبدیلات لازم بدست می‌آید :

$$\sin\frac{A+B}{۲}=\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{۲}=$$

$$=\frac{۲\sin\frac{c}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}}{\sin c}\cos\frac{C}{۲}=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}\cos\frac{C}{۲}$$

بقیهٔ روابط هم بهمین روش بدست می‌آیند .

روابط نپر . روابط :

$$\left\{\begin{aligned} tg\frac{A+B}{۲}&=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{a+b}{۲}}\cot g\frac{C}{۲}\ ;\\ tg\frac{A-B}{۲}&=\frac{\sin\frac{a-b}{۲}}{\sin\frac{a+b}{۲}}\cot g\frac{C}{۲}\ ;\\ tg\frac{a+b}{۲}&=\frac{\cos\frac{A-B}{۲}}{\cos\frac{A+B}{۲}}\,tg\frac{c}{۲}\ ;\\ tg\frac{a-b}{۲}&=\frac{\sin\frac{A-B}{۲}}{\sin\frac{A+B}{۲}}\,tg\frac{c}{۲}. \end{aligned}\right. \qquad (N)$$

و روابط نظیر آنها برای ترکیبهای دیگر اضلاع وزوایا را روابط نپر گویند.

روابط نپر را می‌توان بسادگی و با تقسیم دوبدوی روابطدالامبر بدست آورد .

با تقسیم رابطهٔ دوم نپر به رابطهٔ اول (ویا از تقسیم رابطهٔ چهارم بر رابطهٔ سوم) **قضیهٔ تانژانتها** بدست می‌آید :

$$\frac{tg\frac{A-B}{۲}}{tg\frac{A+B}{۲}}=\frac{tg\frac{a-b}{۲}}{tg\frac{a+b}{۲}}$$

از روابط نپر می‌توان برای حل مسائل اصلی ۳° تا ۶° با کمک جدولهای لگاریتم استفاده کرد . این روابط در مثلثات کروی همان نقشی را دارند که روابط «مولوید» در مثلثات مستقیم‌الخط داشت . برای حل مسئلهٔ ۳° ، با مفروض بودن a ، b و C ، دو رابطهٔ اول نپر دستگاه معادلاتی برای زوایای A و B می‌دهند . ضلع c را می‌توان از رابطهٔ سوم (و یا چهارم) ویا ازقضیهٔ سینوسها بدست آورید :

$$\sin c=\sin C\frac{\sin a}{\sin A}$$

برای حل مسئلهٔ ۴° ، با مفروض A ، B و c ، روابط سوم و چهارم نپر دستگاه معادلاتی برای a و b بدست می‌دهند .

برای حل مسئلهٔ ۵° ، با مفروض بودن a ، b و A ، زاویهٔ B از قضیهٔ سینوسها بدست می‌آید، زاویهٔ C وضلع c هم ازروابط نپر بدست می‌آیند:

$$tg\frac{C}{۲}=cotg\frac{A+B}{۲}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{a+b}{۲}};\quad tg\frac{c}{۲}=tg\frac{a+b}{۲}\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{۲}}{\cos\frac{A-B}{۲}}$$

(می‌توان بجای این دو رابطه ، دو رابطهٔ دیگررا انتخاب کرد) .

مسئلهٔ ۶° را هم می‌توان شبیه مسئلهٔ قبل حل کرد .

۸۵ • محاسبهٔ «قدر اضافی» ومساحت مثلث کروی •

میدانیم که «قدر اضافی» مثلث کروی عبارتست ازاختلاف بین مجموع زوایای مثلث و π :

$$\varepsilon=(A+B+C)-\pi=۲P-\pi$$

اگر از این رابطه P را محاسبه کنیم : $P=\frac{\pi}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}$ و درروابط$\left[\frac{a}{۲}\right]$ قرار دهیم (بند قبل‌را به‌بینید) ، پس از تبدیلات ساده‌ای توابع مثلثاتی نصف‌اضلاع بصورت زیر در می‌آید :

$$\sin\frac{a}{۲}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{۲}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{۲}\right)}{\sin B\sin C}}\;;\;\cos\frac{a}{۲}=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{۲}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{۲}\right)}{\sin B\sin C}}$$

$$tg\frac{a}{۲}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{۲}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{۲}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{۲}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{۲}\right)}}=\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{۲}\right)N;$$

که در آن داریم :

$$N=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{۲}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{۲}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{۲}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{۲}\right)}}$$

و شبیه این روابط را برای بقیهٔ اضلاع هم می‌توان نوشت .

اگرروابط مربوط به $\sin\frac{a}{۲}$ و $\sin\frac{b}{۲}$ را درهم ضرب کنیم ، بدست‌می‌آید:

$$\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{۲}}{\sin C}\sqrt{\frac{\sin(A-\frac{\varepsilon}{۲})\sin(B-\frac{\varepsilon}{۲})}{\sin A\cos B}}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{۲}}{\sin C}\cos\frac{c}{۲}$$

از آنجا رابطهٔ زیر (رابطهٔ کانیول) بدست می‌آید :

$$\sin\frac{\varepsilon}{۲}=\frac{\sin\frac{a}{۲}\sin\frac{b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}\sin C; \qquad (K)$$

و با تبدیل دوری این رابطه نسبت به حروف، دو رابطهٔ دیگر هم برای $\frac{\varepsilon}{۲}$ بدست می‌آید .

اگر در رابطهٔ (K) قراردهیم :

$$\sin C=۲\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{C}{۲}=\frac{۲\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b};$$

رابطه‌ای برای $\sin\frac{\varepsilon}{۲}$ که نسبت به اضلاع تابعی متقارن است بدست‌می‌آید:

$$\sin\frac{\varepsilon}{۲}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{۲\cos\frac{a}{۲}\cos\frac{b}{۲}\cos\frac{c}{۲}}$$

و این دومین رابطهٔ «کانیول» است .

اگردر روابط دالامبر (D) برای $\sin\frac{A+B}{۲}$ و $\cos\frac{A+B}{۲}$ بجای $\frac{A+B}{۲}$ مقدارش $\frac{\pi}{۲}-\frac{C-\varepsilon}{۲}$ را قرار دهیم ، نسبتهای مساوی زیر را حواهیم داشت :

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{۲}}{\cos\frac{C}{۲}}=\frac{\cos\frac{a-b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}};\quad\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{۲}}{\sin\frac{C}{۲}}=\frac{\cos\frac{a+b}{۲}}{\cos\frac{c}{۲}}$$

تناسبهای زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}};$$

$$\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

صورت و مخرج نسبتها را به ضرب تبدیل می‌کنیم ، پس از تبدیلات ساده خواهیم داشت :

$$tg\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)tg\frac{\varepsilon}{4}=tg\frac{p-b}{2}\,tg\frac{p-a}{3};$$

$$cotg\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)tg\frac{\varepsilon}{4}=tg\frac{p}{2}\,tg\frac{p-c}{2};$$

اگر تساویهای اخیر را درهم ضرب کنیم رابطهٔ زیر (رابطهٔ لیوایل) بدست می‌آید:

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{p}{2}\,tg\frac{p-a}{2}\,tg\frac{p-b}{2}\,tg\frac{p-c}{2}}$$

چون $\pi<A+B+C<3\pi$ است ، علامت جلو رادیکال را $+$ اختیار کردیم ، از آنجا :

$$\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\pi-(A+B+C)}{4}<\frac{\pi}{2}$$

و با توجه به مقدار ε ، امکان محاسبهٔ مساحت مثلث کروی بدست می‌آید :

$$S_{\Delta}=\varepsilon R^{2}$$

(R شعاع کره است) .

۸۶ • موارد استعمال مختلف مثلثات کروی

I • حل مسائل هندسهٔ فضائی • میدانیم که اجزاء اصلی مثلث کروی : اضلاع آن a ، b ، c و زوایای آن A ، B ، C متناظراً همان زوایای رأس و زوایای دو وجهی کنج سه وجهی متناظر آن هستند . بهمین مناسبت از مثلثات کروی می‌توان برای محاسبهٔ اجزاء یك کنج سه وجهی استفاده کرد .

چند مثال .

۱• زوایای دو وجهی را در یك چهار وجهی منتظم ویك دوازده‌وجهی منتظم پیدا کنید .

حل • هریك از زوایای یك‌رأس چهار وجهی منتظم برابر است :

$$a=b=c=\frac{\pi}{۳}$$

با استفاده از روابط کسینوس اضلاع خواهیم داشت :

$$\cos A=\frac{\cos\frac{\pi}{۳}-\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{٤}}{\frac{۳}{٤}}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین :

$$A=B=C=\arccos\frac{۱}{۳}\# ۷۰^\circ ۳۱' ۴۳''$$

برای ۱۲ وجهی منتظم ، زوایای مسطحهٔ هررأس عبارتند از زوایای داخلی یك پنج ضلعی منتظم ، یعنی :

$$a=b=c=\frac{۳\pi}{۵};$$

داریم :
$$\cos A = \frac{\cos\frac{3\pi}{5} - \cos^2\frac{3\pi}{5}}{\sin^2\frac{3\pi}{5}}$$

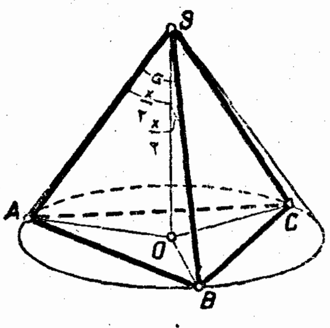
و با توجه به مقادیر :

$$\cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ ;\ \sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

بدست می‌آید :

$$\cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow A = B = C = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \# \\ \# 116^\circ 34' 54''$$

۰۲ هریك از زوایای رأس یك کنج سه وجهی منتظم برابر است با α . مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ رأس مخروط محیطی .



ش ۲۷۹

حل. با استفاده از روابط کسینوس اضلاع ، هریك از زوایای دو وجهی‌را در کنج‌سه وجهی‌محاسبه می‌کنیم (شکل ۲۷۹) :

$$\cos A = \cos B = \cos C = \\ = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

کنج سه وجهی SOAB را در نظر می‌گیریم ، در این کنج زوایای مسطحهٔ رأس عبارتند از α ، $\frac{x}{2}$ و $\frac{x}{2}$ (که در آن x عبارتست از زاویهٔ رأس‌مخروط) زوایای دو وجهی مقابل آنها عبارتند از $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{A}{2}$ و $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$. محاسبهٔ زاویهٔ $\frac{x}{2}$ معادل است باحل مثلث (متساوی‌الساقین) کروی به ضلع α وزوایای‌مجاور

آن $\frac{A}{۲}$ و $\frac{A}{۲}=\frac{B}{۲}$. با استفاده از قضیهٔ سینوسها :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{A}{۲}}$$

بدست می‌آید :

$$\sin\frac{x}{۲}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{۲\pi}{۳}}\sin\frac{A}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\sin\alpha\sqrt{\frac{۱-\cos A}{۲}}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}{\sqrt{۳}}$$

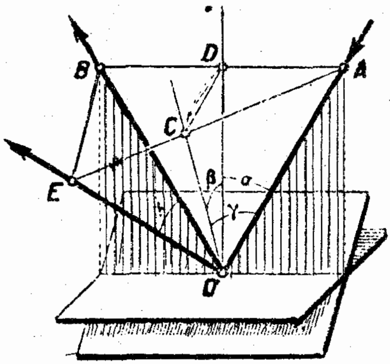
۰۳ بر صفحهٔ آینه شعاع نوری می‌تابیم ، زاویهٔ تابش مساوی α است . سپس آینه را باندازهٔ زاویهٔ β حول تصویر شعاع تابش برصفحهٔ آینه (دروضع اولیهٔ آینه) می‌چرخانیم . به‌بینید شعاع برگشت از امتداد اولیهٔ خود چقدر منحرف می‌شود ؟

حل. فرض‌کنید AO شعاع‌تابش (شکل ۲۸۰) ، OB شعاع برگشت در وضع‌اولیهٔ آینه، OD عمود برصفحهٔ آینه در وضع اولیه ، OC عمود بر صفحهٔ آینه در وضع جدید و OE مسیر جدید شعاع برگشت باشد .

دراینصورت داریم :

$\widehat{AOD}=\alpha$; $\widehat{DOC}=\beta$;

باید مقدار زاویهٔ $x=\widehat{BOE}$ را محاسبه‌کنیم ، زاویهٔ $\widehat{AOC}=\gamma$ را زاویهٔ جدید تابش فرض می‌کنیم. دو کنج‌سه‌وجهی OACD و OABE



ش ۲۸۰

را درنظر می‌گیریم ، این دو کنج زوایای دو وجهی مشترکی روی یال OA دارند ، این زاویهٔ دو وجهی‌را A می‌نامیم . درکنج سه وجهی اول،زوایای مسطحهٔ رأس عبارتند از α ، β وγ ، بنابراین بـا توجه به روابط کسینوس اضلاع داریم :

$$\cos A=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

درکنج‌سه وجهی دوم، زوایای مسطحهٔ‌رأس عبارتند از x، 2α و 2γ بنابراین

$$\cos A=\frac{\cos x-\cos 2\alpha\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha\sin 2\gamma}$$

چون OD تصویر OC بر صفحهٔ OAB می‌باشد وشعاع OA بـا OC و تصویر آن OD زوایای γ و α می‌سازد دراینصورت داریم (صفحهٔ ۵۴۸ را به‌بینید) :

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta.$$

با مساوی قرار دادن مقادیر $\cos A$ بدست می‌آید :

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{\cos x-\cos 2\alpha\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha\sin 2\gamma}$$

از آنجا :

$$\cos x=4\cos\alpha\cos\gamma(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)+\cos 2\alpha\cos 2\gamma=$$

$$=4\cos\alpha\cos\gamma(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)+(2\cos^2\alpha-1)(2\cos^2\gamma-1)=$$

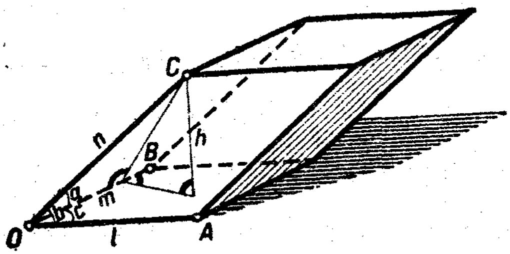
$$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2\cos^2\alpha-2\cos^2\gamma+1$$

اگر بجای $\cos\gamma$ مقدارش $\cos\alpha\cos\beta$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\cos x=4\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+1=$$

$$=2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos^2\alpha+1=1-2\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

۴. مطلوبست حجم متوازی‌السطوح مایلی‌که طول یالهای متقارب در یك‌رأس آن وزوایای مسطحهٔ این رأس معلوم باشد .



ش ۲۸۱

حل . مقادیررا مطابق شکل ۲۸۱ درنظر می‌گیریم، زوایای دو وجهی یالهای OA ، OB و OC را با A ، B و C وطول یالهای OA ، OB و OC را بوسیلهٔ l ، m و n نشان می‌دهیم ، داریم :

$$V = S_{OABD} \cdot h = (l \cdot m \cdot \sin c)(n \sin a \sin B) = lmn \sin a \sin c \sin B$$

با استفاده از روابط $\sin\frac{B}{2}$ و $\cos\frac{B}{2}$ برحسب اضلاع مثلث کروی ، یعنی برحسب زوایای a ، b و c (صفحهٔ ۷۱۰ را به‌بینید) داریم :

$$\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}} = \frac{2\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a \sin c}$$

$(2p = a+b+c)$.

وبالاخره بدست می‌آید :

$$V = 2lm\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}$$

II . مورد استعمال مثلثات کروی در مساحی ونجوم .

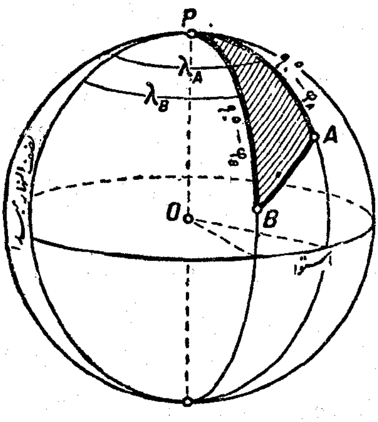
مثلثات کروی برای حـل مسائل مختلف مساحی ، وقتی‌که بخواهیـم اندازه‌گیری ومحاسبه را روی قطعات بزرگی انجام دهیم‌که از انحنای آنها نتوان صرفنظر کرد، بکار می‌رود . همچنین مثلثات کروی‌مورد استعمال‌وسیعی هم درحل مسائل مختلف مربوط به نجوم دارد .

چند مثال :

۱. مختصـات جغرافیائی دو نقطهٔ A و B از سطح زمین معلوم است ، فاصلهٔ بین این دو نقطه را بدست آورید .

حل . فرض کنید φ_A و φ_B عرض و λ_A و λ_B بترتیب طول جغرافیائی نقاط مفروض باشند (شکل ۲۸۲) . فاصله d بین A و B عبارتست از طول قوسی از دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ زمین که از این دو نقطه می گذرد . مثلث کروی را درنظر می گیریم که رئوس آن قطب و دو نقطهٔ مفروض A و B باشد . دراین مثلث اضلاع PA و PB بترتیب برابرند با $\frac{\pi}{2}-\varphi_A$ و $\frac{\pi}{2}-\varphi_B$ و زاویـهٔ بین آنها $|\lambda_B-\lambda_A|$ می‌باشد . فاصلهٔ مجهول همان طول ضلع AB است . فرض کنید d اندازهٔ قوس $\widehat{AB}$ (برحسب رادیان یادرجه) باشد، دراینصورت با توجه به‌رابطهٔ کسینوس اضلاع داریم :

$$\cos d=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi_A)\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi_B)+\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi_A)\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi_B)\times$$
$$\times\cos(\lambda_A-\lambda_B)$$



ش ۲۸۲

یا :

$$\cos d=\sin\varphi_A\sin\varphi_B+$$
$$+\cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_A-$$
$$-\lambda_B);$$

فاصلهٔ مجهول برابر است با Rd، که در آن d اندازهٔ قوس AB برحسب رادیان و R شعاع کرهٔ زمین است .

مثلا فاصلهٔ بین لنینگراد و برلن را محاسبه می کنیم ، مختصات لنینگراد عبارتست از : $\varphi_A = ۵۹^\circ ۵۶/۵'$ عرض شمالی و $\lambda_A = ۳۰^\circ ۱۸/۴'$ طول شرقی، ومختصات برلن $\varphi_B = ۵۲^\circ ۳۰/۳'$ عرض شمالی و $\lambda_B = ۱۳^\circ ۱۸/۴'$ طول شمالی . داریم :

$$\log \sin\varphi_A = \bar{۱}/۹۳۷۲۸$$

$$\log \sin\varphi_B = \bar{۱}/۸۹۹۵۰$$

$$\log(\sin\varphi_A \sin\varphi_B) = \bar{۱}/۸۳۶۷۸$$

$$\sin\varphi_A \sin\varphi_B = ۰/۶۸۶۷۲$$

$$\log \cos\varphi_A = \bar{۱}/۶۹۹۷۳$$

$$\log \cos\varphi_B = \bar{۱}/۷۸۴۴۰$$

$$\log \cos(\lambda_A - \lambda_B) = \bar{۱}/۹۸۰۸۰$$

$$\log[\cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B)] = \bar{۱}/۴۶۴۹۳ \;;$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B)] = ۰/۲۹۱۶۹ \;;$$

$$\cos d = ۰/۶۸۶۷۲ + ۰/۲۹۱۶۹ = ۰/۹۷۸۴۱ \;;$$

$$d = ۱۱^\circ ۵۵/۷' = ۸۱۵/۷'$$

d را برحسب رادیان محاسبه می کنیم :

$$d = \frac{۷۱۵/۷\pi}{۱۸۰ \times ۶۰}$$

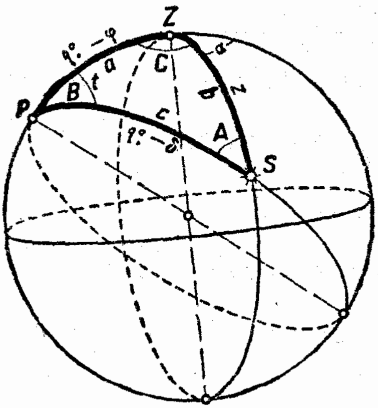
باتوجه باینکه شعاع کرهٔ زمین $R \# ۶۳۷۰$ کیلومتر است، بدست می‌آید:

$$AB = Rd = \frac{۷۱۵/۷ \times ۶۳۷۰\pi}{۱۸۰ \times ۶۰} \# ۱۳۳۰\,\text{km}$$

اگر محاسبات با ماشین محاسبه انجام گیرد ، می‌توان مقادیر $\sin\varphi_A \sin\varphi_B$ و $\cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B)$ را مستقیماً از ضرب مقادیر طبیعی مثلثاتی آنها بدست آورد .

۲. در خارکف ستاره‌ای را با زاویهٔ ساعتی $t = ۵۰°۲۷'۳۲''$ و میل $\alpha = ۸۹°۷'۱۶''$ مشاهده کرده‌اند . فاصلهٔ سمت‌الرأس ستاره و انحراف آن δ را محاسبه کنید . عرض جغرافیائی خارکف $\varphi = ۵۰°۰'۱۰''$ است .

حل . روی کرهٔ سماوی مثلثی را در نظر می‌گیریم که رئوس آن قطب سماوی P ، سمت‌الرأس Z و ستارهٔ مورد مشاهدهٔ S باشد (شکل ۲۸۳) . در مثلث کروی PZS ضلع PZ مساوی $۹۰° - \varphi$، ضلع ZS فاصلهٔ سمت‌الرأسی مجهول ستاره است که z فرض می‌کنیم ، ضلع PS مساوی $۹۰° - \delta$، زاویهٔ رأس P مساوی زاویهٔ ساعتی t وزاویهٔ رأس Z مساوی $۱۸۰° - \alpha$ است . بنابراین در مثلث PZS ، ضلع PZ ودو زاویهٔ مجاورآن P وZ معلوم‌اند و باید اضلاع PS و ZS را محاسبه کنیم . درحقیقت داریم :



ش ۲۸۳

$$a = PZ = ۹۰° - \varphi = ۳۹°۵۹'۵۰'' ;$$

$$B = t = ۵۰°۲۷'۳۲'' ;$$

$$C = ۱۸۰° - \alpha = ۹۰°۵۲'۴۴'' ;$$

برای محاسبهٔ b و c ازروابط نپر استفاده می‌کنیم :

$$tg\frac{b+c}{۲} = \frac{\cos\frac{B-C}{۲}}{\cos\frac{B+C}{۲}} tg\frac{a}{۲};$$

$$tg\frac{b-c}{۲} = \frac{\sin\frac{B-C}{۲}}{\sin\frac{B+C}{۲}} tg\frac{a}{۲}.$$

محاسبات را انجام‌می‌دهیم :

$$B-C=-۴۰^\circ ۲۵' ۱۲'' \;; \frac{B-C}{۲}=-۲۰^\circ ۱۲' ۳۶'' \;;$$

$$B+C=۱۴۱^\circ ۲۰' ۱۶'' \;; \frac{B+C}{۲}=۷۰^\circ ۴۰' ۸'' ;$$

$$\frac{\alpha}{۲}=۱۹^\circ ۴۹' ۵۵'' \;;$$

$$\log\cos\frac{B-C}{۲}=\overline{۱}/۹۷۲۴۰$$

$$-\log\cos\frac{B+C}{۲}=۰/۴۸۰۱۴$$

$$\log tg\frac{\alpha}{۲}=\overline{۱}/۵۶۱۰۴$$

$$\log tg\frac{b+c}{۲}=۰/۰۱۳۵۸$$

$$\frac{۱}{۲}(b+c)=۴۵^\circ ۵۳' ۴۴'' \qquad (*)$$

$$\log\left|\sin\frac{B-C}{۲}\right|=\overline{۱}/۵۳۸۴۰$$

$$-\log\sin\frac{B+C}{۲}=۰/۰۲۵۲۰$$

$$\log tg\frac{\alpha}{۲}=\overline{۱}/۵۶۱۰۴$$

$$\log\left|tg\frac{b-c}{۲}\right|=\overline{۱}/۱۲۴۶۴$$

$$\frac{b-c}{۲}=-۷^\circ ۳۵' ۲۲'' \qquad (**)$$

از (*) و (**) بدست می‌آوریم :

$$b=۳۸^\circ ۱۸' ۲۲'' \;; \; c=۵۳^\circ ۲۹' ۶'' \;;$$

$$z=b=۳۸^\circ ۱۸' ۲۲'' \;; \delta=۹۰^\circ-c=۳۶^\circ ۳۰' ۵۴''$$

فهرست الفبائی